



普通高等教育“十二五”规划教材

应用概率统计

主编 黄龙生
副主编 黄敏 宋红凤 许芳忠 夏慧珠



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn



普通高等教育“十二五”规划教材

应用概率统计

副主编 黄敏 宋红凤 主编 黄龙生
许芳忠 夏慧珠



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、常用随机变量的分布、大数定律及中心极限定理、数理统计基础、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析。每章后面编排了较多的选择题和填空题,适量的应用计算题,且在数理统计部分每章最后配了一个案例分析。

本书可作为普通高等学校本科非数学类应用型专业的“概率论与数理统计”课程的教材或参考书,也可用作专科或高职院校相关专业的“概率论与数理统计”课程的教材或参考书,同时也可作为工程技术人员和科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计 / 黄龙生主编. — 北京: 中国水利水电出版社, 2015.6

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5170-3250-2

I. ①应… II. ①黄… III. ①概率统计—高等学校—教材 IV. ①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第128831号

书 名	普通高等教育“十二五”规划教材 应用概率统计
作 者	主编 黄龙生 副主编 黄敏 宋红凤 许芳忠 夏慧珠
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (发行部)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市北中印刷厂
规 格	184mm×260mm 16开本 16.5印张 391千字
版 次	2015年6月第1版 2015年6月第1次印刷
印 数	0001—1500册
定 价	38.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究



前 言

PREFACE

“概率论与数理统计”是研究随机现象及其统计规律性的一门学科，在各行各业中有大量的实际应用。普通高校中很多应用型专业，要求学生在掌握概率论与数理统计的基本理论、基本方法和基本技能的基础上，还应加强概率论与数理统计的应用技能，本书是为了适应这种需要而编写的。与已出版的《概率论与数理统计》相比较，本书省略了理论推导过程，强化了概率论与数理统计的应用，以求随机事件的概率及随机变量的数字特征为主线编排概率论部分的内容；在数理统计部分，以扩展内容的形式，增加了部分实用的统计工具与方法方面的介绍。

全书力求突出概率论与数理统计的基本思想和方法。本书用“引例（日常生产生活中的问题）”的方式导入新的概念、思想和方法，力求通俗易懂；对专业术语给出了相应的英语译文，为学生阅读外文资料提供便利；在例题和习题的选取上注重应用性和趣味性，以达到提高学生分析解决实际问题的能力。本书中的主要概念以定义的形式给出，主要结论以定理的形式给出，帮助学生抓住重点。每章的习题中编排了较多的选择题和填空题，通过做这些选择题和填空题，使学生加深对概率论与数理统计基本概念的理解，掌握概率论与数理统计的基本方法和基本技能，提高动手能力。在数理统计部分，扩展内容用“*”标注，可供学生自学或选学，相应的习题也用“*”标注。

本书第1~7章由黄龙生编写，第8章由黄敏编写，第9章由宋红凤编写，第10章由许芳忠编写，第11章由夏慧珠编写，全书由黄龙生统稿。

本书在编写过程中参考了大量的文献，在此向这些文献的编著者和出版社表示感谢和敬意，感谢中国水利水电出版社和本书的编辑，为本书的出版付出的辛勤劳动。由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2015年3月



目 录

CONTENTS

前言

第 1 章 随机事件及其概率	1
1.1 随机事件与概率的基本概念	1
1.1.1 随机试验与随机事件	1
1.1.2 随机事件间的关系与运算	3
1.1.3 随机事件的概率	5
1.2 概率的计算	7
1.2.1 古典概率	7
1.2.2 计数原理	8
1.2.3 利用计数原理计算古典概率	9
1.2.4 几何概型	9
1.2.5 蒙特卡罗 (Monte - Carlo) 法	10
1.2.6 主观概率	11
1.3 条件概率	11
1.3.1 条件概率的概念与性质	11
1.3.2 乘法公式	13
1.3.3 全概率公式	14
1.3.4 贝叶斯 (Bayes) 公式	16
1.4 随机事件的独立性	18
1.4.1 两个事件的独立性	18
1.4.2 三个事件的独立性	19
1.4.3 多个事件的独立性	20
1.4.4 试验的独立性	21
1.4.5 n 重伯努利试验	21
习题	22
第 2 章 随机变量及其分布	26
2.1 随机变量	26
2.1.1 随机变量的概念	26
2.1.2 随机变量的分类	27

