

智能教育丛书

智能数学特训教程

高中数学必修③

丛书主编 / 齐 新

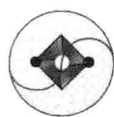
本册主编 / 纪洪波 齐智华

智能数学



大巧夺冠

世界图书出版公司



智能教育丛书

智能数学特训教程

高中数学必修 ③

丛书主编 / 齐 新

本册主编 / 纪洪波 齐智华

智能数学 123

1. 一个中心: 以数学思想方法为中心开发解题智慧
2. 两个基本点:
 - (1) 基础知识傻瓜化
 - (2) 解题方法明确化
3. 三步学: 学会自我总结, 摧毁题海战术
 - S1 问中学(总结基础知识与解题方法)
 - S2 例中学(范例评注)
 - S3 做中学与用中学(自我检测)

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

智能数学特训教程. 高中数学.3: 必修 / 齐新编. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2014.6

(智能教育丛书)

ISBN 978-7-5100-8087-6

I. ①智… II. ①齐… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 122909 号

智能教育丛书·智能数学特训教程高中数学必修 3

丛书主编: 齐 新

本册主编: 纪洪波 齐智华

责任编辑: 夏 丹 翟 蕾

装帧设计: 中公教育图书设计中心

出 版: 世界图书出版公司北京公司

出 版 人: 张跃明

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(地址: 北京朝内大街 137 号 邮编: 100010 电话: 64077922)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 大厂回族自治县彩虹印刷有限公司

开 本: 787 mm×1092 mm 1/16

印 张: 9.5

字 数: 182 千

版 次: 2014 年 12 月第 1 版 2014 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5100-8087-6

定 价: 30.00 元

版权所有 翻印必究

智能教育丛书编委会

丛书顾问 齐智华 李永新 石 磊

丛书主编 齐 新

丛书副主编 杨 进 连文杰 纪洪波

本册主编 纪洪波 齐智华

前言 怎样学好高中数学

用老办法学习数学学不好,将来考大学也考不好.若用智能数学的新思想新方法学习数学,你一定能学好数学,天天快乐,天天向上!将来一定能考上理想的大学,实现高中时代的梦想.

问1 什么是智能数学?智能数学的新思想新方法是什么?

解 从国家的领袖,直到广大的学生与家长,在教育与学习的领域中最憎恨的是什么?最憎恨的就是中小学的题海战术!这是国家发展中的大问题,它捆绑着中国人追赶并超越先进世界的脚步.这也是现代素质教育的最大问题,它是压在青少年头上的一座大山.究其根源,是传统数学造成的!

传统数学(美国称为“机械数学”)是以“基础知识加题海”为中心的三步学:

S1 死记硬背(机械记忆)

S2 照猫画虎(机械模仿)

S3 题海战术(机械练习)

时至今日的新社会(信息社会),我国仍有很多学校,他们留恋传统数学,热衷于操作这种落后于时代的老办法,题海战术愈炒愈烈,致使风华正茂的少年天天演解无数的烂题和没有实际价值的人造难题,沉溺题海,成绩低下,苦不堪言.对此严重危害我国向前发展的考试逆流,我们就针锋相对,就创立适合新社会的新的数学教育——智能数学.那么,什么是智能数学?

智能数学是以“数学思想方法”为中心的三步学:

S1 提出问题

S2 探究解题

S3 总结与反思

智能数学对传统数学的变革是:第一,转变学习中心;第二,抓住学习的基本点;第三,改造学习方法,摧毁题海战术.我们将智能数学这三个方面的新思想新方法概括为:

智能数学 123

1. 一个中心：以数学思想方法为中心开发解题智慧。

2. 两个基本点：

(1) 总结基础秘诀,使基础知识系统化,傻瓜化。(简称“基础知识傻瓜化”)

(2) 总结解题技术,使解题方法系统化,明确化。(简称“解题方法明确化”)

3. 三步学：学会自我总结,摧毁题海战术

S1 问中学(总结基础知识与解题方法)

S2 例中学(范例评注)

S3 做中学与用中学(自我检测)

智能数学的新理念就是当今国际最大研究课题“问题解决”的新思想,新方法,这是对传统数学在思维领域中的一场深刻革命. 本书将智能数学的新思想,新方法应用于高中数学,使你茅塞顿开,数学解题发生天翻地覆的变化,数学成绩飞速提高. 随之,你这个人也就快乐起来,聪明起来,整个身心洋溢着大智慧!

