普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学 第三版

（下册）

○ 宣立新 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

下册

第三版

宣立新　主　编
成和平　副主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，二版为面向21世纪课程教材，一版于2002年获得教育部颁布的全国普通高等学校优秀教材一等奖。主编宣立新教授是高职高专数学教育的资深专家，长期从事高等数学的教学和科研工作。本书是从当前高职高专教育的实际情况出发，按"必需、够用"和"突出应用"的要求，在二版的基础上修订而成的。

全书分上、下两册出版，上册内容为函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理和导数的应用、定积分与不定积分、定积分的应用；下册内容为常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、Mathematica软件包在高等数学中的应用简介。书末附有基础知识补充、一些常用的中学数学公式、几种常用的曲线、积分表和习题答案。

本书条理清晰，深入浅出，通俗易懂，富于启发，例习题配置恰当，便于教学，可作为高等职业院校、高等专科学校、成人高等学校以及应用型本科院校的工科类专业的数学教材，也可供有关人员自学或参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/宣立新主编．—3版．—北京：高等教育出版社，2010.4

ISBN 978-7-04-028893-3

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①宣…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第028791号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2001年1月第1版
开　　本	787×960　1/16		2010年4月第3版
印　　张	12.5	印　　次	2010年4月第1次印刷
字　　数	220 000	定　　价	15.10元

物料号　28893-00

目　录

第六章 常微分方程

在科学研究和生产实践中，常常需要寻求表示客观事物的变量之间的函数关系，但经常不能直接得到所求的函数关系，只能得到含有未知函数的导数或微分的关系式，即通常所说的微分方程. 因此微分方程是描述客观事物数量关系的一种重要的数学模型. 本章主要介绍微分方程的基本概念和几种常用的微分方程的解法. 第十章第六节介绍数学软件包在常微分方程中的应用.

第一节 微分方程的基本概念

一、实例

例 1 一曲线过点(0,1)，曲线上各点处的切线斜率等于该点横坐标的平方，求此曲线方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=f(x)$，$M(x,y)$ 为曲线上的任意一点，曲线在该点处的切线的斜率为 y'，依题意有

$$y'=x^2, \tag{1}$$

两边积分，得

$$y=\frac{1}{3}x^3+C \quad (C\text{ 为任意常数}). \tag{2}$$

上式表示的是曲线上任意一点处的切线的斜率为 x^2 的所有曲线. 但本题要求的是过点(0,1)的曲线，即

$$x=0\text{ 时},y=1, \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式，得 $C=1$，所以

$$y=\frac{1}{3}x^3+1 \tag{4}$$

为所求的曲线方程.

例 2 以初速度 v_0 垂直下抛一物体，设该物体运动只受重力影响，试求物体下落距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 如图 6-1，设物体的质量为 m，由于下抛后只受重力作用，故物体所受之力为

$$F=mg,$$

又根据牛顿第二定律 $F=ma$ 及加速度 $a=\dfrac{d^2s}{dt^2}$,所以

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg,$$

即

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g. \tag{5}$$

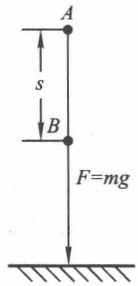

图 6-1

对(5)式两端积分得

$$\frac{ds}{dt}=gt+C_1, \tag{6}$$

对(6)式两端再积分,得

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{7}$$

这里 C_1,C_2 都是任意常数.

由题意知 $t=0$ 时,

$$s=0, v=\frac{ds}{dt}=v_0. \tag{8}$$

把(8)式分别代入(6)式,(7)式,得 $C_1=v_0$,$C_2=0$. 故(7)式为

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t. \tag{9}$$

这就是初速度为 v_0 的物体垂直下抛时距离 s 与时间 t 之间的函数关系.

二、有关概念

定义 1 凡含有未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程。

由定义 1 可知,(1)式和(5)式都是微分方程,此外

$$y'+xy^2=0, x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0, y''+2y'+y=3x^2+1$$

等也都是微分方程.

未知函数为一元函数的微分方程称为常微分方程. 本书只讨论一些常微分方程及其解法.

微分方程中出现的未知函数各阶导数的最高阶数称为微分方程的阶. 如 $y'=x^2$,$y'+xy^2=0$,$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$ 都是一阶微分方程;$\dfrac{d^2s}{dt^2}=g$,$y''+2y'+y=3x^2+1$ 都是二阶微分方程;$y^{(4)}+4y'+4y=xe^x$ 是四阶微分方程,等等. 二阶及二阶以上的微分方程称为高阶微分方程.

