



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

第三版

(下册)

○ 宣立新 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

下册

第三版

宣立新 主 编
成和平 副主编



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,二版为面向 21 世纪课程教材,一版于 2002 年获得教育部颁布的全国普通高等学校优秀教材一等奖。主编宣立新教授是高职高专数学教育的资深专家,长期从事高等数学的教学和科研工作。本书是从当前高职高专教育的实际情况出发,按“必需、够用”和“突出应用”的要求,在二版的基础上修订而成的。

全书分上、下两册出版,上册内容为函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、定积分与不定积分、定积分的应用;下册内容为常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、Mathematica 软件包在高等数学中的应用简介。书末附有基础知识补充、一些常用的中学数学公式、几种常用的曲线、积分表和习题答案。

本书条理清晰,深入浅出,通俗易懂,富于启发,例习题配置恰当,便于教学,可作为高等职业院校、高等专科学校、成人高等学校以及应用型本科院校的工科类专业的数学教材,也可供有关人员自学或参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/宣立新主编. —3 版. —北京:高等教育出版社,2010.4

ISBN 978 - 7 - 04 - 028893 - 3

I. ①高… II. ①宣… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 028791 号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010 - 58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787 × 960 1/16
印 张 12.5
字 数 220 000

购书热线 010 - 58581118
咨询电话 400 - 810 - 0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2001 年 1 月第 1 版
2010 年 4 月第 3 版
印 次 2010 年 4 月第 1 次印刷
定 价 15.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 28893 - 00

目 录

第六章 常微分方程	1
第一节 微分方程的基本概念	1
一、实例	1
二、有关概念	2
习题 6-1	4
第二节 一阶微分方程	4
一、可分离变量的一阶微分方程	4
二、一阶线性微分方程	8
习题 6-2	12
第三节 可降阶的高阶微分方程	13
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	13
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	13
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	14
习题 6-3	16
第四节 二阶线性微分方程解的结构	16
一、二阶线性齐次微分方程解的结构	16
二、二阶线性非齐次微分方程解的结构	17
习题 6-4	18
第五节 二阶常系数线性微分方程	18
一、二阶常系数线性齐次微分方程的解法	18
二、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法	20
习题 6-5	25
第七章 向量代数与空间解析几何	26
第一节 空间直角坐标系和向量的基本知识	26
一、空间直角坐标系	26
二、空间两点间的距离公式	27
三、向量的基础知识	28
四、向量的坐标	29
习题 7-1	31
第二节 向量的数量积与向量积	32

一、向量的数量积	32
二、向量的向量积	34
习题 7-2	36
第三节 平面、空间直线的方程	36
一、平面的方程	36
二、空间直线的方程	40
习题 7-3	41
第四节 曲面、空间曲线的方程	42
一、曲面及其方程	42
二、空间曲线及其方程	45
三、空间曲线在坐标面上的投影	47
四、常见的二次曲面及其方程	48
习题 7-4	51
第八章 多元函数微积分	52
第一节 多元函数的基本概念、极限和连续性	52
一、多元函数的概念	52
二、多元函数的极限	55
三、多元函数的连续性	57
习题 8-1	57
第二节 偏导数	58
一、偏导数的概念及其计算	58
二、高阶偏导数	60
习题 8-2	62
第三节 全微分	62
习题 8-3	64
第四节 多元复合函数与隐函数的微分法	64
一、多元复合函数的求导法则	64
二、隐函数的求导公式	66
习题 8-4	67
第五节 偏导数的几何应用	67
一、曲线的切线和法平面	67
二、曲面的切平面与法线	69
习题 8-5	70
第六节 多元函数的极值和最值	71
一、多元函数的极值	71

