DuoGongNeng TiDian

GaoZhongShuXue JingSai

多功能题典

快速检索：
关键词、知识点、
方法、题型、难度

高中数学竞赛

主编 单 墫
熊 斌

华东师范大学出版社

多功能题典

高中数学竞赛

主编　单墫　熊斌

参编者　冯志刚　刘诗雄　田廷彦
万军　张思汇　王巧林

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

多功能题典. 高中数学竞赛/单墫,熊斌主编. —上海:华东师范大学出版社,2008
ISBN 978-7-5617-5617-1

Ⅰ. 多… Ⅱ. ①单…②熊… Ⅲ. 数学课-高中-习题 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 079752 号

多功能题典·高中数学竞赛

主　　编　单　墫　熊　斌
项目编辑　舒　刊　徐　金
策划组稿　倪　明　徐　金
审读编辑　宋园园　石　岩　柴丽琴
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　上海市崇明县裕安印刷厂
开　　本　890×1240　32 开
插　　页　4
印　　张　35
字　　数　1 408 千字
版　　次　2009 年 7 月第二版
印　　次　2009 年 7 月第二次
印　　数　16001-21100
书　　号　ISBN 978-7-5617-5617-1/G·3292
定　　价　58.00 元

出 版 人　朱杰人

致读者

亲爱的读者，《多功能题典》最近又为您提供增值服务啦！

自 2007 年上市以来，《多功能题典》越来越受到读者的肯定。题典家族也在不停地增添新丁，目前，题典家族已有 13 个成员，涵盖中小学的主要学科。为了答谢读者的厚爱，题典家族开始了自身的新陈代谢——第二版修订，在保持原来多项功能的前提下，进一步强调其功能的高效性，特别是其强大的网络检索功能，更能满足 e-学习的高效率。当您进入题典的网络检索系统时，相信您一定会有新的收获。

下面让我们一起来看看题典家族的自我介绍吧。

作者权威 题典家族的编写队伍由各学科考试命题的专家、学者与长期在教学第一线的资深特、高级教师组成。他们各取所长、各展所能，把自己长期积累、精心筛选的新颖而规范的经典试题奉献出来，共同打造出这一套高品质的丛书。

题目典范 题典家族不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性。书中每一道试题的编制和确定都经过了多道关卡，从作者编选、教学使用到主编总纂、编辑审读，再到专家审定，每一个环节都精益求精，从而确保题题经典。

体例新颖 题典家族不仅为每一道题提供了精妙的“题解”，更积极引导读者“解题”，注重方法、思路的点拨，还为每一道题标出了难度星级，使读者学有所思、学有所得，不仅能举一反三，更能了解自己的学习水平，把握学习方向。

超强检索 题典家族配备了强大的网络检索功能。当您需要某种检索时，可以方便地进入网站（http://tidian.ecnupress.com.cn），从难度、题型、知识点、方法技巧等不同维度，及关键字进行组合检索，就像使用 Google 和百度一样方便。不仅如此，题典家族还为大家提供了精美的甜点，即每年都会有新的试题加入到家族的电子题库中。所以说，题典家族不只是超强，更是超值。

题典家族立意新颖，篇幅较大，难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

华东师范大学出版社

教辅分社

前　言

华东师范大学出版社的数学奥林匹克小丛书(蓝本书),又添了一个新丁——《多功能题典·高中数学竞赛》.

各种数学竞赛,年复一年地进行.参与的人越来越多,已经成为全民性的健脑活动.竞赛题成千上万,纷至沓来.于是,竞赛题典也就自然地应运(适应需要)而生.

编题典,有两种不同的方针.

一种是求全.希望能将所有出现过的竞赛题全部搜罗进来,一网打尽.但这样做,篇幅势必非常巨大,至少是这部题典的五六倍.其中大同小异的题将相当的多,而遗漏又很难避免.何况,新题不断出现,"全"又很快变为不全.与其花大力气编这样的书,不如做成光盘或利用网络更为合适.

我们采取另一种方针,即求精.在众多的赛题中精选出一部分"好题".一道题被选中,原因不尽相同.或可作典型,或非常独特;或有深刻的背景,或解法值得留意;或为原创而饶有新意,或可作推广至一般情形;……读者由这些题,举一反三,可以收到更多的益处.