2.1.3	分布函数	27
2.2	离散型随机变量及其分布	28
2.2.1	离散型随机变量的概率分布	28
2.2.2	概率分布的性质	28
2.3	连续型随机变量及其分布	30
2.3.1	连续型随机变量的密度函数	30
2.3.2	密度函数的性质	30
2.4	随机变量函数的分布	34
2.4.1	离散型随机变量函数的分布	34
2.4.2	连续型随机变量函数的分布	35
	习题	36
第3章	多维随机变量及其分布	40
3.1	多维随机变量及其联合分布	40
3.1.1	多维随机变量的联合分布函数	40
3.1.2	二维随机变量分布函数的性质	40
3.1.3	边缘分布函数	41
3.2	二维离散型随机变量	42
3.2.1	二维离散型随机变量的概念及性质	42
3.2.2	二维离散型随机变量边缘分布律	43
3.3	二维连续型随机变量	44
3.3.1	二维连续型随机变量的概念及性质	44
3.3.2	二维连续型随机变量边缘概率密度	45
3.4	随机变量的独立性	46
3.4.1	随机变量独立性的概念	46
3.4.2	随机变量独立性的判断	47
3.5	二维随机变量函数的分布	49
3.5.1	二维离散型随机变量函数的分布	49
3.5.2	二维连续型随机变量函数的分布	50
3.6	条件分布	52
3.6.1	离散型随机变量的条件分布律	52
3.6.2	连续型随机变量的条件概率密度	53
	习题	55
第4章	随机变量的数字特征	63
4.1	随机变量的数学期望	63
4.1.1	离散型随机变量的数学期望	63
4.1.2	连续型随机变量的数学期望	65

4.1.3	随机变量函数的数学期望	65
4.1.4	数学期望的性质	67
4.2	随机变量的方差	68
4.2.1	方差的概念	69
4.2.2	方差的性质	70
4.3	协方差与相关系数	70
4.3.1	协方差	70
4.3.2	相关系数	72
4.3.3	矩与协方差矩阵	76
	习题	78
第5章	常用随机变量的分布	82
5.1	两点分布与二项分布	82
5.1.1	两点分布	82
5.1.2	二项分布	82
5.1.3	二项分布与(0-1)分布之间的关系	83
5.1.4	二项分布的数字特征	83
5.2	泊松(Poisson)分布	84
5.2.1	泊松(Poisson)分布的概念	84
5.2.2	泊松定理	84
5.2.3	泊松分布的数字特征	85
5.3	均匀分布	86
5.3.1	均匀分布的概念	86
5.3.2	均匀分布的数字特征	87
5.4	指数分布	87
5.4.1	指数分布的概念	87
5.4.2	指数分布的数字特征	88
5.5	正态分布	89
5.5.1	正态分布的概念	89
5.5.2	正态分布与标准正态分布的关系	90
5.5.3	正态分布的数字特征	91
5.5.4	二维正态分布	92
	习题	95
第6章	大数定律及中心极限定理	98
6.1	大数定律	98
6.1.1	切比雪夫(Chebyshev)不等式	98
6.1.2	切比雪夫大数定律	99

6.1.3	伯努利大数定律	99
6.1.4	辛钦大数定律	100
6.2	中心极限定理	100
6.2.1	中心极限定理的概念	101
6.2.2	独立同分布的中心极限定理	101
	习题	103
第7章	数理统计基础	105
7.1	数理统计的基本概念	105
7.1.1	总体与个体	105
7.1.2	样本	106
7.1.3	统计量与常用统计量	108
7.2	数理统计中常用的三大分布	110
7.2.1	χ^2 分布	110
7.2.2	t 分布	112
7.2.3	F 分布	113
7.3	抽样分布	114
7.3.1	正态总体下的抽样分布	114
7.3.2	两个正态总体下的抽样分布	115
*7.4	数据整理	118
7.4.1	频率分布表与直方图	118
7.4.2	茎叶图	119
7.4.3	条形图	120
7.4.4	五数概括与箱线图	120
	习题	123
	描述统计案例	126
第8章	参数估计	132
8.1	参数估计的概念	132
8.1.1	点估计的概念	132
8.1.2	区间估计的概念	132
8.1.3	单侧置信区间	134
8.2	参数的点估计法	135
8.2.1	矩估计法	135
8.2.2	最大似然估计法	137
8.3	点估计优劣的评价标准	141
8.3.1	无偏性	141
8.3.2	有效性	143

