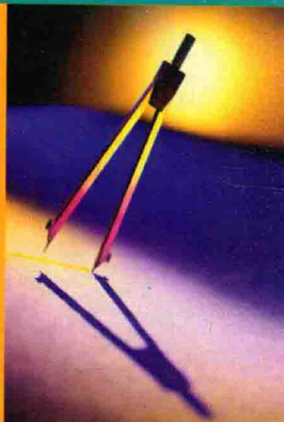
中学数学专题丛书

叶尧城 主编

马德明 编著

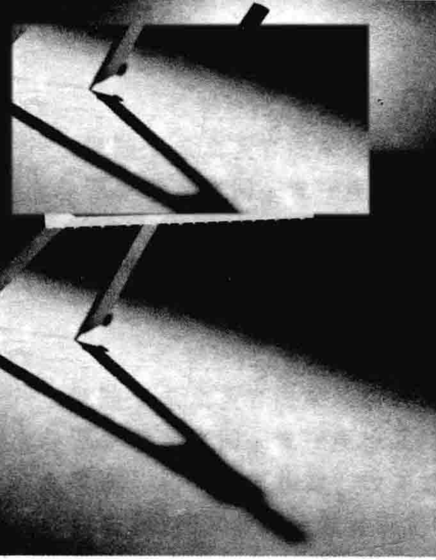


微积分

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

12



中学数学专题丛书

叶尧城 主编

微积分

马德明 编著

12

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/马德明编著 .—武汉:湖北教育出版社,2001
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3168-9

Ⅰ.微… Ⅱ.马… Ⅲ.微积分-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 075432 号

出版 发行:湖北教育出版社
网 址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:文字六〇三厂印刷 (441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开 本:787mm×1092mm 1/32 6 印张
版 次:2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷
字 数:115 千字 印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3168-9/G·2573 定价:8.00 元

总　序

随着素质教育的深入推进，需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁，以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建？改革教材成为了人们选择的突破口！当前，国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用，新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而，我国幅员辽阔，地区间的教育水平的差异大，个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”，发展学生的个性特长，让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高，还需要通过特定的教学过程来完成，其中应有好的素材和高质量的课外读物（而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等）。因此，我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物，以专题讲座的形式，帮助学生了解知识的发生、发展过程，学会分析、解决问题的思想方法，深化、拓宽相关知识。

有鉴于此，我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子，各册相对独立又相互联系，小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触，介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础**。通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力**。精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用**。精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新**。精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功**。选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

目录

第一章

导数与微分

导数和微分是微分学的两个基本的概念.它的创立使数学思想方法、内部结构都产生了质的飞跃,它是人类智慧的结晶.从历史上看,导数的概念起源于力学中的速度问题和几何学中的切线问题.

法国大数学家费尔玛曾求解过这样一个问题:给定线段长为 a,在线段上从其一端量出长度 x,$A=x(a-x)$何时最大? 这在当时并不是一件容易的事.他是这样思考的:先用 $x+E$ 代替 x,则 $A=(x+E)(a-x-E)$,对于最大面积,必然有 $x(a-x)=(x+E)(a-x-E)$,即 $x=\dfrac{a-E}{2}$,而且 x 与 $x+E$ 重合,则 $E=0$,得出 $x=\dfrac{a}{2}$为所求.

读完此书后,你便会明白这种方法与我们现在常用的 Δx 处理方法是一样的,它是微分方法的一个雏形.

下面从两个实例出发来探讨导数的概念.

第一节　导数的概念

1. 变速直线运动的瞬时速度

通常人们所说的物体的运动速度是指物体在一段时间内的平均速度，随着科学技术的发展，还要知道物体在某一时刻的瞬时速度.如研究子弹的穿透能力，必须知道弹头接触目标的瞬时速度等.

设有一质点在 x 轴上从某一点开始作变速直线运动.在时刻 t 时，质点的位置坐标为 x.这样可建立一个函数 $x=f(t)$称为质点的运动方程.

在物理学中，匀速运动的物体的速度等于质点在时间 t 内的位置的变化量(或位移)与时间 t 之比，即：$v=\frac{s}{t}$.但是，在实际问题中，运动往往是非匀速的，因此，上式只是表示质点在这段时间 t 内的平均速度.质点在这段时间内运动不仅快慢不一，而且还可能相差很大，所以平均速度是无法反映出运动变化快慢的.要精确地反映出这种变化，就得进一步探究在运动过程中每一瞬间的速度，即瞬时速度.那么何谓瞬时速度，又如何计算呢？

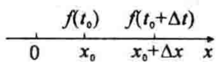


图 1－1

设在 $t=t_0$ 时，质点位置坐标为 $x_0=f(t_0)$.当 t 从 t_0 增加到 $t_0+\Delta t$ 时，x 相应地从 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$，即 $x_0+\Delta x=f(t_0+\Delta t)$，如图 1－1.