● 请注意：“智能数学”不是高深的数学学科,而是数学教育与数学学习的新思想新方法,为了顺口传递,我们简称为“智能数学”,它是针对旧数学教育“传统数学”的变革而正名的.

问2 怎样用“智能数学 123”学习高中数学?

解 我们深度地解说“智能数学 123”:

一、智能数学的学习中心是“数学思想方法”: 普遍认为问题解决的中心是数学能力. 这是对的,但是,因为数学能力的中心是数学思想方法,并且“能力”说法有两个弊端: 第一,能力过于抽象,无法操作;第二,能力的种种说法是学究式的行话赘语,留于表层,只是空喊口号而已. 所以“以能力为中心”改为“以思想方法为中心”,不仅人人明白,并能深入操作. 今后不要空喊能力为中心的口号了,我们要立即转变学习的中心,将“以基础知识为中心”变革为“以数学思想方法为中心”,开发大脑,使自己聪明起来. 这里,又特别注意: 智能数学强调“数学思想方法为中心”,并不是不要基础知识,而是对基础知识的要求更强更透更高!

二、智能数学的两个基本点是基础知识傻瓜化和解题方法明确化。这是智能数学解题的两个法宝。

1. 基础知识傻瓜化：傻瓜化是连傻子都会用的快捷方式，想错都难，就像傻瓜相机一样。其实中国人很早就搞傻瓜化，如小学的“九九表”，大学的“积分表”等等。科学家在发明一项专利技术之后，为了大众共享，扩大市场，首要任务就是把他的技术傻瓜化。

进入初中后，老师们忘记了“九九表”式的傻瓜化，多少年来没有人总结初中之后的傻瓜表。本书首次创编初中高中的傻瓜表，帮你建构少而精，最好用的傻瓜公式，傻瓜法则，将基础知识系统化傻瓜化。请你特别注意将这些“傻瓜”宝贝收入囊中，它们是高速解题的法宝，是发明新思想新方法的基础。读过本书之后，希望每个同学都要学会自我总结基础秘诀，发明“傻瓜”。这也是人生学会自我总结，尝试发明的乐趣和良机。

2. 解题方法明确化：普遍认为“数学思想方法只能是渗透”，但本书并不认同这种渗透式，主张数学思想方法明确化和系统化。我们不能模模糊糊地解题，应使解题方法明确化。达到解题方法明确化是艰难的，就开发大脑而言，必须经历两个认识发展过程：第一过程是由“小巧（一题一法）”到“中巧（一法解决一类问题）”，再到“大巧”（精通各种数学思想方法并能快速选用最好解法）；达到“大巧”境界之人就会反过来进入第二过程，运用“大巧”以不变应万变，无招胜有招，高速解题，大巧夺冠。但要实事求是，尊重科学，“轻巧夺冠”是不可能的！人生需要艰苦奋斗，只有那不畏劳苦，沿着陡峭山路攀登的人，才能达到光辉的顶点！

三、智能数学的学习方法是三步学（自我总结——摧毁题海战术）：

第一步问中学：总结基础知识和解题方法；

第二步例中学：范例评注；

第三步做中学与用中学：自我检测与总结。

这三步学是科学而高效地执行“一个中心和两个基本点”的程序，其要领是学会自我总结，打败题海战术。怎样学会自我总结呢？为此，本书的每一节都设置这三步学习，只要你按照这三步学法学习几节后，自然就学会自我总结了，从而就会自主学习了。下面深入地评注这三步学习方法。

第一步问中学：解题之前先学习和总结待解问题的相关理论和方法，尽力做到基础傻瓜化和解题方法明确化，然后再解题。切忌盲目解题，解题若不以理论方法为指南，就是盲目的解题，就是盲人骑瞎马，夜半临深池。

怎样学习和总结理论方法呢？“问中学”是学习理论方法的绝招，也叫“带着问题学”。

因为问题就是矛盾,就会激起思考,就会产生动力,就会兴致勃勃,就会毫不困倦,所以“问中学”是启发式教授法.同时要求:问题必须自我提出,且编成问题系列,问1,问2,……学会提出问题比解决问题更重要.

