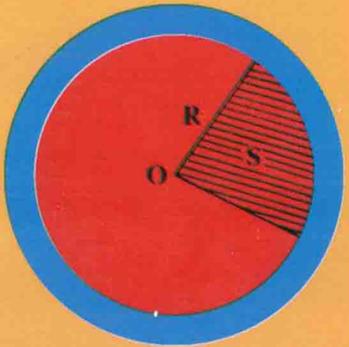
新题型新思路

北京市海淀区
马海波　崔建一
主编

关民乐 等编著



高一数学

海洋出版社

新题型　新思路

高一数学

北京市海淀区　马海波　崔建一　主编

关民乐　等编著

海洋出版社

1998 年·北京

图书在版编目(CIP)数据

新题型新思路:高一数学/关民乐等编著.—北京:
海洋出版社,1998.1
ISBN 7-5027-4355-3

Ⅰ.新… Ⅱ.关… Ⅲ.数学课-高中-习题
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 21723 号

海洋出版社 **出版发行**
(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)
海洋出版社印刷厂印刷　　新华书店发行所经销
1998 年 1 月第 1 版　　1998 年 1 月北京第 1 次印刷
开本:787×1092 1/32 印张:7.25
字数:150 千字 印数:1—5000 册
定价:8.30 元

编写说明

为了帮助学生系统地复习初、高中各年级的各科知识，为了便于教师及家长辅导或指导学生复习，我们根据国家教委颁发的《全日制中学教学大纲》的要求和新教材的内容，组织有丰富教学经验的教师编写了这套《新题型新思路》丛书。本丛书共有二十八个分册(初一至高三年级语文六册、数学六册、英语六册；初二至高三年级物理五册；初三至高三年级化学四册；高中历史一册)。

本丛书系统地介绍了各科基础知识，全面地归纳了各类题型，突出地点明了知识的重点、难点，认真地分析了解题思路，规范地给出了解题格式，科学地配备了相应练习。

本丛书在内容安排上，既照顾了与教材内容同步，又突出了有别于其他丛书的整体特色。基本安排是"基础知识介绍"、"典型试题分析"、"练习题"、"练习题提示及答案"四个部分。这样做的目的是：有利于学生系统地复习各科知识，掌握每一知识点的重点、难点和考点，提高分析问题和解决问题的能力，拓宽解题思路，选择最佳解题方法。

尽管在编写过程中，我们本着对读者负责的态度，进行了层层把关，但书中仍可能存有不足之处，特恳请广大读者批评指正。

本分册是由关民乐、宋秀芬、关键、薛伟、史仲毅、陈刚、张穗强、梁坚老师编写的。

主编者

1997 年 10 月

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

[本章要点]

一、集　　合

(一) 集合

集合是数学中最基本的概念之一，正如几何中的点、直线、平面的概念一样，不能用更简单的概念去定义它，只能给予一种描述，我们把按某种属性确定的一些对象看做一个整体就形成了一个集合。例如，实数的全体构成一个集合，线段上的所有点构成一个集合，集合简称集，一般用大写字母 A、B、C… 表示。

集合里的各个对象叫做这个集合的元素或元。例如，每一个实数是实数集中的一个元素，元素一般用小写字母 a、b、c，… 表示。

1. 有限集：含有有限个元素的集合叫做有限集。

2. 无限集：含有无限个元素的集合叫做无限集。

3. 空集：不含任何元素的集合叫做空集，用符号 ϕ 表示。

（二）集合的数学表示法

1. 列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做列举法。

用列举法表示集合时，不考虑元素的顺序，列出元素要求不遗漏，不增加，不重复，元素与元素之间可用分隔符号“，”隔开，如果某一个集合含有元素的数目较多，且元素之间有明显的规律性，则可用省略号“…”。下面是几个用列举法表示的例子：

$\{c\}$，$\{1,2,3,4,5\}$，$\{(1,2),(-2,3)\}$，$\{(1,2,3)\}$，$\{2,3,5,7,11,\cdots,19\}$ 等。

2. 描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做描述法。

用描述法表示集合时，往往在大括号左端写出元素的一般形式（常用字母 x，y 表示），再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性。下面是几个用描述法表示的例子：

$$\{x \mid 2x^2-3x>2\}=\{x \mid x<-\frac{1}{2}\text{ 或 }x>2\},$$

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2\geqslant 4, x,y\in z\},$$

$$\{x \mid x-3>2\}\cap\{x \mid x-4<2\}=\{x \mid x>5\text{ 且 }x<6\}=\{x \mid 5<x<6\}。$$