二、多元函数的最值	73
三、条件极值	74
习题 8-6	76
第七节 二重积分的概念与性质	76
一、平面薄板的质量	76
二、二重积分的概念	77
三、二重积分的性质	78
四、二重积分的几何意义	78
第八节 二重积分的计算	79
一、二重积分在直角坐标系下的计算	79
二、二重积分在极坐标系下的计算	83
习题 8-8	85
第九节 二重积分的应用	86
一、二重积分在几何上的应用	86
二、二重积分在物理上的应用	88
习题 8-9	91
第九章 无穷级数	93
第一节 数项级数	93
一、数项级数的基本概念	93
二、数项级数的基本性质	95
习题 9-1	97
第二节 数项级数的审敛法	97
一、正项级数及其审敛法	97
二、交错级数及其审敛法	102
三、绝对收敛与条件收敛	104
习题 9-2	105
第三节 幂级数	106
一、函数项级数的概念	106
二、幂级数及其收敛性	107
三、幂级数的运算与和函数的性质	109
习题 9-3	110
第四节 函数展开成幂级数	110
一、泰勒公式与泰勒级数	110
二、函数展开成幂级数的方法	113
习题 9-4	118

* 第五节 以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数	118
一、三角函数系的正交性	119
二、周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数	121
三、定义在区间 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, \pi]$ 上的函数展开成傅里叶级数	126
习题 9-5	128
* 第六节 以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里叶级数	128
习题 9-6	131
* 第十章 Mathematica 软件包在高等数学中的应用	133
第一节 Mathematica 的基本知识	133
一、Mathematica 的基本操作	133
二、Mathematica 使用初步	135
第二节 用 Mathematica 求极限与函数的连续性判别	140
一、极限运算	140
二、函数连续性的判别	142
习题 10-2	143
第三节 用 Mathematica 求导数与微分	143
一、导数运算	144
二、微分运算	146
三、隐函数的导数	146
习题 10-3	147
第四节 导数的应用	148
一、求函数的单调区间和极值	148
二、求曲线的凹凸区间和拐点	150
三、作函数的图像	151
习题 10-4	151
第五节 用 Mathematica 求定积分与不定积分及应用	152
一、不定积分的计算	152
二、定积分的计算	153
三、定积分的几何应用	155
习题 10-5	157
第六节 用 Mathematica 求解常微分方程	158
习题 10-6	162
第七节 Mathematica 在向量代数与空间解析几何中的应用	162
一、向量的运算	162
二、三维图形的绘制	163

习题 10-7	168
第八节 Mathematica 在多元函数微积分中的应用	168
一、二元函数的极限	168
二、多元函数微分及应用	168
三、二重积分	174
习题 10-8	176
第九节 Mathematica 在级数运算中的应用	176
一、求和	176
二、比值审敛法及应用	177
三、幂级数	178
习题 10-9	180
习题答案	181
参考书目	191

第六章 常微分方程

在科学研究和生产实践中,常常需要寻求表示客观事物的变量之间的函数关系,但经常不能直接得到所求的函数关系,只能得到含有未知函数的导数或微分的关系式,即通常所说的微分方程.因此微分方程是描述客观事物数量关系的一种重要的数学模型.本章主要介绍微分方程的基本概念和几种常用的微分方程的解法.第十章第六节介绍数学软件包在常微分方程中的应用.

第一节 微分方程的基本概念

一、实例

例 1 一曲线过点 $(0,1)$,曲线上各点处的切线斜率等于该点横坐标的平方,求此曲线方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=f(x)$, $M(x,y)$ 为曲线上的任意一点,曲线在该点处的切线的斜率为 y' ,依题意有

$$y' = x^2, \quad (1)$$

两边积分,得

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \text{ 为任意常数}). \quad (2)$$

上式表示的是曲线上任意一点处的切线的斜率为 x^2 的所有曲线.但本题要求的是过点 $(0,1)$ 的曲线,即

$$x=0 \text{ 时}, y=1, \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式,得 $C=1$,所以

$$y = \frac{1}{3}x^3 + 1 \quad (4)$$

为所求的曲线方程.