8.3.3 一致性	143
8.4 正态总体参数的置信区间	144
8.4.1 总体方差已知情况下均值的置信区间	145
8.4.2 总体方差未知情况下均值的置信区间	146
8.4.3 正态总体方差与标准差的置信区间	147
8.5 两个正态总体参数的置信区间	148
8.5.1 两个正态总体均值差的置信区间	149
8.5.2 两个正态总体方差比的置信区间	150
习题	151
参数估计案例	155
第9章 假设检验	157
9.1 假设检验的基本概念	157
9.1.1 假设检验的概念	157
9.1.2 两类错误	159
9.1.3 假设检验的基本步骤	160
9.1.4 假设检验的三种基本形式	161
9.2 假设检验问题的 P-值	162
9.3 正态总体参数的假设检验	165
9.3.1 方差已知时均值的 Z 检验	165
9.3.2 方差未知时均值的 T 检验	165
9.3.3 正态总体均值检验问题小结	167
9.3.4 均值未知时方差的卡方检验	167
9.3.5 均值已知时方差的卡方检验	169
9.3.6 正态总体方差检验问题小结	169
9.4 两个正态总体参数的假设检验	169
9.4.1 方差已知时均值的 Z 检验	170
9.4.2 方差未知但相等时均值的 T 检验	170
* 9.4.3 配对样本的 T 检验	171
* 9.4.4 方差未知且不等时的 T 检验	173
9.4.5 两个正态总体均值的假设检验问题小结	173
9.4.6 两个正态总体方差的 F 检验	174
9.4.7 两个正态总体方差的假设检验问题小结	175
* 9.5 正态性检验	175
9.5.1 正态概率纸	175
9.5.2 构造正态概率纸的原理	175
9.5.3 正态概率纸检验法	176
9.5.4 正态概率纸参数估计法	177

* 9.6 独立性的列联表检验	179
* 9.7 大样本检验	181
习题	182
假设检验案例	188
第 10 章 方差分析	192
10.1 单因素方差分析	192
10.1.1 基本假定条件	192
10.1.2 统计假设	193
10.1.3 平方和分解	193
10.1.4 方差分析	194
10.2 无交互作用双因素方差分析	197
10.2.1 无交互作用双因素方差分析模型	197
10.2.2 平方和分解	199
10.2.3 方差分析	200
10.3 有交互作用双因素方差分析	203
习题	207
方差分析案例	212
第 11 章 回归分析	216
11.1 一元线性回归方程	216
11.1.1 相关分析与回归分析	216
11.1.2 总体回归函数	217
11.1.3 样本回归函数	219
11.1.4 回归系数的最小二乘估计	220
11.2 一元线性回归方程的显著性检验	222
11.2.1 平方和分解	222
11.2.2 F 检验	223
11.2.3 t 检验	225
11.2.4 相关系数检验	225
11.3 估计与预测	227
11.3.1 均值 $E(Y_0)$ 的点估计	227
11.3.2 均值 $E(Y_0)$ 的区间估计	227
11.3.3 随机变量 Y_0 的预测区间	228
11.4 可线性化的一元非线性回归	230
11.4.1 模型的确定	230
11.4.2 系数的估计	232
习题	234
回归分析案例	237

附表 1 标准正态分布函数表	244
附表 2 T 分布表	245
附表 3 χ^2 分布表	246
附表 4 F 分布表	248
附表 5 相关系数检验表	253
参考文献	254