用描述法表示集合时，还应注意元素的代号要前后一致，多层描述时各参数应分别说明，要正确使用逻辑关联词“且”“或”等，描述的语句力求简练，层次分明。有时也可以省去竖线及元素的一般形式，如“所有平行四边形”组成的集合

可写成{平行四边形}。

但不要写成{平行四边形集},因为大括号已表示“所有”,表示“集”。根据需要也可用图来表示。

(三)集合的三个特性

一个给定的集合有三个特性:

1. 元素的确定性:任何一个元素都能被确切地判断是集合中的元素或不是集合中的元素,二者必居其一,且只居其一。

2. 元素的互异性:对于一个给定的集合,集合中的元素是互异的。这就是说,集合中的任何两个元素都是不同的元素,相同的元素归入任何一个集合时,只能算作集合中的一个元素。因此集合中的元素不能重复出现。

3. 元素的无序性:用列举法表示集合中的元素与顺序无关。

(四)集合与集合的关系

一些给定的集合,它们之间可以用种种关系,不过,最重要的要算“包含”与“相等”的关系。

1. 子集:对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集。记作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A,$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”。

子集的性质:

(1) 对于任何一个集合是它本身的子集。

(2) 空集 ϕ 是任何一个集合的子集,也是它本身的子集,即 $\phi \subseteq \phi$。

(3) 一个集合有 n 个元素,那么这个集合包含有 2^n 个子

集。

(4) 对于两个集合 A 与B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，那么这两个集合相等，记作 $A = B$。

这就是说，集合 A 中的任何一个元素都是集合B 中的元素；反之，集合 B 中的任何一个元素都是集合A 的元素，因而这两个集合包含的元素完全一样，两个集合就是同一个集合。

(5) 对于集合 A、B、C，如果 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，那么 $A \subseteq C$。

真子集：如果 A 是B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于A，那么集合 A 叫做集合B 的真子集。记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。

说明：

(1) 特定字母和符号的意义

N：表示自然数集(即全体自然数组成的集合)，自然数集也是正整数集。

Z：表示整数集(全体整数组成的集合)，形如 $2n$($n \in z$)的整数叫做偶数，全体偶数叫做偶数集；形如 $2n+1$($n \in z$)的整数叫做奇数，全体奇数称为奇数集。且 N 是Z 的子集。

Q：表示有理数集(全体有理数组成的集合)，N、Z 都是 Q 的子集，根据需要有时还用 Q^+ 表示正有理数集，Q^- 表示负有理数集。

R：表示实数集(全体实数组成的集合)。N、Z、Q 都是R 的子集。实数集与数轴上的点集间建立了一一对应，这两个集合具有类比关系。根据需要有时还用 R^+ 表示正实数集，R^- 表示负实数集。

C：表示复数集(全体复数组成的集合)。N、Z、Q、R 都是

C 的子集。

除上述字母具有特定意义外，还有些具有特定意义的符号。例如

$\in$：表示元素与集合的从属关系，如 $2 \in N$。

$\subseteq$：表示集合间的包含关系。例如，若对任何一个 $x \in A$，都有 $x \in B$，则有 $A \subseteq B$。

$=$：等集符号，表示它的两端的两个集合的元素彼此相同，如 $\{2n+1, n \in z\} = \{4k \pm 1, k \in z\}$。

ϕ：表示空集。

$\cap$：表示集合与集合之间取交的运算关系，如 $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$。

$\cup$：表示集合与集合之间取并的运算关系。如 $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$。

$-$：表示在全集给定的条件下，对横线下面的集合取补的运算。如设 $I = R, A = \{x \mid 3x^2 - 5x - 2 < 0\}$，则 $\overline{A} = \{x \mid 3x^2 - 5x - 2 \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant -\frac{1}{3}$ 或 $x \geqslant 2\}$。

今后在学习过程中还会出现新的各种特定意义的字母和符号，为此，必须识别这些字母和符号，并加深理解，准确使用。

(2) 正确理解元素与集合的关系：对于给定的集合，它和元素之间的关系是整体和个别关系。即集合包含它每一个元素，每一个元素也都包含在集合中，所以元素和集合的关系是从属关系。而集合与集合的关系是包含或相等的关系。

2. 交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成

的集合，叫做A、B的交集，记作$A\cap B$，即$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且$x\in B\}$(见图1-1)。

交集的性质:

(1) $A\cap A=A$;

(2) $A\cap\phi=\phi$;

