

高等数学

练习与测试(上)

南京工业大学应用数学系 ▶ 编

GAODENG SHUXUE LIANXI YU CESHI



苏州大学出版社
Soochow University Press

高等数学练习与测试

(上)

南京工业大学应用数学系 编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学练习与测试. 上/南京工业大学应用数学系编. —苏州:苏州大学出版社, 2014. 8(2015. 1 重印)
ISBN 978-7-5672-1035-6

I. ①高… II. ①南… III. ①高等数学—高等学校—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 182836 号

高等数学练习与测试(上)

南京工业大学应用数学系 编

责任编辑 征 慧

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市十梓街 1 号 邮编:215006)

苏州恒久印务有限公司印装

(地址:苏州市友新路 28 号东侧 邮编:215128)

开本 787×1092 1/16 印张 12.25 字数 307 千

2014 年 8 月第 1 版 2015 年 1 月第 2 次修订印刷

ISBN 978-7-5672-1035-6 定价:23.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-65225020
苏州大学出版社网址 <http://www.sudapress.com>

前 言

要学好高等数学,总离不开解题,学生通过解题能加深对所学课程内容的理解,能熟练掌握运算方法和解题技巧,还能培养分析问题和解决问题的能力.因此,如何帮助学生提高解题能力,是当前高等数学课程教学改革的一项重要任务.

为了帮助学生更好地完成作业,并能比较系统地复习、巩固所学知识,我们组织部分教师针对高等数学课程的特点,编制了这本《高等数学练习与测试(上)》.全书共分六章内容.每节内容包括基础题和提高题,基础题部分绝大多数学生都会做.每章还配备了自我测试题,起到检查督促作用.

考虑到不同专业对高等数学的学习要求不同,以及部分学生将来考研的需要,每章设置了重点与难点分析,随后还配备了一些综合题,供学有余力的学生选做.另外,书中还增加了期中与期末模拟试卷以及近几年的期末真题,便于学生自测.书末还附有参考答案.

本书是在多年使用讲义的基础上修改而成的,是多位教师共同努力的结晶.本书的编写人员有马树建、许丙胜、赵剑、焦军彩、李金凤、张国娟、张小平、左永生等,全书由许丙胜负责统稿.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误和不当之处在所难免,敬请广大读者批评指正.

编写组

2015年1月

目 录

第 1 章 极限与连续

§ 1-1 函 数	1
§ 1-2、§ 1-3 数列的极限 函数的极限	3
§ 1-4 无穷小与无穷大	5
§ 1-5 极限运算法则	6
§ 1-6 极限存在准则 两个重要极限	8
§ 1-7 无穷小的比较	10
§ 1-8 函数的连续性与间断点	13
§ 1-9 连续函数的运算与初等函数的连续性	15
§ 1-10 闭区间上连续函数的性质	18
第 1 章自我测试题	21
第 1 章重点与难点分析	23
参考答案	28

第 2 章 导数与微分

§ 2-1 导数概念	32
§ 2-2 函数求导法则	34
§ 2-3 高阶导数	37
§ 2-4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	38
§ 2-5 函数的微分	40
第 2 章自我测试题	41
第 2 章重点与难点分析	43
参考答案	47

第 3 章 微分中值定理及导数的应用

§ 3-1 微分中值定理	49
§ 3-2 洛必达法则	52
§ 3-3 泰勒公式	54
§ 3-4 函数的单调性与曲线的凹凸性	56
§ 3-5 函数的极值与最值	59
§ 3-6 函数图形的描绘	62
§ 3-7 曲 率	63
第 3 章自我测试题	64

第3章重点与难点分析	66
参考答案	74
期中模拟试卷一	76
期中模拟试卷二	81
期中模拟试卷三	85
参考答案	88
第4章 不定积分	
§4-1 不定积分的概念与性质	90
§4-2 换元积分法	92
§4-3 分部积分法	94
§4-4 有理函数的积分	96
第4章自我测试题	98
第4章重点与难点分析	100
参考答案	106
第5章 定积分	
§5-1 定积分的概念与性质	108
§5-2 微积分基本公式	110
§5-3 定积分的换元积分法和分部积分法	114
§5-4 反常积分	119
第5章自我测试题	120
第5章重点与难点分析	122
参考答案	126
第6章 定积分的应用	
§6-2 定积分在几何学上的应用	128
§6-3 定积分在物理学上的应用	134
第6章自我测试题	137
第6章重点与难点解析	139
参考答案	146
期末模拟试卷一	147
期末模拟试卷二	151
期末模拟试卷三	154
期末模拟试卷四	158
期末模拟试卷五	162
期末真题一	166
期末真题二	170
期末真题三	174
期末真题四	178
参考答案	182

第 1 章 极限与连续

§ 1-1 函 数

基础题

1. 判断下列函数是否为同一函数:

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

2. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 问: $f(x+a) + f(x-a) (a > 0)$ 的定义域是什么?

3. 设 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x (-\pi \leq x \leq \pi)$, 求:

(1) $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$;

(2) $G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$;

(3) $U(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$;

(4) $V(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$.

4. 证明:任意一个定义在关于原点对称的集合 D 上的函数都可以唯一地表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

5. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ($x > 0$), 求 $f(x)$.

§ 1-2、§ 1-3 数列的极限 函数的极限

基础题

1. 用数列极限的定义证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0;$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1.$

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明: 数列 $\{|x_n|\}$ 的极限存在, 但数列 $\{x_n\}$ 的极限却不一定存在.

3. 用函数极限的定义证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12$;

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

4. 求 $f(x) = \frac{x}{x}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并判断它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

§ 1-4 无穷小与无穷大

基础题

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小? 试举例说明.

2. 判断并证明: 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是否无界; 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是否为无穷大.

§ 1-5 极限运算法则

基础题

计算下列极限：

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3}.$

2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$

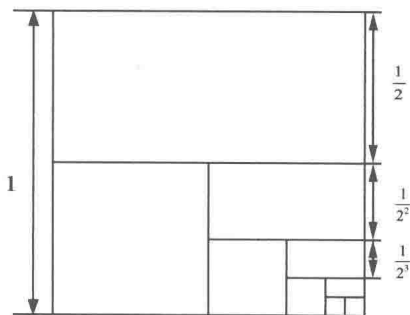
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$

提高题

1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right).$

试用图形化的方法解答该题,如图:



解完该题,你对极限有没有更深刻的理解?

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$.

能否模仿上题使用图形化的方法来求解呢？其结果有没有确定的几何意义？



思考题

你能够解释 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0$ 错误的原因吗？

提示： $\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2$.

§ 1-6 极限存在准则 两个重要极限

基础题

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} \quad (x \text{ 为非零常数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{kx} \quad (k \text{ 为正整数});$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x;$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

2. 利用极限存在准则证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

提高题

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}.$$

2. 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n} (n=1,2,3,\cdots)$. (1) 试证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在; (2) 求此数列的极限.

§ 1-7 无穷小的比较

基础题

1. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin 4x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1};$

(4) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin^2 x - \sin^2 \alpha}{x - \alpha};$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}.$

提高题

1. 试证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 (a > 0)$, 你对该题涉及的两个无穷大量有什么认识? 如果推广到一般的情形, 也即 $\lim_{x \rightarrow M} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow M} \beta(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 你对该表达式有何理解?

2. 试用上题的思想求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n + 2n)}{\ln(2^n + 3n)}$.

3. 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

4. 设 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.