第 1 章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科。概率论与数理统计的理论和方法，在工业、农业、军事、天文、医学、金融、保险、试验设计等人类活动的各个领域，产生着越来越重要的作用。在理论联系实际方面，可以说概率论与数理统计是当今世界上发展最为迅速也是最为活跃的数学分支之一。概率论是研究随机现象中数量规律的数学分支，是数理统计的理论基础。

1.1 随机事件与概率的基本概念

1.1.1 随机试验与随机事件

1.1.1.1 随机现象

在自然界和人类社会活动中，人们所观察到的现象大致可分为必然现象和随机现象两类。

定义 在一定条件下，必然出现的现象，即只有一个结果，因而是可以事先准确预知的现象，称为**必然现象或确定性现象** (certain phenomenon)。例如：

- ◆ 每天早晨太阳从东方升起。
- ◆ 同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引。
- ◆ 在自然状态下，水从高处流向低处等。

定义 在一定条件下，不能事先准确预知其结果的现象，即在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称为**随机现象** (random phenomenon)。

随机现象在日常生活中也是广泛存在的，例如：

◆ 向上抛一枚硬币，落地后可能正面朝上也可能反面朝上，就是说，“正面朝上”这个结果可能出现也可能不出现。

◆ 掷一枚骰子，可能出现 1、2、3、4、5、6 点，至于将掷出哪一点，也是不能事先准确预知的。

◆ 在股市交易中，某只股票的价格受到国家金融政策、上市公司业绩、股民的炒作行为及其他国家股市的涨跌等许多不确定因素影响，下一个交易日该股票的股价可能上升也可能下跌，而且这只股票的最高价和最低价也不能事先确定。

◆ 在射击比赛中，运动员用同一支步枪向一个靶子射击，打出的环数可能不同。

◆ 在某一条生产线上，使用相同的工艺生产出来的产品寿命也可能会有较大差异等。

虽然随机现象在相同的条件下可能的结果不止一个，且不能事先准确预知将会出现什么样的结果，但是经过长期的、反复的观察和实验，人们逐渐发现了所谓结果“不能事先

准确预知”只是对一次或几次观察或试验而言，在相同条件下进行大量重复观察或试验时，试验的结果就会呈现出某种规律性，这就是所谓的统计规律性。

1.1.1.2 随机试验

为了研究随机现象的数量规律，需要对随机现象进行一些重复观察或试验。在这里，试验作为一个含义广泛的术语，它可以是各种各样的科学实验，也可以是对自然现象或社会现象进行的观察。例如：

- ◆ 在一批笔记本电脑中任意抽取一台，检测它的寿命。
- ◆ 向上抛一枚硬币三次，观察其落地后出现正面的次数。
- ◆ 记录某市火车站售票处一天内售出的车票数。

定义 具有下述三个特点的试验称为随机试验 (random experiment)，简称试验，用大写英文字母 E 表示。

(1) 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行。

(2) 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，但事先可以明确知道试验的所有可能结果。

(3) 不确定性：进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

以后本书中所提到的试验均指随机试验。

1.1.1.3 样本空间

由于随机试验具有可观察性，因此，虽然事先不能确定试验将会出现哪一个结果，但试验的所有可能的基本结果所构成的集合却是已知的。

定义 将随机试验 E 的每个可能的基本结果称为一个样本点 (sampling point)，全体样本点组成的集合称为 E 的样本空间 (sampling space)，记为 $\Omega = \{\omega\}$ ，其中 ω 表示试验的样本点。

【例 1.1】 设 E_1 ：向上抛掷一枚硬币，观察其落地后正面朝上还是反面朝上，则 $\Omega_1 = \{\text{正面}, \text{反面}\}$ 。

E_2 ：将一枚硬币连续向上抛掷两次，依次观察其落地后正面朝上还是反面朝上，则 $\Omega_2 = \{\text{正正}, \text{正反}, \text{反正}, \text{反反}\}$ 。

E_3 ：将一枚硬币连续向上抛掷两次，观察其反面朝上的次数，则 $\Omega_3 = \{0, 1, 2\}$ 。

E_4 ：记录某市火车站售票处一天内售出的车票数，则 $\Omega_4 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。