因此，质点在 Δt 这段时间内的位移为：$\Delta x=f(t_0+\Delta t)$

$-f(t_0)$. 而在 Δt 这段时间内质点的平均速度为：$\bar{v}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{f(\Delta t+t_0)-f(t_0)}{\Delta t}$.

一般说来，无论 Δt 取值怎样的小，平均速度 $\bar{v}$ 总不能精确地刻画质点运动在 $t=t_0$ 时的变化快慢. 当 Δt 变化时，平均速度 $\bar{v}$ 也随之变化，即使 Δt 很短很短，运动速度也是变化的. 当 $|\Delta t|$ 较小时，可以将平均速度 $\bar{v}$ 看作是质点在时刻 t_0 的"瞬时速度"的近似值，Δt 越小它就越接近瞬时速度. 于是我们很自然地把位移 Δx 与时间增量 Δt 之比当 $\Delta t\to 0$ 时的极限定义为质点在 $t=t_0$ 时的瞬时速度，即：$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$.

显然，瞬时速度的定义也给出了计算瞬时速度的方法，即计算上式的极限.

例 1 已知自由落体的运动方程为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$. 求：

(1)落体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度；

(2)落体在 t_0 时的瞬时速度；

(3)落体在 $t_0=2$ 秒到 $t_1=2.1$ 秒这段时间内的平均速度；

(4)落体在 $t=2$ 秒时的瞬时速度.

解 (1)落体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内(即 Δt 时间内)取得的路程增量为：

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2.$$

因此,落体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度为:

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}=\frac{1}{2}g\cdot\frac{\Delta t(2t_0+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t).$$

(2)落体在 t_0 时的瞬时速度为:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t)=gt_0.$$

(3)落体在 $t_0=2$ 秒到 $t_1=2.1$ 秒时,其时间增量 $\Delta t=t_1-t_0=0.1$ 秒,由(1)知平均速度为:

$$\bar{v}=\frac{1}{2}g(2\times 2+0.1)=2.05g\approx 20.09\text{ 米/秒}.$$

(4)由(2)知落体在 $t_0=2$ 秒的瞬时速度为:

$$v=g\times 2\approx 19.6\text{ 米/秒}.$$

从本例可以看到,当 Δt 较小时,平均速度 $\bar{v}$ 与瞬时速度 v 是很接近的.

思考 打夯机的重锤从 3 米高处自由落下,求它开始撞击地面的速度.

分析 开始撞击地面的速度是一个瞬时速度,要求出它必须知两点:(1)物体的运动规律;(2)撞击地面的时刻.

解 重锤从 3 米高处自由落下,故它作自由落体运动,其运动规律为 $s=\frac{1}{2}gt^2$,撞击地面的时刻为:

$$t=\sqrt{\frac{2g}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 3}{g}}\approx 0.8\text{秒}.$$

可得在时间变化量 Δt 内($\Delta t>0$)物体的平均速度 $\bar{v}$ 为:

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}g(0.8+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g0.8^2}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(1.6+\Delta t).$$

故撞击地面的瞬时速度为:$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=7.84$ 米/秒.

读者可参考物理学中的知识去计算比较.

2. 曲线的切线

在中学几何里,圆的切线被定义为与圆只有一个公共点的直线.对一般的曲线而言,便不能再这样讲了.例如,像曲线 $y=x^2$ 上任一点处必有两条切线,如图 1-2,而图 1-3 中的直线由于它与曲线交于两点,又不是曲线的切线了,这显然是不能令人满意的.因此,我们有必要研究切线的定义,下面,让我们从曲线的割线开始来研究.

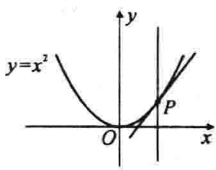


图 1-2

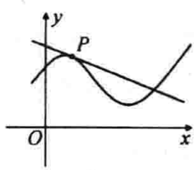


图 1-3

设 P_0 为曲线 C 上的一点,在其邻近任何一侧取曲线 C 上的一点 P_1,并作割线 P_0P_1,如图 1-4.若 P_1 沿 C 移至 P_1',P_1'',…各点,则割线 P_0P_1 将相继取不同的位置 P_0P_1',P_0P_1'',….若当 P_1 沿 C 趋向于 P_0 时,割线 P_0P_1 趋向于同一极限位置 P_0T,那么,这条直线 P_0T 就是曲线 C 在 P_0 处

的切线.若知道了 PT 的斜率,PT 的方程就可以写出来.现在的问题是如何描述割线的极限位置及切线的斜率?