著名教育家陶行知先生说得好:

发现千千万,起点是一问.

智者问得巧,愚者问得笨.

第二步例中学:初步学习理论方法后,必须紧接着例中学,把理论方法与解题紧密结合起来.对每一理论方法都要做到胸有范例;对每一例题都要进行自我评注,评注什么呢?评注三点:(1)基础知识傻瓜化了吗?(2)解题方法明确化了吗?(3)有没有新发现,新结论,新方法?这样才能深入学会理论方法,完善理论方法,并会有所发现和创新.

英国数学家和物理学家牛顿说得深刻:

在数学里,例子比定律更有用.

第三步做中学与用中学:本书的每一节都设置与问中学例中学相配套的自我检测题.读者要同步地独立地像考试一样地完成检测,然后对照后面的答案和讲解,进行自我评注与总结,使每一节的学习都达到“基础知识傻瓜化”,“解题方法明确化”!

要想提高数学成绩必须做题,于是有的老师和家长就让学生多多做题,甚至类比文学名言“熟读唐诗三百首,不会作诗也会吟”说:做过习题千千万,不会解题也会算……于是“题海战术”成为提高数学成绩的法宝.这是形而上学的量变观点,违背了辩证法.事实上,“题海战术”是学习的大敌,无数学生淹没在题海中.

世界著名的问题解决专家舍费尔德(A.Schoenfeld)教授说:

我希望教给学生25个题,学生就会解决500个题;

不希望教给学生500个题,学生却解不出25个题!

我们与人挑战的是“看谁解题少,又要成绩好”.面对题海,老师要精选习题,执行“少而精”的教授法;学生要抓紧学习“自我总结”,学会自我总结就能摧毁题海战术.学过本书之后,你将进一步领悟到:人的一生,总得不断地总结经验,有所发现,有所发明,有所创造,有所前进.自我总结是人生走向成功的法宝,是人类进步的阶梯!为什么你每天半夜12点还做不完作业呢?就是因为你没有学会自我总结,无法解决“二百五”老师发来的题海.这里,笔者给你两句警言,你去想一想,做一做吧:

自我总结是打败题海战术的法宝.

学会自我总结是自主学习的核心.

本书还特别强调独立思考. 给你一个独立思考的小技巧: 读书前做一个 $20\text{cm}\times 10\text{cm}$ 的硬纸卡, 读书时先用硬纸卡盖上问题的解答, 自我充分思考并作答后再看解答, 再跟上一个深刻的自我总结. 要做到: 一步一个深深的脚窝, 一个脚窝一支歌.

我们要用智能数学挑战人生, 挑战世界, 在高中时代要用智能数学挑战高考. 智能数学挑战高考应从高一做起! 打开这本书, 我就把你带入智能数学的乐园. 在我们这里, 没有滥题, 没有题海, 没有忧愁, 没有绝望. 有的是精题范例, 有的是傻瓜宝贝, 有的是精良的数学思想方法和高端的解题技术. 让我们充满快乐, 充满信心, 共同创造人间的数学奇迹!

智能数学的解题口号是: 推理最高! 解决最快! 表述最简!

本书为中国梦而写, 我们希望:

中华少年人人开发解决问题的大智慧, 奋力征服新世界, 为振兴中华而奋斗!

齐智华 齐 新 2014 年 1 月

注意: 与数学高考一致, 本书选择题都是单选题, 即在每题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的. 而多选题以填空题形式出现.

目录

CONTENTS

第一章 算法初步	1
1.1 算法与程序框图	1
[自我检测 1.1] (做中学与用中学)	12
1.2 算法语句	20
[自我检测 1.2] (做中学与用中学)	26
1.3 算法案例	28
[自我检测 1.3] (做中学与用中学)	33
第二章 统计	35
2.1 三种抽样	35
[自我检测 2.1] (做中学与用中学)	40
2.2 用样本估计总体	43
[自我检测 2.2] (做中学与用中学)	52
2.3 变量的相关性	56
[自我检测 2.3] (做中学与用中学)	60
第三章 概率	65
3.1 计数方法 (◎ 补充讲授)	65
[自我检测 3.1] (做中学与用中学)	71
3.2 随机事件的概率及其计算	73
[自我检测 3.2] (做中学与用中学)	78

3.3 古典概型、几何概型及其应用	82
[自我检测 3.3] (做中学与用中学)	91
自我检测问题解答	95
[自我检测 1.1]	95
[自我检测 1.2]	106
[自我检测 1.3]	108
[自我检测 2.1]	110
[自我检测 2.2]	114
[自我检测 2.3]	119
[自我检测 3.1]	124
[自我检测 3.2]	126
[自我检测 3.3]	132

第一章 算法初步

1.1 算法与程序框图

[基础秘诀] (问中学)

问 1 什么是算法? 它有哪些重要特征? 怎样表示算法?