例 2 以初速度 v_0 垂直下抛一物体,设该物体运动只受重力影响,试求物体下落距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 如图 6-1,设物体的质量为 m ,由于下抛后只受重力作用,故物体所受之力为

$$F = mg,$$

又根据牛顿第二定律 $F=ma$ 及加速度 $a=\frac{d^2s}{dt^2}$, 所以

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg,$$

即

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

对(5)式两端积分得

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1,$$

对(6)式两端再积分, 得

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2,$$

这里 C_1, C_2 都是任意常数.

由题意知 $t=0$ 时,

$$s=0, v=\frac{ds}{dt}=v_0. \quad (8)$$

把(8)式分别代入(6)式, (7)式, 得 $C_1=v_0, C_2=0$. 故(7)式为

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t. \quad (9)$$

这就是初速度为 v_0 的物体垂直下抛时距离 s 与时间 t 之间的函数关系.

二、有关概念

定义 1 凡含有未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程.

由定义 1 可知, (1)式和(5)式都是微分方程, 此外

$$y' + xy^2 = 0, xdy + ydx = 0, y'' + 2y' + y = 3x^2 + 1$$

等也都是微分方程.

未知函数为一元函数的微分方程称为常微分方程. 本书只讨论一些常微分方程及其解法.

微分方程中出现的未知函数各阶导数的最高阶数称为微分方程的阶. 如 $y' = x^2, y' + xy^2 = 0, xdy + ydx = 0$ 都是一阶微分方程; $\frac{d^2s}{dt^2} = g, y'' + 2y' + y = 3x^2 + 1$ 都是二阶微分方程; $y^{(4)} + 4y' + 4y = xe^x$ 是四阶微分方程, 等等. 二阶及二阶以上的微分方程称为高阶微分方程.

定义 2 如果某个函数代入微分方程, 能使该方程成为恒等式, 则称这个函数为该微分方程的解.

例如, (2)式和(4)式表示的函数都是方程(1)的解, (7)式和(9)式表示的

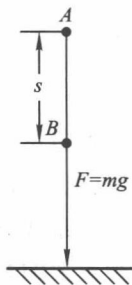


图 6-1

函数都是方程(5)的解.

在介绍微分方程的通解前,先给出独立的任意常数的概念.含有几个任意常数的表达式,如果它们不能合并而使得任意常数的个数减少,则称这表达式中的几个任意常数相互独立.如 $y=C_1x+C_2x+1$ 与 $y=Cx+1$ (C_1, C_2, C 都是任意常数)表示的函数族是相同的,因此 $y=C_1x+C_2x+1$ 中的 C_1, C_2 是不独立的;而(7)式 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 中的任意常数 C_1, C_2 是不能合并的,即 C_1, C_2 是相互独立的.

如果微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,则称这样的解为微分方程的通解或一般解.由于方程(5)是二阶的,且(7)式中有两个独立的任意常数,因此(7)式是方程(5)的通解.同理(2)式是方程(1)的通解.

由于通解中含有任意常数,它还不完全确定.要完全确定地反映客观事物的规律,必须根据具体问题给定的条件,从通解中确定任意常数的值,得到微分方程的不含任意常数的解.这种不含任意常数的解称为微分方程的特解.如(4)式是方程(1)的特解,(9)式是方程(5)的特解.

用来确定特解的条件称为定解条件,其中由未知函数或其导数取给定值的条件又称为初值条件.如(3)式,(8)式分别为方程(1)和方程(5)的初值条件.本章讨论的一阶微分方程 $y'=f(x, y)$ ($f(x, y)$ 表示 x, y 的关系式),它的定解条件通常是 $x=x_0$ 时, $y=y_0$, 或写成 $y \Big|_{x=x_0} = y_0$; 二阶微分方程 $y''=f(x, y, y')$ 的定解条件通常是 $x=x_0$ 时, $y=y_0, y'=y'_0$, 或写成 $y \Big|_{x=x_0} = y_0, y' \Big|_{x=x_0} = y'_0$.