定义 2 如果某个函数代入微分方程,能使该方程成为恒等式,则称这个函数为该微分方程的解.

例如,(2)式和(4)式表示的函数都是方程(1)的解,(7)式和(9)式表示的

函数都是方程(5)的解.

在介绍微分方程的通解前,先给出独立的任意常数的概念.含有几个任意常数的表达式,如果它们不能合并而使得任意常数的个数减少,则称这表达式中的几个任意常数相互独立.如 $y=C_1x+C_2x+1$ 与 $y=Cx+1$(C_1,C_2,C 都是任意常数)表示的函数族是相同的,因此 $y=C_1x+C_2x+1$ 中的 C_1,C_2是不独立的;而(7)式$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$中的任意常数 C_1,C_2是不能合并的,即 C_1,C_2是相互独立的.

如果微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,则称这样的解为微分方程的通解或一般解.由于方程(5)是二阶的,且(7)式中有两个独立的任意常数,因此(7)式是方程(5)的通解.同理(2)式是方程(1)的通解.

由于通解中含有任意常数,它还不完全确定.要完全确定地反映客观事物的规律,必须根据具体问题给定的条件,从通解中确定任意常数的值,得到微分方程的不含任意常数的解.这种不含任意常数的解称为微分方程的特解.如(4)式是方程(1)的特解,(9)式是方程(5)的特解.

用来确定特解的条件称为定解条件,其中由未知函数或其导数取给定值的条件又称为初值条件.如(3)式,(8)式分别为方程(1)和方程(5)的初值条件.本章讨论的一阶微分方程 $y'=f(x,y)$($f(x,y)$表示 x,y 的关系式),它的定解条件通常是 $x=x_0$时,$y=y_0$,或写成 $y\big|_{x=x_0}=y_0$;二阶微分方程 $y''=f(x,y,y')$的定解条件通常是 $x=x_0$时,$y=y_0$,$y'=y'_0$,或写成 $y\big|_{x=x_0}=y_0$,$y'\big|_{x=x_0}=y'_0$.

微分方程特解的图形是一条曲线,称为微分方程的积分曲线.通解的图形是一族积分曲线.

如例1中(2)式的图形是以常数 C 为参数的立方抛物线族,而特解(4)式的图形是其中过点(0,1)的一条立方抛物线.如图6-2所示.

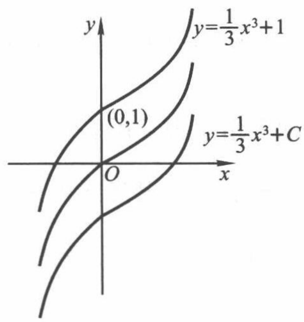

图 6-2

例 3　验证 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

解　因为

$$y'=C_1\cos x-C_2\sin x,$$
$$y''=-C_1\sin x-C_2\cos x,$$

把 y 和 y''代入微分方程左端,得

$$y''+y=-C_1\sin x-C_2\cos x+C_1\sin x+C_2\cos x\equiv 0.$$

又 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 中有两个独立的任意常数,方程 $y''+y=0$ 是二阶的,所以 y

$=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是该微分方程的通解.

习 题 6-1

1. 指出下列各微分方程的阶数：

(1) $x^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$；　　(2) $(y')^2+y=0$；

(3) $xy'''-y'+x=0$；　　(4) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{t}=0$；

(5) $y''y'+x^2y'+y=1$.

2. 验证下列各题中所给的函数或隐函数是否为所给微分方程的解？若是，指出是通解还是特解？其中 C_1,C_2 均为任意常数：

(1) $y=\mathrm{e}^{-3x}+\dfrac{1}{3}$，　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=1$；

(2) $y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$，　$y''-2y'+y=0$；

(3) $x^2-xy+y^2=0$，　$(x-2y)y'=2x-y$；

(4) $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)\mathrm{e}^{-2x}$，　$y''+3y'+2y=x\mathrm{e}^{-2x}$.

3. 验证函数 $y=C\mathrm{e}^{-x}+x-1$ 是微分方程 $y'+y=x$ 的通解，并求满足初值条件 $y\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

4. 验证 $\mathrm{e}^{y}+C_1=(x+C_2)^2$ 是微分方程 $y''+(y')^2=2\mathrm{e}^{-y}$ 的通解，并求满足初值条件 $y\Big|_{x=0}=0$，$y'\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解.

第二节　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$y'=F(x,y). \tag{1}$$

下面介绍几种常用的一阶微分方程的基本类型及其解法.

一、可分离变量的一阶微分方程

如果一阶微分方程(1)式可以化为

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

的形式，则称(1)式为可分离变量的微分方程.

这类方程的特点是：方程经过适当变形，可以将含有同一变量的函数与微分分离到等式的同一端. 这类方程的具体解法为

(1) 分离变量，将方程变形成(2)式的形式；

（2）方程两边分别对各自的变量积分

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y=\int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

得方程的通解

$$G(y)=F(x)+C,$$

其中 $G(y)$，$F(x)$ 分别是 $g(y)$，$f(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数.

例 1　求微分方程 $y'-\mathrm{e}^{y}\sin x=0$ 的通解.

解　将方程分离变量，得

$$\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\sin x\mathrm{d}x,$$

两边积分

$$\int \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int \sin x\mathrm{d}x,$$

得方程的通解

$$\cos x-\mathrm{e}^{-y}=C.$$

这个通解是以隐函数形式给出的，也可以显化为

$$y=-\ln(\cos x-C).$$

例 2　求微分方程 $xy\mathrm{d}y+\mathrm{d}x=y^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$ 的通解.

解　将方程分离变量，有

$$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln|x-1|+C_1,$$

$$|y^2-1|=(x-1)^2\mathrm{e}^{2C_1},$$

$$y^2-1=\pm\mathrm{e}^{2C_1}(x-1)^2.$$

因为 $\pm\mathrm{e}^{2C_1}$ 是不为零的任意常数，把它记作 C，便得到方程的通解

$$y^2-1=C(x-1)^2. \tag{3}$$

可以验证 $C=0$ 时，$y=\pm1$，它们也是原方程的解，因此(3)式中的 C 可设为任意常数.

解方程中，如果积分后出现对数，理应都需作类似上述的讨论. 为方便起见，例 2 可作如下简化处理：

分离变量后得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=\frac{\mathrm{d}x}{x-1},$$

两边积分得

$$\ln(y^2-1)=\ln(x-1)^2+\ln C,$$

故通解为

$$y^2-1=C(x-1)^2,$$

其中 C 为任意常数.

例 3 求微分方程 $(1+e^x)yy'=e^x$ 满足初值条件 $y\Big|_{x=0}=1$ 的特解.

解 方程变形后分离变量得

$$y\mathrm{d}y=\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x,$$

两边积分得方程通解

$$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C.$$

由初值条件 $y\Big|_{x=0}=1$,得

$$C=\frac{1}{2}-\ln 2,$$

故所求特解为

$$y^2=2\ln(1+e^x)+1-2\ln 2.$$

有的微分方程不是可分离变量的,但通过适当的变量代换,使新变量的方程是可分离变量的微分方程,然后再用以上的方法求解这些方程.

下面介绍一种可化为可分离变量的一阶微分方程.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

的一阶微分方程称为齐次微分方程.引进新的未知函数 u,令 $u=\frac{y}{x}$,则

$$y=ux,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入方程(4),得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u),$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两端分别积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u,便得到方程(4)的通解.

例 4 求微分方程 $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$ 的通解.

解 将方程变形为齐次方程的形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right),$$

令 $u=\frac{y}{x}$,则方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(1+\ln u),$$

分离变量后,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分,得

$$\ln\ln u=\ln x+\ln C,$$

即

$$\ln u=Cx,\quad u=\mathrm{e}^{Cx}.$$

以 $u=\frac{y}{x}$ 代回,得通解

$$y=x\mathrm{e}^{Cx}.$$

例 5(马尔萨斯(Malthus)模型)　英国著名经济学家和人口统计学家马尔萨斯(1766—1843)根据一百多年的人口统计资料在 1798 年提出著名的人口指数模型. 人口变化是离散的,但当人口数量庞大时,增加一个或几个所引起的变化与人口总量相比是甚微的. 因此他的基本假设:人口数量是随时间连续变化的,人口数量的增长速度与人口数量成正比。若已知 $t=t_0$ 时,人口总数为 N_0,试确定时间 t 与人口总数 $N(t)$ 之间的函数关系. 根据我国有关人口统计资料:1990 年我国人口总数为 11.6 亿,过去八年的人口平均增长率为 14.8‰,若今后的人口平均增长率不变,试预测我国 2004 年人口总数.