有不少题的解,是我们自己的解法.如题3.1.9,将$(s_n-c)(s_{n+2}-c)-(s_{n+1}-c)^2$作为$c$的一次函数,很容易得出它在区间$[0, s_{n+2}]$上恒为负.又如题2.1.21,采用向量,立即得出单位向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$的和为零,从而两两的夹角为$120°$.这些都比常见的"标准"解法简明.

书中所需知识与使用的符号,可在书末附录中查到.

为适应不同的需要,我们将题目的难度分为四级,一个星的比较容易,四个星的最难.一、二、三、四个星的比,大致为$1:4:4:1$.

代数部分由熊斌、冯志刚、刘诗雄编写.几何部分由田廷彦、刘诗雄、万军编写.组合部分由张思汇、熊斌编写.数论部分由单墫、王巧林编写.

希望使用本题典的读者,能用较少的时间,取得较好的效果.希望这本题典能对数学竞赛的发展,起一些推进作用.

单　墫

2008年5月

目　录

第一篇　代　　数

第二篇 几 何

第三篇 数 论

第四篇 组 合

附 录

第一篇 代数

第1章 集合与函数

1.1 集合的概念与运算

1.1.1 ★ 设 x, y, z 都是非零实数,用列举法将代数式 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 的所有可能值组成的集合表示出来.

解析 根据 x、y、z 中负数个数为 3, 2, 1, 0, 相应的值为 -3, -1, 1, 5. 所求的集合为 $\{-3, -1, 1, 5\}$.

1.1.2 ★★ 设集合 $S=\left\{y \,\middle|\, y=\sum_{k=1}^{1\,004} x_{2k-1}x_{2k}\right.$, 这里 x_1, x_2, …, $x_{2\,008}\in\{\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1\}\Big\}$. 问 S 中的不同整数共有多少个?

解析 由条件可知 $x_{2k-1}x_{2k}\in\{(\sqrt{2}-1)^2, (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1), (\sqrt{2}+1)^2\}=\{3-2\sqrt{2}, 1, 3+2\sqrt{2}\}$,设使得 $x_{2k-1}x_{2k}=3-2\sqrt{2}$, 1 和 $3+2\sqrt{2}$ 的下标 k 的个数分别为 a、b、c,则 $y=(3-2\sqrt{2})a+b+(3+2\sqrt{2})c$, 且 $a+b+c=1\,004$. 这里 $y\in\mathbf{Z}$ 的充要条件是 $a=c$,转为求满足 $2a+b=1\,004$ 的非负整数解的组数. a 可取 0, 1, …, 502. 所以,S 中的不同整数共有 503 个.

1.1.3 ★★ 一个 4 元实数集合 S 的所有子集的元素和的总和等于 2 008(这里空集的元素和认为是 0). 求 S 的所有元素的和.

解析 设 $S=\{a, b, c, d\}$,则 $(a+b+c+d)\times 2^3=2\,008$ (因为 S 中的每个元素恰在 S 的 2^3 个子集中出现),故 $a+b+c+d=251$. 所求的答案为 251.

1.1.4 ★ 已知元素 $(1, 2)\in A\cap B$,这里 $A=\{(x, y)\mid ax-y^2+b=0\}$, $B=\{(x, y)\mid x^2-ay-b=0\}$. 求 a, b 的值.

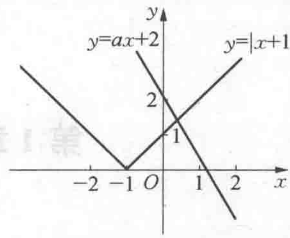
解析 由条件可知 $\begin{cases}a\cdot 1-2^2+b=0,\\ 1^2-a\cdot 2-b=0,\end{cases}$ 解得 $a=-3$, $b=7$.

1.1.5 ★★ 已知集合 $A=\{(x, y)\mid y=ax+2\}$, $B=\{(x, y)\mid y=|x+1|\}$, 且 $A\cap B$ 是一个单元集. 求 a 的取值范围.

解析 作出函数 $y=|x+1|$ 的图象,然后讨论直线 $y=ax+2$ 的位置. 利用

图象可知：当 $a \geqslant 1$ 时，$A \cap B$ 是单元集；当 $-1 < a < 1$ 时，$A \cap B$ 是二元集；当 $a \leqslant -1$ 时，$A \cap B$ 也是单元集.