微分方程特解的图形是一条曲线,称为微分方程的积分曲线.通解的图形是一族积分曲线.

如例1中(2)式的图形是以常数 C 为参数的立方抛物线族,而特解(4)式的图形是其中过点 $(0, 1)$ 的一条立方抛物线.如图6-2所示.

例3 验证 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

解 因为

$$y'=C_1\cos x-C_2\sin x,$$

$$y''=-C_1\sin x-C_2\cos x,$$

把 y 和 y'' 代入微分方程左端,得

$$y''+y=-C_1\sin x-C_2\cos x+C_1\sin x+C_2\cos x\equiv 0.$$

又 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 中有两个独立的任意常数,方程 $y''+y=0$ 是二阶的,所以 y

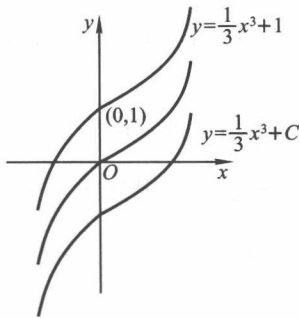


图 6-2

$= C_1 \sin x + C_2 \cos x$ 是该微分方程的通解.

习 题 6-1

1. 指出下列各微分方程的阶数:

(1) $x^2 dx + y dy = 0$;

(2) $(y')^2 + y = 0$;

(3) $xy''' - y' + x = 0$;

(4) $L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{t} = 0$;

(5) $y''y' + x^2 y' + y = 1$.

2. 验证下列各题中所给的函数或隐函数是否为所给微分方程的解? 若是, 指出是通解还是特解? 其中 C_1, C_2 均为任意常数:

(1) $y = e^{-3x} + \frac{1}{3}$, $\frac{dy}{dx} + 3y = 1$;

(2) $y = e^x + e^{-x}$, $y'' - 2y' + y = 0$;

(3) $x^2 - xy + y^2 = 0$, $(x - 2y)y' = 2x - y$;

(4) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{-2x}$, $y'' + 3y' + 2y = xe^{-2x}$.

3. 验证函数 $y = Ce^{-x} + x - 1$ 是微分方程 $y' + y = x$ 的通解, 并求满足初值条件 $y \Big|_{x=0} = 2$ 的特解.

4. 验证 $e^y + C_1 = (x + C_2)^2$ 是微分方程 $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ 的通解, 并求满足初值条件 $y \Big|_{x=0} = 0$, $y' \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解.

第二节 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$y' = F(x, y). \quad (1)$$

下面介绍几种常用的一阶微分方程的基本类型及其解法.

一、可分离变量的一阶微分方程

如果一阶微分方程(1)式可以化为

$$g(y) dy = f(x) dx \quad (2)$$

的形式, 则称(1)式为可分离变量的微分方程.

这类方程的特点是: 方程经过适当变形, 可以将含有同一变量的函数与微分分离到等式的同一端. 这类方程的具体解法为

(1) 分离变量, 将方程变形成(2)式的形式;

(2) 方程两边分别对各自的变量积分

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx,$$

得方程的通解

$$G(y) = F(x) + C,$$

其中 $G(y)$, $F(x)$ 分别是 $g(y)$, $f(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数.

例 1 求微分方程 $y' - e^y \sin x = 0$ 的通解.

解 将方程分离变量, 得

$$e^{-y} dy = \sin x dx,$$

两边积分

$$\int e^{-y} dy = \int \sin x dx,$$

得方程的通解

$$\cos x - e^{-y} = C.$$

这个通解是以隐函数形式给出的, 也可以显化为

$$y = -\ln(\cos x - C).$$

例 2 求微分方程 $xydy + dx = y^2 dx + ydy$ 的通解.