什么是算法:

算法是用计算机来解决某一类问题的程序或步骤, 这些程序或步骤必须是:

(1) 明确的. (2) 有效的. (3) 能在有限步之内完成.

算法思想是问题解决的程序化思想. 编程的基本方法是: 分类; 分步; 递归.

算法的重要特征是:

(1) 概括性. (2) 逻辑性. (3) 有限性. (4) 不唯一性. (5) 应用普遍性.

算法的表示法:

(1) 自然语言. (2) 程序框图. (3) 程序语言.

评注 算法设计的核心思想主要有两种:

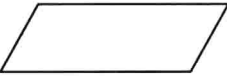
①分合思想(分类讨论、分步解决); ②猜证结合思想(数学归纳法).

数学家故事

乌迪·曼博博士: 国际算法大师. 所著《算法引论: 一种创造性方法》开创了算法设计的新纪元. 创造性地提出类比数学归纳法的算法设计方法——创造性方法, 为后人设计算法提供了一种通用方法.

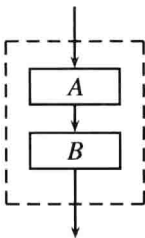
创造性方法的核心是对证明数学定理的思维过程与设计算法的过程进行类比. 将数学归纳法转化为算法设计方法, 该转化侧重于将简单问题的解扩充为较大问题的解的方法. 给定一个问题, 如果能找到如何应用类似问题(但参数较小)的解决方法进行问题求解, 那么就可以采用类比数学归纳法的方法分步完成算法.

问 2 画出常用程序框图的图形符号, 注明图形符号的名称和作用.

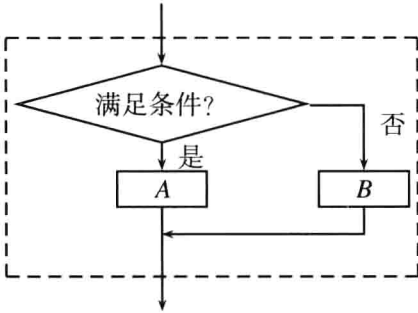
图形符号	名称	功能
	起止框	框图的开始或结束
	输入、输出框	数据的输入或结果的输出
	处理框 (执行框)	赋值、执行计算语句、结果的传送
	判断框	根据给定条件判断

问 3 画出算法的三种基本逻辑结构图.

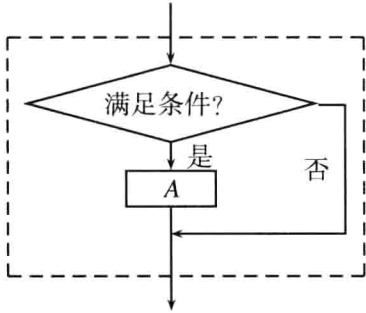
1. 顺序结构



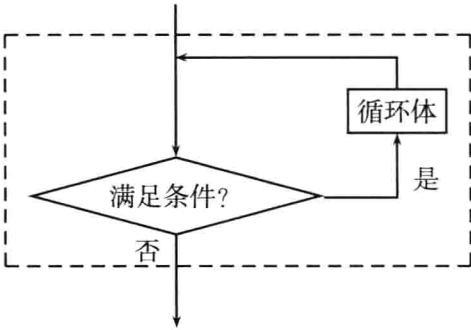
2. 条件结构 (1)



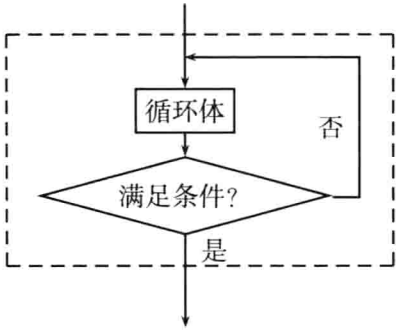
条件结构 (2)



3. 当型循环结构



直到型循环结构



问 4 循环结构的构成? 解循环结构问题的一般步骤?