所求 a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.



1.1.6 ** 已知集合 $A = \left\{(x, y) \middle| \dfrac{y-3}{x-2} = a+1\right\}$，$B = \{(x, y) \mid (a^2-1)x + (a-1)y = 15\}$. 问：实数 a 为何值时，$A \cap B = \varnothing$？

解析 当 $a = 1$ 时，$B = \varnothing$，符合要求. 当 $a \neq 1$ 时，集合 A 表示直线 $y = (a+1)x - 2a + 1\ (x \neq 2)$，而 B 表示直线 $y = -(a+1)x + \dfrac{15}{a-1}$. 由 $A \cap B = \varnothing$，知这两条直线平行，或交于一点 P 使 P 的横坐标为 $x = 2$. 前者要求 $a+1 = -(a+1)$ 且 $-2a+1 \neq \dfrac{15}{a-1}$，后者要求 $2(a+1) - 2a + 1 = -2(a+1) + \dfrac{15}{a-1}$. 分别求解可得 $a = -1$ 或 $a \in \left\{\dfrac{5}{2}, -4\right\}$. 于是，当 $a \in \left\{-1, -4, 1, \dfrac{5}{2}\right\}$ 时，$A \cap B = \varnothing$.

1.1.7 ** 已知集合 $A = \{(x, y) \mid ax + y = 1\}$，$B = \{(x, y) \mid x + ay = 1\}$，$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. 问：

(1) 当实数 a 为何值时，$(A \cup B) \cap C$ 是一个 2 元集？

(2) 当实数 a 为何值时，$(A \cup B) \cap C$ 是一个 3 元集？

解析 显然 $(0, 1) \in A \cap C$，$(1, 0) \in B \cap C$，所以，$(0, 1)$，$(1, 0) \in (A \cup B) \cap C$.

(1) $a = 0$ 时，直线 $ax + y = 1$ 与 $x + ay = 1$ 均与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，$(A \cup B) \cap C = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

$a = 1$ 时，直线 $ax + y = 1$ 与 $x + ay = 1$ 重合，即连结 $(0, 1)$，$(1, 0)$ 的直线. $(A \cup B) \cap C = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

$a \neq 0, 1$ 时，直线 $ax + y = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 有一个不同于 $(0, 1)$，$(1, 0)$ 的交点，$|(A \cup B) \cap C| \geqslant 3$.

因此 $a = 0, 1$.

(2) 这时 $a \neq 0, 1$，而且直线 $ax + y = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的另一个交点也是直线 $x + ay = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的另一个交点，即这点是 $ax + y = 1$ 与 $x + ay = 1$ 的交点，从而 $x = y = \dfrac{1}{a+1}$，代入 $x^2 + y^2 = 1$ 得 $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$a = -1 \pm \sqrt{2}$.

1.1.8 ** 设集合 A, B, X 满足：$A \cap X = B \cap X = A \cap B$，$A \cup B \cup X = A \cup B$. 证明：$X = A \cap B$.

解析 $A \cap B = A \cap X \subseteq X$. 另一方面，$X \subseteq A \cup B \cup X = A \cup B$，故对 X

中的任意元素 x,都有 $x\in A\cup B$,即 $x\in A$ 或 $x\in B$. 若 $x\in A$,则 $x\in A\cap X=A\cap B$; 若 $x\in B$, 则 $x\in B\cap X=A\cap B$. 所以,总有 $x\in A\cap B$. 从而,$X\subseteq A\cap B$. 综合以上两方面得 $X=A\cap B$.

1.1.9 ★★ 对集合$\{1, 2, \cdots, 15\}$的子集 S,若正整数 n 和 $n+|S|$ 都是 S 的元素,则称 n 为 S 的一个"好数". 如果一个集合 S 有一个元素是"好数",那么称 S 为"好集". 设 7 是某个"好集"X 的一个"好数". 问: 这样的子集 X 有多少个?