E_5 ：在某型号电脑中任取一台检测其使用寿命，则 $\Omega_5 = \{t | t \geq 0\}$ 。

写出试验的样本空间，是描述随机现象的基础。值得注意的是：即使是相同的试验，由于研究目的不同，其样本空间也可能不同，如 Ω_2 和 Ω_3 。也就是说，样本空间的样本点取决于随机试验和其研究目的。

1.1.1.4 随机事件

定义 随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件 (random event)，简称事件 (event)。常用大写英文字母 A, B, C 等表示事件。

◆ 随机现象中的某些基本结果组成的集合就是随机事件。

◆ 任何一个样本点 ω 构成的单点集 $\{\omega\}$ 也都是随机事件，称为基本事件 (basic events)。

◆ 任何事件都可看成是由基本事件复合而成。

◆ 样本空间 Ω ，称为**必然事件** (certain event)。因为 Ω 本身也是 Ω 的一个子集，故也是事件，在每次试验中必然会出现 Ω 中的某一样本点，所以在任何一次试验中 Ω 必然会发生，故称其为必然事件。

◆ 空集 \emptyset ，称为**不可能事件** (impossible event)。空集 \emptyset 也是 Ω 的子集，故也是事件。因为空集不包含任何样本点，在任何一次试验中 \emptyset 都不可能发生，所以称其为不可能事件。

◆ 在一次随机试验中，事件 A 发生，是指当且仅当 A 所包含的某一样本点出现。

1.1.2 随机事件间的关系与运算

因为样本空间 Ω 是全体样本点所组成的集合，随机事件是 Ω 的子集，所以事件间的关系和运算也可按集合间的关系和运算来处理。为了简化以后的概率计算，下面的讨论总是假定在同一个样本空间 Ω (即同一个随机现象) 中进行，下面来了解事件间关系和运算所代表的概率意义。

1.1.2.1 包含关系

定义 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含 (inclusion relation) 事件 A ，或事件 A 包含于事件 B ，记为 $B \supseteq A$ 或 $A \subseteq B$ ，如图 1.1 所示。

◆ $A \subseteq B$ ，也就是事件 A 中的每一个样本点都是事件 B 的样本点。

◆ 对于任意事件 A ，必有 $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ 。

1.1.2.2 相等关系

定义 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，同时事件 B 发生必然导致事件 A 发生，则称事件 A 与 B 相等 (equivalent relation)，记为 $A=B$ 。

◆ $A=B$ ，也就是事件 A 中的样本点与事件 B 的样本点完全相同，即 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 同时成立。

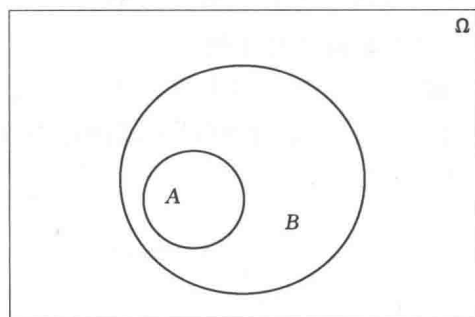


图 1.1 包含关系 ($A \subseteq B$) 维恩 (Venn) 图

1.1.2.3 互不相容 (互斥) 事件

定义 若事件 A 与 B 不可能同时发生时，则称事件 A 与事件 B 互不相容 (或互斥) (incompatible events)。

◆ 事件 A 与事件 B 互斥，即 $A \cap B = \emptyset$ ，事件 A 与 B 没有相同的样本点，如图 1.2 所示。

◆ 任意两个不同的基本事件是互不相容的。

◆ 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ，满足当 $i \neq j (i, j = 1, 2, \dots)$ 时， $A_i A_j = \emptyset$ ，即事件组中任意两个不同事件都互不相容，则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互不相容。

1.1.2.4 事件的并 (和)

定义 “事件 A 与 B 中至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的并 (或和) (union of events)，记为 $A \cup B$ ，如图 1.3 所示。