(3) $A\cap B=B\cap A$(交换律)。

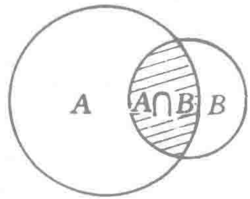


图1-1

3. 并集:由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做集合A与集合B的并集，记作$A\cup B$(见图1-2)，即

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或$x\in B\}$。

图1-2

并集的性质

(1) $A\cup A=A$;

(2) $A\cup\phi=A$;

(3) $A\cup B=B\cup A$(交换律)。

4. 全集与补集

(1) 全集:在研究集合与集合之间的关系时，这些集合都是某一给定的集合的子集，这个给定的集合叫做全集，用符号I表示。而全集含有所要研究的各个集合的全部元素。

(2) 补集:已知全集为I，集合$A\subseteq I$，在I中有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集。记作$\bar{A}$，即

$$\bar{A}=\{x\mid x\in I\ 且\ x\notin A\}$$

图1-3中的大圆内表示全集I，小圆内表示集合A，阴影

部分表示集合 A 在集合 I 中的补集 $\bar{A}$。

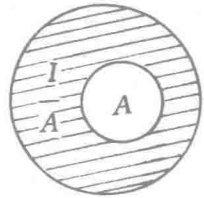


图1－3

补集的性质:

① $\bar{\bar{A}} = A$;

② $A \cap \bar{A} = \phi$;

③ $A \cup \bar{A} = I$;

④ $\bar{\phi} = I$;

⑤ $\bar{I} = \phi$。

例1 设 $I = \{x \mid x \in N, 且 x \leqslant 10\}$, $A = \{1,2,4,5,9\}$, $B = \{4,6,7,8,10\}$, $C = \{3,5,7\}$。

求: $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $(A \cap B) \cap C$, $(\overline{A \cup B}) \cup \bar{C}$。

解: $I = \{x \mid x \in N, 且 x \leqslant 10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$。

$\therefore \bar{A} = \{3,6,7,8,10\}$, $\bar{B} = \{1,2,3,5,9\}$

$\therefore A \cap B = \{4\}$,

$A \cup B = \{1,2,4,5,6,7,8,9,10\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{3\}$,

$(A \cap B) \cap C = \phi$,

$(\overline{A \cup B}) \cup \bar{C} = \{3\} \cup \{1,2,4,6,8,9,10\}$

$= \{1,2,3,4,6,8,9,10\}$

说明:在求集合的交集、并集和补集时,所得的结果要注意元素不重复,不要增加,不要遗漏。

例2 设集合 $A = \{|a+1|, 3, 5\}$, $B = \{2a+1, a^2+2a, a^2+2a-1\}$, 当 $A \cap B = \{2,3\}$ 时,求 $A \cup B$。

[分析] 由集合 A 和集合 B 的公有元素组成的集合称为

集合A 和B 的交集，由题设知 $A \cap B = \{2,3\}$，即集合 A 和 B 都包含有 2 和 3 的元素，于是得下列解法。

解：$\because A = \{|a+1|,3,5\}$，又 $A \cap B = \{2,3\}$，

$\therefore |a+1| = 2$，$\therefore a+1 = \pm 2$，$\therefore a = 1$ 或 $a = -3$

当 $a = 1$ 时，集合 B 的元素有 $2a+1 = 3$，$a^2+2a = 3$，$a^2+2a-1 = 2$，那么 $a^2+2a = 2a+1$，根据集合中元素的互异性，$\therefore a \neq 1$。

当 $a = -3$ 时，那么集合 $B = \{-5,2,3\}$。

$\therefore A \cup B = \{2,3,5\} \cup \{-5,2,3\} = \{-5,2,3,5\}$

例 3　集合 $M = \{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in z\}$，$N = \{x \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in z\}$，则(　　　)(1993 年全国高考试题)

(A) $M = N$　　(B) $M \supset N$　　(C) $M \subset N$　　(D) $M \cap N = \phi$

[分析] 分别令 $k = \cdots -1,0,1,2,3,\cdots$ 得

$M = \{\cdots -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \cdots\}$，

$N = \{\cdots \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \cdots\}$

不难看出，$M \subset N$，因此选(C) 正确。

例 4　已知 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$，$C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$，且 $A \cap B \neq \phi$，$A \cap C = \phi$，求 a 的值。

[分析]：$\because A \cap B \neq \phi$，即要求两个集合 A 和B 必有公有元素，而 $A \cap C = \phi$，即在集合 A 和C 中没有公有元素，于是得解法。

解：$\because B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2,3\}$，

$$C=\{x \mid x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$$

由于$A\cap B\neq\phi, A=\{x \mid x^2-ax+a^2-19=0\}$,

当$x=2$时,则$4-2a+a^2-19=0$,解之,得$a=5$或$a=-3$;