解析 $7+|X|\leqslant 15$, 可知 $|X|\in\{2, 3, \cdots, 8\}$. 当 $|X|=2$ 时, $7, 9\in X$,而其余 13 个数都不属于 X,这时有 C_{13}^{0} 个符合要求的 X;当 $|X|=3$ 时,除 7, 10 以外其余 13 个数中恰有一个属于 X,这时有 C_{13}^{1} 个符合要求的 X; …; 当 $|X|=8$ 时,除 7, 15 外其余 13 个数中恰有 6 个属于 X,共有 C_{13}^{6} 个符合要求的 X. 所以,共有 $C_{13}^{0}+C_{13}^{1}+\cdots+C_{13}^{6}=\frac{1}{2}(C_{13}^{0}+\cdots+C_{13}^{13})=2^{12}$ 个符合要求的 X. 本题的答案为 2^{12}.

1.1.10 ★★ 已知(E_1, E_2, E_3, E_4)是$\{1, 2, \cdots, n\}$的有序子集组,满足: $E_1\cap E_2\neq\varnothing$, $E_2\cap E_3\neq\varnothing$, $E_3\cap E_4\neq\varnothing$. 问: 有多少个这样的子集组?

解析 在不考虑条件的情况下,每个 $x\in\{1, 2, \cdots, n\}$都恰有 2^4 种选择,因此,共有 16^n 个集合组(E_1, E_2, E_3, E_4). 其中至少有一个条件不满足(例如 $E_1\cap E_2=\varnothing$)的集合组共有 $12^n\times 3$ 组(这时每个元素都恰有 $3\times 2^2=12$ 种选择),这样的组应扣除. 再考虑其中至少有两个条件不满足的集合组,这时有两种类型,个数(同上分析)分别为 $10^n\times 2$ 和 9^n,应当补上. 最后,应扣除三个条件都不满足的组,个数为 8^n.

综上,满足条件的子集组共有 $16^n-12^n\times 3+(10^n\times 2+9^n)-8^n$ 组.

1.2 映射与函数

1.2.1 ★ 设 $A=\{1, 2, 3, m\}$, $B=\{4, 7, n^4, n^2+3n\}$, 对应法则 $f: a\to b=pa+q$ 是从 A 到 B 的一一映射. 已知 m, n 为正整数,且 1 的像是 4, 7 的原像是 2. 求 p, q, m, n 的值.

解析 由条件可知 $\begin{cases}4=p\cdot 1+q,\\ 7=p\cdot 2+q,\end{cases}$ 解得 $p=3$, $q=1$. 所以, $f(x)=3x+1$. 结合 f 是 A 到 B 的一一映射,可知

$$\begin{cases}n^4=3\cdot 3+1,\\ n^2+3n=3m+1\end{cases} \text{或者} \begin{cases}n^4=3m+1,\\ n^2+3n=3\cdot 3+1,\end{cases}$$

利用 $m, n\in\mathbf{N}_+$,可知只能是后一种情形,解得 $n=2$, $m=5$. 综上所述, $(p, q, m, n)=(3, 1, 5, 2)$.

1.2.2 ★ 设 $m, n\in\mathbf{N}_+$, $m\leqslant n$. 集合 $A=\{a_1, \cdots, a_m\}$, $B=\{b_1, \cdots, b_n\}$.

(1) 求所有 A 到 B 的映射的个数；

(2) 求所有 A 到 B 的单射的个数；

(3) 是否存在 A 到 B 上的满射？

解析 (1) 由于 A 中的每一个元素都有 n 个 B 中的元素可以作为它的像，所以，A 到 B 的映射共有 n^m 个.

(2) 依次确定 A 中元素 $a_1, \cdots, a_m$ 的像，方法数分别为 $n, n-1, \cdots, n-(m-1)$. 所以，A 到 B 的单射共有 $n(n-1)\cdots(n-m+1)(=\mathrm{A}_n^m)$ 个.

(3) 当 $n=m$ 时，存在 A 到 B 上的满射，满射共有 $n!$ 个. 而当 $n>m$ 时，不存在 A 到 B 上的满射.

1.2.3 ★★ 设 $P=\{n\mid n\geqslant 3, n\in\mathbf{N}_+\}$. 函数 f: $P\to\mathbf{N}_+$ 的定义如下：对 $n\in P$，$f(n)$ 是所有不是 n 的约数的正整数中最小的数. 求函数 f 的值域.

解析 函数 f 的值域 $M=\{q\mid q\in\mathbf{N}_+, q$ 为某个质数的正整数次幂$\}$.