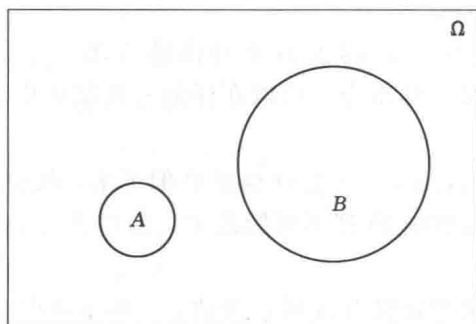


图 1.2 互斥关系 ($A \cap B = \emptyset$) 维恩 (Venn) 图

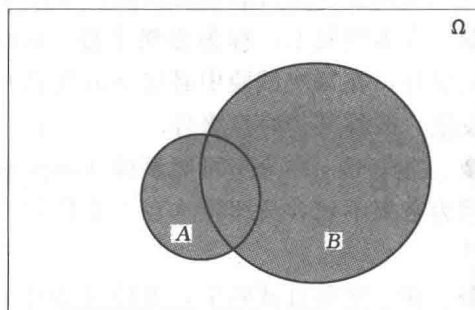


图 1.3 并运算 ($A \cup B$) 维恩 (Venn) 图

◆ $A \cup B$ 就是由事件 A 和 B 的所有样本点 (相同的只计入一次) 所组成的新事件, 即 $A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}$.

◆ “事件 A_1, A_2, \dots, A_n 中至少有一个发生”这一事件称为事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的并 (和), 记为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, 也可简记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

◆ “可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的可列并 (和), 记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

1.1.2.5 事件的交 (积)

定义 “事件 A 与 B 同时发生”, 这一事件称为事件 A 与事件 B 的交 (或积) (product of events), 记为 $A \cap B$, 或简记为 AB , 如图 1.4 所示.

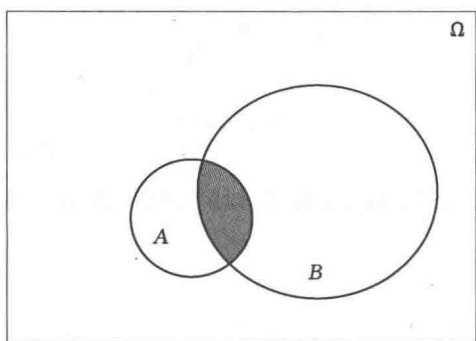


图 1.4 交运算 ($A \cap B$) 维恩 (Venn) 图

◆ $A \cap B$ 就是由事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件, 这与集合的交集定义完全相同, 即 $A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$.

◆ “事件 A_1, A_2, \dots, A_n 同时发生”这一事件称为事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的交 (积), 记为 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, 或 $A_1 A_2 \dots A_n$, 也可简记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

◆ “可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的可列交 (积), 记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

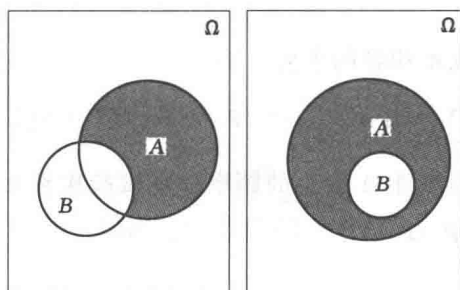
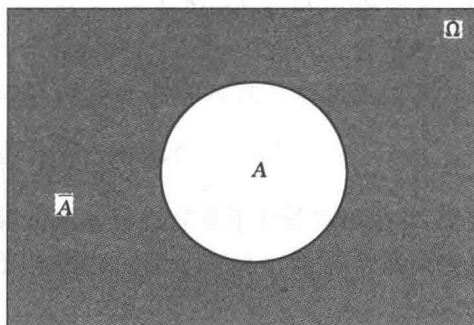
1.1.2.6 差事件

定义 “事件 A 发生但 B 不发生”, 这一事件称为事件 A 与事件 B 的差事件 (difference of events), 记为 $A - B$, 如图 1.5 所示.

◆ $A - B$ 就是由事件 A 中不属于 B 的样本点组成的新事件, 即

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$$

例如, 掷一枚骰子, $A = \{\text{出现偶数点}\}$, $B = \{\text{出现点数不超过 4}\}$, 则 $A - B = \{6\}$.