当$x=3$时,则$9-3a+a^2-19=0$,解之,得$a=5$或$a=-2$。

要使$A\cap B\neq\phi$,则$a=5, a=-2, a=-3$。

但$A\cap C\neq\phi$,且$C=\{-4,2\}$,

当$a=5$时,则$A=\{2,3\}$,此时$A\cap C=\{2\}$,

$\therefore a\neq5$

当$a=-3$时,则$A=\{2,-5\}$,此时$A\cap C=\{2\}$,

$\therefore a\neq-3$

由此可知,要使$A\cap B\neq\phi$,且$A\cap C=\phi$,所求a的值为-2。

二、映射与函数

(一)映射概念

设A、B是两个集合,如果按照某种对应法则f,对于集合A中的每一个元素,在集合B中都有唯一的元素和它对应,这样的对应叫做从集合A到集合B的映射。记作$f:A\longrightarrow B$。

A中的元素叫做该映射的原象,B中与之相对应的元素叫象。

关于映射的定义说明下列几点:

1. 集合A中的任何一个元素都无例外地要有B中的元

素与之相对应，即 A 中的任何一个元素都要有象。

2. 要求集合 A 中的元素的象是唯一的。

3. 集合 A 中的不同元素可以在集合 B 中有相同的一个象，即它们的对应是“一对一”，也可以是“多对一”，但不能“一对多”。

4. 并不要求集合 B 中的所有元素都有原象。

（二）函数的定义

如果在某变化过程中有两个变量 x，y，并且对于 x 在某范围内的一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一的值和它对应，那么变量 y 就叫做变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$。

x 叫自变量，自变量 x 的取值范围叫做函数的定义域，和 x 值对应的 y 值叫做函数值，全体函数值的集合叫做函数的值域。

函数是中学数学的重要内容之一，函数知识在初等数学和高等数学中有很强的衔接性，在学习中应充分重视。必须明确下列几点：

1. 函数 $y = f(x)$ 是一类特殊的映射，$f:X \longrightarrow Y$，其中 X，Y 是非空数集，且 Y 中每一个元素在 X 中都有原象。此时 X 是定义域，Y 是值域。

2. x 在定义域 X 内一个确定的值 a 时，函数的对应值记作 $f(a)$。其次要说明，$f(a)$ 的涵义与 $f(x)$ 不同，$f(a)$ 表示自变量 $x = a$ 时所得的函数值，它是一个常量；而 $f(x)$ 是 x 的函数，在通常的情况下，它是一个变量。

3. 在同时研究的两个或多个函数时，要用不同的符号来表示，除用 $f(x)$ 表示外还常用 $F(x)$、$G(x)$、$H(x)$ 等符号来表示函数。这些函数的自变量相同都是 x，而函数的对应法

则或者说函数的结构形式为不同的函数式。

而 $f(x)$ 与 $f(t)$ 表示自变量不同而函数的对应法则或结构形式相同的两个函数，一般这两个函数的定义域相同。

4. 复合函数的意义：如果 y 是 u 的函数，而 u 是 x 的函数，即 $y = f(u), u = g(x)$，那么 g 关于 x 的函数 $y = f[g(x)]$，叫做函数 f 和 g 的复合函数。例如 $y = \log_3(4x^2 - 3x - 1)$，可以看成作对数函数 $y = \log_3 u$ 与二次函数 $u = 4x^2 - 3x - 1$ 复合而成的复合函数。

5. 函数的定义域，值域和对应法则称为函数的三要素。

（三）函数的表示方法

函数的关系有三种表示方法：解析法、列表法和图象法。

图象法是借助于图形给出函数对应规律的方法，它的优点是醒目直观，能把函数的变化状态直观地表达出来。

列表法是将一系列自变数的值与其相对应的函数值写出来表示两个变量间的函数对应规律的方法。它的优点是对应规律明确，易于对表中所列的自变量的值查出其对应的函数值。

解析法也叫公式法，是用含有两个变量和各种数学运算的等式来表示两个变量间的函数对应规律的方法。它的优点是简单明确地表达了自变量和函数之间的相依关系，便于进行理论分析和计算，在研究函数时，三种方法常结合起来使用。

由已知条件求函数 $f(x)$ 的解析式，是函数这部分教材的一个基本问题，它不仅能深化函数概念，还常常联系着一些重要的解题方法和技巧，下面是求函数 $f(x)$ 的常用方法。

1. 代换法；代换法也称变量替换或设辅助元素法。它的