一方面，设 $q\in M$，即存在 $n\in P$，使得 $1, 2, \cdots, q-1$ 都是 n 的约数，但 $q\nmid n$. 若 q 不是某个质数的正整数次幂，则可将 q 分解为两个互质的正整数 q_1 和 q_2 的积，这里 $2\leqslant q_1<q_2<q$. 这导致 $q_1\mid n$, $q_2\mid n$，结合 $(q_1, q_2)=1$，就有 $q_1q_2\mid n$，即 $q\mid n$，矛盾. 所以，M 中的数只能是某个质数的正整数次幂的形式.

另一方面，设 $q\in\mathbf{N}_+$, $q=p^\alpha$，这里 p 为质数，$\alpha\in\mathbf{N}_+$. 并设 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是所有小于 p^α 的质数，取 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k\in\mathbf{N}_+$，使得 $p_i^{\alpha_i}>p^\alpha$, $1\leqslant i\leqslant k$. 令 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}\cdot p^{\alpha-1}$，则由 $f(n)$ 的定义可知，$f(n)=p^\alpha$.

综上可知，f 的值域即为 M.

1.2.4 ★ 设 $a(>1)$ 为常数，函数 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(2) 证明：$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数；

(3) 求 $f(x)$ 的值域.

解析 (1) $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$，

所以，$f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x)=1-\dfrac{2}{a^x+1}$. $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 递增，$\dfrac{2}{a^x+1}$ 递减，所以，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(3) 利用 $a^x>0$，可知 $a^x+1>1$，从而 $0<\dfrac{2}{a^x+1}<2$，故 $-1<1-\dfrac{2}{a^x+1}<1$. 所以，$f(x)$ 的值域为$(-1, +\infty)$.

1.2.5 ★ 函数 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足：对任意 x, $y\in\mathbf{R}$, 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明：$f(x)$为奇函数.

解析 条件式中取 $x=y=0$,得 $f(0)=2f(0)$, $f(0)=0$. 再取 $y=-x$, 得 $f(0)=f(x)+f(-x)$, $f(-x)=-f(x)$. 所以,$f(x)$为奇函数.

1.2.6 ★ 设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数. 证明：$f(x)$可以表示为 $\mathbf{R}$ 上的一个奇函数与一个偶函数之和.

解析 令 $g(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$, $h(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)-f(-x))$, 则 $g(-x)=g(x)$, $h(-x)=-h(x)$, 且 $f(x)=g(x)+h(x)$.

评注 解答中的 $g(x)$与 $h(x)$可以通过解下述方程组得出.

$$\begin{cases}f(x)=g(x)+h(x),\\ f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x).\end{cases}$$

1.2.7 ★ 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的图象与它的反函数的图象完全重合. 问：这函数应具有何种形式？这里 a, b, c, d 为常数,并且 a、c 不同时为0.

解析 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 可得 $x=\dfrac{dy-b}{-cy+a}$. 因此，$f(x)$的反函数为 $f^{-1}(x)=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$. 由条件可知 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{dx-b}{-cx+a}$,即

$$(cd+ac)x^2+(d^2-a^2)x-b(a+d)=0.$$

上式左边应为一个零多项式,即 $c(a+d)=d^2-a^2=-b(a+d)=0$,这表明 $a+d=0$ 或者 $a=d(\neq 0)$且 $b=c=0$. 所以，$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-a}$ 或者 $f(x)=x$.

1.2.8 ★ 是否存在单射 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x^2)-f^2(x)\geqslant\dfrac{1}{4}$?

解析 若存在满足条件的单射,则令 $x=0$ 和 1,得 $\begin{cases}f(0)-f^2(0)\geqslant\dfrac{1}{4},\\ f(1)-f^2(1)\geqslant\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 于是 $\left(f(0)-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$, $\left(f(1)-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$. 故 $f(0)=f(1)=\dfrac{1}{2}$,这与 f 为单射矛盾. 所以,不存在符合要求的单射.

1.2.9 ★ 奇函数 $f(x)$在定义域$(-1, 1)$内是递增的. 已知 $f(1-m)+f(m^2-1)<0$,求实数 m 的取值范围.