循环结构构成:

①变量初始化: 进入循环之前, 与循环有关的变量需要赋一个初始值.

②循环变量: 通常名字为 i, j, k, n, m 等小写字母, 相关表达式也通常是 $i = i + 1$ 或 $i = i + 2$ 等形式, 其中的 1, 2 叫做步长. 并且该语句总是距离循环条件最近 (这个“最近”意味着可能该语句直接指向循环条件判断框, 如例 13, 例 16, 或者循环条件判断框直接指向该语句如例 12).

③循环条件 (也叫终止条件): 菱形的判断框中的不等式.

④循环体: 除循环变量和循环条件之外的其他全部反复执行的语句集合.

解循环结构问题的一般步骤:

第一步分析循环结构:

找到循环条件、循环变量、初始化部分和循环体.

第二步模拟循环过程, 得出结论: 采用按行记录的方式.

①第一行按出场顺序写出所有初始化的变量 (有时候包括输入).

②下面的 n 行, 每一行按循环体, 循环变量的计算顺序将①中的所有变量的值列出, 并根据循环条件判断循环是否继续. 如果继续, 则进行下一次循环; 否则输出结果.

[范例评注] (例中学)

例 1 一群小兔一群鸡, 两群合到一群里, 数腿 48, 数头整 17, 多少小兔多少鸡?

解法 1 (特殊化猜想): 猜“中”

	兔数	鸡数	脚数
猜 (中点):	8	9	$4 \times 8 + 2 \times 9 = 50 > 48$
调整:	7	10	$4 \times 7 + 2 \times 10 = 48$

答 兔子 7 只, 鸡 10 只.

评注 猜想是极为重要的一种数学思想, 这里是特殊化思想, 其方法是“猜中点”, 需要多次的试验, 所以有人称它为“检验特值”.

解法 2 (精明演绎):

“金鸡独立, 玉兔拜月”在此命令下, 腿数减半: 其中鸡的头与腿一一对应, 而兔的头与腿是一二对应, 于是

兔数: $x = 48 \div 2 - 17 = 7$;

鸡数: $y = 17 - 7 = 10$;

评注 精明在何处? 使用了“一一对应, 一多对应”.

解法3(方程组法):

设兔数 x , 鸡数 y , 则

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 4x + 2y = 48 \end{cases}, \text{则有} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 2 & 1 & 24 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2①+②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{②}+\text{①}]{-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$\therefore x = 7, y = 10.$

评注 现在讨论:这三个解法哪个好? 传统的老师们齐声赞赏解法2是罕见的巧思妙想,是本题的精彩解法. 但千百年来,中国的传统数学教育只讲演绎证明,不讲实验猜想,把学生的思维打入演绎魔圈之中. 其实解法2是小聪明,而解法1提倡猜想与发现,才是大聪明.

到了十七世纪,在猜想与实验的科学发现中,又用代数方程解决算术难题,用方程组法解答本题易如反掌,所以解法3才是本题的最好解法. 近代,解方程组的算法飞速发展:首先是高斯消去法(矩阵解法,见例2),接着编程,上机,一按键就输出答案,这就是学习“算法”的重要性.

例2 用高斯消去法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 7x - y = 18 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x - 2y + z = -4 \\ 5x + 2y - 3z = 12 \\ x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$$

解 (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y - 7x = -18 \\ 2y - 3x = 2 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & -18 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2①+②} \begin{bmatrix} 1 & -7 & -18 \\ 0 & 11 & 38 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}/11} \begin{bmatrix} 1 & -7 & -18 \\ 0 & 1 & 38/11 \end{bmatrix} \xrightarrow{7②+①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 68/11 \\ 0 & 1 & 38/11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} y = 68/11 \\ x = 38/11 \end{cases}$$