解 将方程分离变量, 有

$$\frac{y}{y^2-1} dy = \frac{1}{x-1} dx,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2} \ln|y^2-1| = \ln|x-1| + C_1,$$

$$|y^2-1| = (x-1)^2 e^{2C_1},$$

$$y^2-1 = \pm e^{2C_1} (x-1)^2.$$

因为 $\pm e^{2C_1}$ 是不为零的任意常数, 把它记作 C , 便得到方程的通解

$$y^2-1 = C(x-1)^2. \quad (3)$$

可以验证 $C=0$ 时, $y=\pm 1$, 它们也是原方程的解, 因此 (3) 式中的 C 可设为任意常数.

解方程中, 如果积分后出现对数, 理应都需作类似上述的讨论. 为方便起见,

例 2 可作如下简化处理:

分离变量后得

$$\frac{y dy}{y^2-1} = \frac{dx}{x-1},$$

两边积分得

$$\ln(y^2-1) = \ln(x-1)^2 + \ln C,$$

故通解为

$$y^2 - 1 = C(x-1)^2,$$

其中 C 为任意常数.

例 3 求微分方程 $(1+e^x)yy' = e^x$ 满足初值条件 $y \Big|_{x=0} = 1$ 的特解.

解 方程变形后分离变量得

$$ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx,$$

两边积分得方程通解

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln(1+e^x) + C.$$

由初值条件 $y \Big|_{x=0} = 1$, 得

$$C = \frac{1}{2} - \ln 2,$$

故所求特解为

$$y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln 2.$$

有的微分方程不是可分离变量的, 但通过适当的变量代换, 使新变量的方程是可分离变量的微分方程, 然后再用以上的方法求解这些方程.

下面介绍一种可化为可分离变量的一阶微分方程.

形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4)$$

的一阶微分方程称为齐次微分方程. 引进新的未知函数 u , 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

代入方程(4), 得

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u),$$

分离变量, 得

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{1}{x}dx,$$

两端分别积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u , 便得到方程(4)的通解.

例 4 求微分方程 $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ 的通解.

解 将方程变形为齐次方程的形式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right),$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则方程化为

$$u + x \frac{du}{dx} = u(1 + \ln u),$$

分离变量后, 得

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{1}{x} dx,$$

两边积分, 得

$$\ln \ln u = \ln x + \ln C,$$

即

$$\ln u = Cx, \quad u = e^{Cx}.$$

以 $u = \frac{y}{x}$ 代回, 得通解

$$y = x e^{Cx}.$$

例 5 (马尔萨斯 (Malthus) 模型) 英国著名经济学家和人口统计学家马尔萨斯 (1766—1843) 根据一百多年的人口统计资料在 1798 年提出著名的人口指数模型. 人口变化是离散的, 但当人口数量庞大时, 增加一个或几个所引起的变化与人口总量相比是甚微的. 因此他的基本假设: 人口数量是随时间连续变化的, 人口数量的增长速度与人口数量成正比. 若已知 $t = t_0$ 时, 人口总数为 N_0 , 试确定时间 t 与人口总数 $N(t)$ 之间的函数关系. 根据我国有关人口统计资料: 1990 年我国人口总数为 11.6 亿, 过去八年的人口平均增长率为 14.8‰, 若今后的人口平均增长率不变, 试预测我国 2004 年人口总数.

解 根据题设有

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN, \\ N(t_0) = N_0, \end{cases}$$

其中 r 为比例系数. 这就是马尔萨斯人口模型.

用分离变量法易得

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}.$$

将 $t = 2004$, $t_0 = 1990$, $N(t_0) = N_0 = 11.6$ (亿), $r = 0.0148$ 代入上式, 可以预测出 2004 年我国总人口数为

$$N \Big|_{t=2004} = 11.6 e^{0.0148 \times (2004-1990)} \approx 14.3 \text{ (亿)}.$$

这个模型里除了人口数量之外, 没有考虑其他因素. 实际上, 人口的增长还

受到自然资源和环境条件等诸多因素的制约,因此需要对马尔萨斯人口模型进行修正. 1830 年,比利时数学家维尔豪斯特(Verhulst)给出了著名的 Logistic(逻辑斯蒂)模型的一般形式.

***例 6 (Logistic 模型)** 假设自然资源和环境条件等因素所能容纳的人口最大数量为 M (即最大人口容量为 M). 人口数量的增长速度 $\frac{dN}{dt}$ 不仅与现有人口数 $N(t)$ 成正比,而且还与人口尚未实现部分在最大人口容量中可占比例 $\frac{M-N}{M}$ 成正比. 于是,有

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(\frac{M-N}{M} \right), \\ N(t_0) = N_0, \end{cases}$$

其中 $r > 0$, 为比例常数. 分离变量得其解

$$N(t) = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{N_0} - 1 \right) e^{-r(t-t_0)}}.$$

$N(t)$ 的图形如图 6-3 所示.

在 Logistic 模型中,

$$\frac{M-N}{M} = 1 - \frac{N}{M},$$

体现了对人口增长的阻滞作用,因此该模型又称阻滞增长模型.

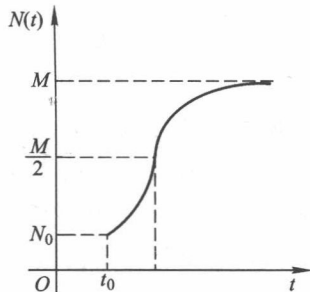


图 6-3

二、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (5)$$

的方程(其中 $P(x), Q(x)$ 是 x 的已知函数), 称为一阶线性微分方程, $Q(x)$ 称为自由项.

如果 $Q(x) \equiv 0$, 方程(5)变为

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0. \quad (6)$$

方程(6)称为一阶线性齐次微分方程; 如果 $Q(x)$ 不恒为零时, 方程(5)称为一阶线性非齐次微分方程, 并称方程(6)为对应于线性非齐次微分方程(5)的线性齐次微分方程.

一阶线性齐次微分方程(6)是可分离变量的方程, 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = -P(x) dx,$$

两边积分得

$$\ln y = - \int P(x) dx + \ln C,$$

故

$$y = Ce^{-\int P(x) dx}. \quad (7)$$

(7) 式是线性齐次微分方程(6)的通解.

为了书写方便,约定以后不定积分符号只表示被积函数的一个原函数,如符号 $\int P(x) dx$ 是 $P(x)$ 的一个原函数.

比较(5),(6)两个方程,可以设想方程(5)的解具有

$$y = C(x)e^{-\int P(x) dx} \quad (8)$$

的形式,其中 $C(x)$ 是待定的函数.

要使(8)式是方程(5)的解,将(8)式代入方程(5),得

$$C'(x)e^{-\int P(x) dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x) dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x) dx} = Q(x),$$

即

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x) dx},$$

两边积分,得

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C.$$

因此,线性非齐次微分方程(5)的通解为

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C \right]. \quad (9)$$

这种把对应的齐次方程通解中的常数 C 变换为待定函数 $C(x)$,然后求得线性非齐次方程的通解(9)的方法,称为常数变易法.

将(9)式改写成两项之和

$$y = Ce^{-\int P(x) dx} + e^{-\int P(x) dx} \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx.$$

不难看出,上式右端第一项是对应的线性齐次方程(6)的通解,第二项是线性非齐次方程(5)的一个特解(在方程(5)的通解(9)中,取 $C=0$,便得到这个特解).由此可见,一阶线性非齐次方程的通解等于对应的线性齐次方程的通解与线性非齐次方程的一个特解之和.

例7 求微分方程 $(\cos x)y' + (\sin x)y = 1$ 的通解.

解法一 原方程即

$$y' + (\tan x)y = \sec x.$$