解析 由条件知 $f(1-m)<-f(m^2-1)=f(1-m^2)$. 所以，$m$ 应同时满足

条件$\begin{cases}-1<1-m<1,\\-1<1-m^2<1,\\1-m<1-m^2,\end{cases}$解得$0<m<1$.

1.2.10 ★★ 设函数 f 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)=f^{-1}(x)$（这里 $f^{-1}(x)$是函数 $f(x)$的反函数）. 证明：对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)=x$.

解析 设存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)\neq x_0$. 如果 $f(x_0)>x_0$，那么由 $f(x)=f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$单调递增可知 $x_0=f^{-1}(f(x_0))=f(f(x_0))>f(x_0)$，矛盾；

如果 $f(x_0)<x_0$，同上类似，有 $x_0=f^{-1}(f(x_0))=f(f(x_0))<f(x_0)$，亦矛盾.

所以，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)=x$.

1.3 二次函数

1.3.1 ★ 设 $f(x)$是一个二次函数，函数 $g(x)$满足：$g(x)=2^xf(x)$，$g(x+1)-g(x)=2^{x+1}\cdot x^2$，$x\in\mathbf{R}$. 求 $g(x)$的表达式.

解析 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, $c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$). 于是

$$2^{x+1}(a(x+1)^2+b(x+1)+c)-2^x(ax^2+bx+c)=2^{x+1}\cdot x^2,$$

所以，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $2a(x+1)^2+2b(x+1)+2c-ax^2-bx-c=2x^2$，即

$$ax^2+(4a+b)x+2a+c=2x^2,$$

对比两边 x 各次项的系数可得：$a=2$, $b=-8$, $c=-4$，从而，

$$g(x)=2^{x+1}(x^2-4x-2).$$

1.3.2 ★ 设 a, b 为实常数，已知对任意 $t\in\mathbf{R}$，关于 x 的二次函数 $y=(t^2+t+1)x^2-2(a+t)^2x+t^2+3at+b$ 图象恒过点$(1, 0)$. 求 a, b 的值.

解析 依题意，可得 $(t^2+t+1)-2(a+t)^2+t^2+3at+b=0$，对任意实数 t 恒成立. 因此左边是关于 t 的零多项式，所以 $\begin{cases}1-4a+3a=0,\\1-2a^2+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$

1.3.3 ★ 函数 $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$. 问：

(1) k 为何值时，方程 $f(x)=0$ 的两个根分别落在区间$(0, 1)$和$(1, 2)$内？

(2) k 为何值时，不等式 $f(x)<0$ 的解集包含区间$(0, 2)$？

解析 (1) 由于二次函数 $y=f(x)$ 的二次项系数大于零，开口向上，因此，条件等价于$\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)<0,\\f(2)>0,\end{cases}$即有$\begin{cases}k^2-k-2>0,\\k^2-2k-8<0,\\k^2-3k>0,\end{cases}$解得$-2<k<-1$或者$3<k<4$.

(2) 利用二次函数的性质，可知条件等价于 $\begin{cases}f(0)\leqslant 0,\\f(2)\leqslant 0,\end{cases}$ 即有 $\begin{cases}k^2-k-2\leqslant 0,\\k^2-3k\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $0\leqslant k\leqslant 2$.

1.3.4 ★★ 求所有的实数 a，使得对任意实数 x，函数 $f(x)=x^2-2x-|x-1-a|-|x-2|+4$ 的值都是非负实数.

解析 由条件知 $\begin{cases} f(0)=-|1+a|+2\geqslant 0, \\ f(1)=-|a|+2\geqslant 0, \end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a\leqslant 1$.

下面证明：当 $-2\leqslant a\leqslant 1$ 时，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\geqslant 0$.

事实上，记 $t=x-1$，则

$$f(x)=t^2-|t-a|-|t-1|+3.$$

记 $g(t)=t^2+3-|t-a|-|t-1|$.

当 $t\leqslant a$ 时，$g(t)=t^2+3-(a-t)-(1-t)=t^2+2t+2-a=(t+1)^2+(1-a)\geqslant 0$；

当 $a\leqslant t\leqslant 1$ 时，$g(t)=t^2+3-(t-a)-(1-t)=t^2+2+a$，结合 $a\geqslant -2$ 知 $g(t)\geqslant 0$；

当 $t\geqslant 1$ 时，$g(t)=t^2+3-(t-a)-(t-1)=t^2-2t+4+a=(t-1)^2+3+a\geqslant 3+a\geqslant 1$.