图 1.5 差运算 $(A - B)$ 维恩 (Venn) 图图 1.6 对立事件 (\bar{A}) 维恩 (Venn) 图

1.1.2.7 对立事件

定义 “事件 A 不发生” 这一事件称为事件 A 的对立事件 (opposite events), 记为 \bar{A} , 如图 1.6 所示.

◆ \bar{A} 就是由所有 Ω 中不属于事件 A 的样本点组成的新事件.

对立事件也可采用如下定义: 若事件 A 与 B 满足

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega$$

则称事件 A 与事件 B 互为对立事件, 记为 $\bar{A} = B, \bar{B} = A$.

◆ $\bar{\bar{A}} = \Omega - A, \bar{\Omega} = \emptyset, \bar{\emptyset} = \Omega$

◆ $A \cap \bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = \Omega, \bar{\bar{A}} = A$

1.1.2.8 事件的运算律

与集合运算一样, 事件的运算也满足下列运算规律:

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- (4) 对偶律 (De Morgan 公式): $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- (5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B, A \cap B = A$.
- (6) 事件 A 与 B 的差: $A - B = A \cap \bar{B}$

上面的运算律对有限个或可列个事件的情况也同样成立.

1.1.3 随机事件的概率

1.1.3.1 概率的统计定义

在同一个试验中不同随机事件发生的可能性也可能不同. 例如, 在掷骰子的例子中, 显然 “出现 6 点” 发生的可能性小于 “出现偶数点”. 为了度量事件在一次试验中发生的可能性大小, 引入频率, 它描述了事件发生的频繁程度.

定义 在相同条件下重复进行 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 出现的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数, 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率 (frequency), 记为 $f_n(A)$, 即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

频率具有下述基本性质:

- (1) 非负性: $0 \leq f_n(A) \leq 1$
 (2) 规范性: $f_n(\Omega) = 1$
 (3) 有限可加性: 若 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件, 则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n f_n(A_i)$$

定义 在相同条件下重复进行 n 次试验, 若事件 A 发生的频率随着试验次数 n 的增大而稳定到某个常数 p ($0 \leq p \leq 1$), 则称数值 p 为事件 A 的概率 (probability), 记作 $P(A) = p$.

1.1.3.2 概率的公理化定义

根据概率的统计定义, 可以用试验次数很大时的频率来估计事件的概率. 但是, 在现实生活中某些试验由于成本太高或具有破坏性等原因而不能大量重复进行, 这时不能利用频率来估计概率, 加上概率的统计定义只是一个模糊定义, 不能作为严格的数学定义, 因而存在严重的不足.

历史上还出现过概率的古典定义、概率的几何定义和概率的主观定义, 这些定义只能适应某一类随机现象, 因而不能作为概率的一般定义.

人们通过对概率论中的事件与集合及概率与测度之间联系的研究, 再加上十九世纪末以来, 数学的各个分支广泛流行着一股公理化潮流, 即把最基本的事实假定为公理, 其他结论均由公理经过演绎导出. 在这种背景下, 1933年, 苏联数学家柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 提出了概率论公理化定义. 这个定义概括了前人所定义的各种概率的共同特征, 又避免了各自的局限性和含糊不清之处, 使概率论成为一门严谨的数学分支, 对概率论的迅速发展起到了积极的作用. 下面给出建立在严密的逻辑基础上的概率公理化定义.

定义 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间, 对于 E 的每一个事件 A , 将其对应于一个实数 $P(A)$, 如果 $P(A)$ 满足下列三个条件, 则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率 (probability).

- (1) 非负性: 对任意事件 A , 有 $P(A) \geq 0$.
 (2) 规范性: $P(\Omega) = 1$
 (3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是两两互不相容的事件, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

1.1.3.3 概率的性质

利用概率定义三条公理, 可以推出概率的另外一些重要性质.

性质 1 $P(\emptyset) = 0$

性质 2 (有限可加性) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件, 则

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

性质 3 对任何事件 A , 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 4 对任意两个事件 A 和 B 有 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

◆ 若 $A \supseteq B$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$, $P(A) \geq P(B)$.

性质 5 对任意事件 A , 有 $0 \leq P(A) \leq 1$.