解　根据题设有

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN,\\ N(t_0)=N_0,\end{cases}$$

其中 r 为比例系数. 这就是马尔萨斯人口模型.

用分离变量法易得

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)}.$$

将 $t=2\,004$,$t_0=1\,990$,$N(t_0)=N_0=11.6$(亿),$r=0.014\,8$ 代入上式,可以预测出 2004 年我国总人口数为

$$N\Big|_{t=2\,004}=11.6\mathrm{e}^{0.014\,8\times(2\,004-1\,990)}\approx 14.3(\text{亿}).$$

这个模型里除了人口数量之外,没有考虑其他因素. 实际上,人口的增长还

受到自然资源和环境条件等诸多因素的制约，因此需要对马尔萨斯人口模型进行修正. 1830 年，比利时数学家维尔豪斯特(Verhulst)给出了著名的 Logistic(逻辑斯蒂)模型的一般形式.

*例 6(Logistic 模型) 假设自然资源和环境条件等因素所能容纳的人口最大数量为 M(即最大人口容量为 M). 人口数量的增长速度$\frac{dN}{dt}$不仅与现有人口数 $N(t)$成正比，而且还与人口尚未实现部分在最大人口容量中可占比例$\frac{M-N}{M}$成正比. 于是，有

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=rN\left(\dfrac{M-N}{M}\right),\\ N(t_0)=N_0,\end{cases}$$

其中 $r>0$，为比例常数. 分离变量得其解

$$N(t)=\frac{M}{1+\left(\dfrac{M}{N_0}-1\right)e^{-r(t-t_0)}}.$$

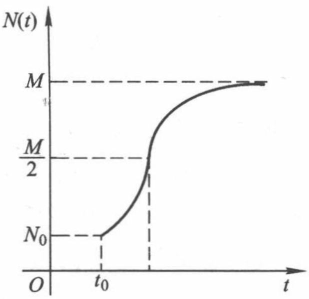

图 6-3

$N(t)$的图形如图 6-3 所示.

在 Logistic 模型中，

$$\frac{M-N}{M}=1-\frac{N}{M},$$

体现了对人口增长的阻滞作用，因此该模型又称阻滞增长模型.

二、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{5}$$

的方程(其中 $P(x)$，$Q(x)$是 x 的已知函数)，称为一阶线性微分方程，$Q(x)$称为自由项.

如果 $Q(x)\equiv 0$，方程(5)变为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0. \tag{6}$$

方程(6)称为一阶线性齐次微分方程；如果 $Q(x)$不恒为零时，方程(5)称为一阶线性非齐次微分方程，并称方程(6)为对应于线性非齐次微分方程(5)的线性齐次微分方程.

一阶线性齐次微分方程(6)是可分离变量的方程，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\,\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\ln y=-\int P(x)\,\mathrm{d}x+\ln C,$$

故

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{7}$$

(7)式是线性齐次微分方程(6)的通解.

为了书写方便,约定以后不定积分符号只表示被积函数的一个原函数,如符号$\int P(x)\,\mathrm{d}x$是$P(x)$的一个原函数.

比较(5),(6)两个方程,可以设想方程(5)的解具有

$$y=C(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{8}$$

的形式,其中$C(x)$是待定的函数.

要使(8)式是方程(5)的解,将(8)式代入方程(5),得

$$C'(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-P(x)\,C(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)\,C(x)\,\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

即

$$C'(x)=Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

两边积分,得

$$C(x)=\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C.$$

因此,线性非齐次微分方程(5)的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]. \tag{9}$$

这种把对应的齐次方程通解中的常数C变换为待定函数$C(x)$,然后求得线性非齐次方程的通解(9)的方法,称为常数变易法.

将(9)式改写成两项之和

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

不难看出,上式右端第一项是对应的线性齐次方程(6)的通解,第二项是线性非齐次方程(5)的一个特解(在方程(5)的通解(9)中,取$C=0$,便得到这个特解).由此可见,一阶线性非齐次方程的通解等于对应的线性齐次方程的通解与线性非齐次方程的一个特解之和.

例 7　求微分方程$(\cos x)y'+(\sin x)y=1$的通解.

解法一　原方程即

$$y'+(\tan x)y=\sec x.$$