所以，当 $-2\leqslant a\leqslant 1$，总有 $f(x)\geqslant 0$.

满足条件的 a 构成的集合为 $\{a\mid -2\leqslant a\leqslant 1\}$.

1.3.5 ★★ 设实数 a, b, c, m 满足条件：

(1) a, m 都为正实数；

(2) $\dfrac{a}{m+2}+\dfrac{b}{m+1}+\dfrac{c}{m}=0$.

求证：方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根属于区间 $(0,1)$.

证明 记 $f(x)=ax^2+bx+c$，则由条件可知

$$f\left(\frac{m}{m+1}\right)=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2+b\left(\frac{m}{m+1}\right)+c=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2-\frac{am}{m+2}$$

$$=-\frac{am}{(m+1)^2(m+2)}<0.$$

另一方面，若 $c>0$，则 $f(0)=c>0$；若 $c\leqslant 0$，则 $f(1)=a+b+c=\dfrac{a}{m+2}+(m+1)\left(\dfrac{a}{m+2}+\dfrac{b}{m+1}+\dfrac{c}{m}\right)-\dfrac{c}{m}=\dfrac{a}{m+2}-\dfrac{c}{m}>0$.

所以，总有 $f(0)f\left(\dfrac{m}{m+1}\right)<0$ 或 $f\left(\dfrac{m}{m+1}\right)f(1)<0$. 从而，方程总有一个根属于 $\left(0,\dfrac{m}{m+1}\right)$ 或 $\left(\dfrac{m}{m+1},1\right)$，命题成立.

1.3.6 ★★ 设 a, b 为实数,而方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实根. 证明:存在整数 n, 使得

$$|n^2+an+b| \leqslant \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right\}.$$

证明 记 $f(x)=x^2+ax+b=(x-\beta)(x-\gamma)$,这里 $\beta \geqslant \gamma$ 是方程的两个实根. 易知 $\sqrt{a^2-4b}=\beta-\gamma$.

如果 β, γ 中有一个为整数,不妨设 $\beta \in \mathbf{Z}$, 则令 $n=\beta$, 就有 $|f(n)|=0$, 命题显然成立.

如果 β, γ 都不为整数,取 $m \in \mathbf{Z}$, 使得 $m<\beta<m+1$. 分两种情形讨论:

(1) 若 $m<\gamma$, 则

$$\begin{aligned}|f(m)f(m+1)| &= |(m-\beta)(m+1-\beta)(m-\gamma)(m+1-\gamma)| \\ &= (\beta-m)(m+1-\beta)(\gamma-m)(m+1-\gamma) \\ &\leqslant \left(\frac{(\beta-m)+(m+1-\beta)}{2}\right)^2\left(\frac{(\gamma-m)+(m+1-\gamma)}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2.\end{aligned}$$

所以, $|f(m)|$ 与 $|f(m+1)|$ 中有一个不大于$\frac{1}{4}$.

(2) 若 $\gamma<m$ 则

$$\begin{aligned}|f(m)f(m+1)| &= (\beta-m)(m+1-\beta)(m-\gamma)(m+1-\gamma) \\ &\leqslant \frac{1}{4}((\beta-m)(m+1-\gamma)+(m+1-\beta)(m-\gamma))^2 \\ &= \frac{1}{4}(\beta-\gamma)^2.\end{aligned}$$

所以, $|f(m)|$ 与 $|f(m+1)|$ 中有一个不大于 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$.

1.3.7 ★★ 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ 满足条件:

(1) 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x-4)=f(2-x)$, 且 $f(x) \geqslant x$;

(2) 当 $x \in (0, 2)$时, $f(x) \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;

(3) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大的 $m(m>1)$, 使得存在 $t \in \mathbf{R}$, 只要 $x \in [1, m]$, 就有 $f(x+t) \leqslant x$.

解析 因为 $f(x-4)=f(2-x)$, $x \in \mathbf{R}$, 可知二次函数 $f(x)$的对称轴为 $x=-1$. 由(3)知 $f(x)$的开口向上,即 $a>0$,于是有 $f(x)=a(x+1)^2(a>0)$.