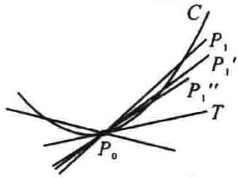


图 1-4

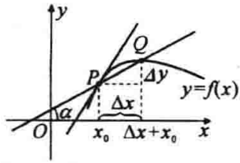


图 1-5

如果有一条平面曲线 C,如图 1-5,它的方程是 $y=f(x)$.在曲线 C 上任意另一点 Q,设它的坐标为$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$,其中 $\Delta x\neq 0$,$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.由解析几何知,过曲线 $y=f(x)$上二点 $P(x_0、y_0)$与 $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$的割线斜率 k' 是:$k'=\tan\alpha=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.当 Δx 变化时,即点 Q 在曲线上变化时,割线 PQ 的斜率 k' 也随之变化,当$|\Delta x|$较小时,割线 PQ 的斜率 k' 应是过曲线上点 P 的切线斜率的近似值,$|\Delta x|$越小近似程度也越好.于是当 Δx 无限趋近于零时,即点 Q 沿曲线无限趋近于点 P 时,割线 PQ 的极限位置就是曲线过 P 点的切线,同时割线 PQ 的斜率 k' 的极限 k 就是曲线过点 P 的切线的斜率,即:$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.于是,过曲线 $C: y=f(x)$上一点 $P(x_0、y_0)$的切线方程是:$y-f(x_0)=k(x-x_0)$.

切线斜率的定义也给出了计算切线斜率的方法.

例 2 求曲线 $y=x^3$ 上点(a, a^3)处的切线的方程.

解 由过曲线上点的切线斜率的定义知,在点(a, a^3)处

的切线斜率为：

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^3-a^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2]=3a^2$$

故所求的切线方程为：$y-a^3=3a^2(x-a)$.

上面两个实际例子的具体的含义是不同的.但从抽象的数量关系看,它们实质是一样的,都归结为计算函数值的增量与自变量的增量的比,当自变量增量趋于零的极限.下面我们来研究这样特殊的极限.

3. 导数的定义

1) $f(x)$在 x_0 处的导数

考察函数 $y=f(x)$,若自变量 x 在 x_0 处的增量为 Δx,则函数 y 相应的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.若称比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$为函数 $y=f(x)$在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率,则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在,称函数 $y=f(x)$在点 x_0 可导(或存在导数),此极限称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 的导数,表示为$f'(x_0)$或 $y'|_{x=x_0}$.简单地说,导数是差商的极限.

例 3 计算函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$在点 $x=0$ 处的导数.

分析 由导数的定义可知,求函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的

导数的方法是:

(1)求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$(求函数 y 的增量)

(2)求平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{\Delta x}$(求差商)

(3)取极限,得导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$(求极限)

解 $f(\Delta x)=(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}\quad(\Delta x\neq 0)$

$$\Delta y=f(\Delta x)-f(0)=(\Delta x)^2\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}$$

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}=0$

2)单侧导数

若自变量的增量 Δx 只从大于零或小于零的方向趋近于零,于是有:

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

都存在,分别称函数 $y=f(x)$在点 x_0 右方可导与左方可导,其极限分别称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 的右导数与左导数,分别表示为 $f'_+(x_0)$与 $f'_-(x_0)$.

显然函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导的充要条件是函数 y

$\Leftrightarrow f(x)$在 x_0 处的左、右导数都存在,且相等,即 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$. $f'_+(x_0)$、$f'_-(x_0)$统称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的单侧导数.

3)可导与连续的关系

(1)若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,则 $f(x)$在 x_0 处连续.

$\because$ 由 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$,

得 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$.

从而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,故 $f(x)$在点 x_0 处连续.

(2)尽管函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续,但 $f(x_0)$在 x_0 处不一定可导.

例 4 讨论函数 $f(x)=1-|x|$在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 ①连续性

$$f(x)=1-|x|=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1-x & x\geqslant 0\end{cases}$$

$f(x)$在 $x=0$ 处的左右极限分别为:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-x)=1,$$

从而有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$,又 $f(0)=1$,

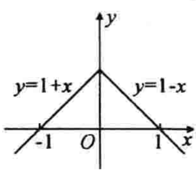


图 1-6

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$,

$\therefore\quad$ 函数 $y=f(x)$在 $x=0$ 处连续.

②可导性

$y=f(x)$在 $x=0$ 处的左导数为:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1,$$

$f(x)$在 $x=0$ 处的右导数为:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1,$$

则 $y=f(x)$在 $x=0$ 的左、右导数存在但不相等,故函数 $y=f(x)$在 $x=0$ 处不可导.

4)$f(x)$在(a,b)内可导

如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点都可导,就说 $f(x)$在开区间(a,b)内可导.其导数值 $f'(x)$也是一个随 x 而变化的函数,称为导函数,简称导数,记作 $f'(x)$或 y',即

$$f'(x)=y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

显然,$f(x)$在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$等于导数 $f'(x)$在 x_0 的值.

例 5 设 $f(x)=x^2$,求 $f'(x)$,$f'(-1)$,$f'(-2)$.

解 由导数的定义有:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x,$$

则 $f'(-1)=f'(x)|_{x=-1}=2\times(-1)=-2$;