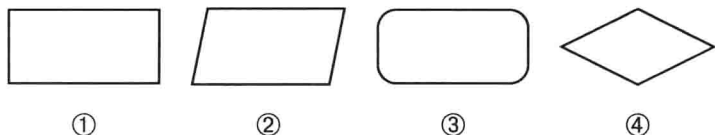
$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{②}+\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 8 & 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{-①}+\text{③}/8]{-3①+\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -11 & -14 & -1 \\ 0 & -3 & -21/4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{-③}/3]{-2①/11} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 14/11 & 1/11 \\ 0 & 1 & 7/4 & -2/3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{-②}+\text{③}]{-3③+\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1 & 14/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 21/44 & -25/33 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-③ \times 44/21} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1 & 14/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & -100/63 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{-③} \times 14/11 + \text{②}]{③/4 + \text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 38/63 \\ 0 & 1 & 0 & 19/9 \\ 0 & 0 & 1 & -100/63 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 38/63 \\ y = 19/9 \\ z = -100/63 \end{cases}.$$

例3 有如下框图:



其中依次表示起止框、输入(输出)框、处理框、判断框的序号是()

- A. ①②③④ B. ③①②④ C. ③②①④ D. ④②①③

答 选 C.

例4 下列关于条件结构的说法正确的是()

- A. 条件结构的程序框图有一个入口和两个出口
B. 条件结构中的两条路径可以同时执行
C. 当条件结构中的条件不满足时,可随意选择两条路径之一执行
D. 无论条件结构中的条件是否满足,都只能执行两条路径之一

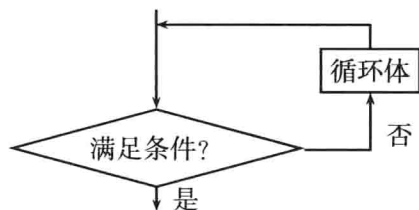
解 对于 A, 条件结构可以有一个入口, 一个或者多个出口. 不过实际应用中, 通常都遵循一个出口的原则. 这样可以使逻辑更清晰.

对于 B, 条件结构中的路径是不能同时执行的, 每一个时刻, 只能有一个路径执行. 否则就失去了条件结构的意义.

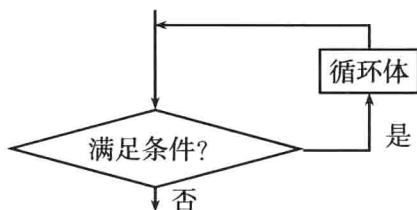
对于 C, 条件不满足时, 应该有不满足时的执行路径. 否则, 该条件结构设计错误.

答 选 D.

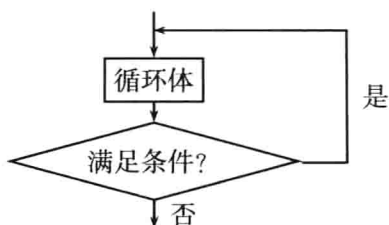
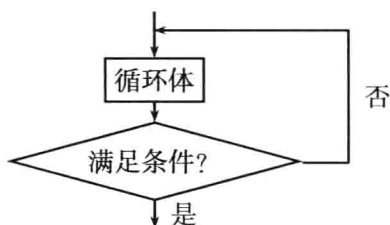
例5 下列四个程序框图中, 直到型循环结构是()



A



B



答 选 C.

C

D

评注 直到型循环结构: 直到条件满足时, 结束循环. 否则, 继续循环.

当型循环结构: 当条件满足时, 继续循环. 否则, 结束循环.

例 6 设计一个算法, 求给定一组数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的方差, 并画出程序框图.

解 算法步骤:

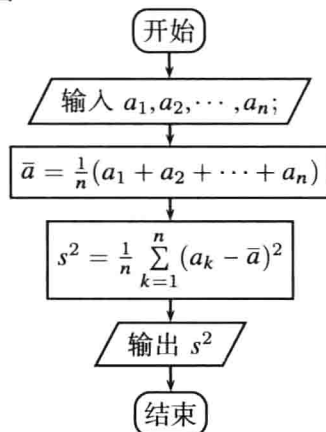
- S1 输入 $a_1, a_2, \dots, a_n$;

S2 计算平均数 $\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$;

S3 计算方差 s^2 ;

S4 输出方差

程序框图:



例 7 已知两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求直线 AB 的斜率. 设计算法, 并画出程序框图.

解 算法步骤:

- S1 输入 x_1, y_1, x_2, y_2

S2 判断 $x_1 = x_2$ 是否成立.
 若成立, 则输出“斜率不存在”, 并结束;
 若不成立, 则计算 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

S3 输出斜率 k .

程序框图:

