# 数学世纪

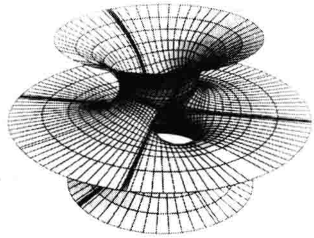
## —— 过去 100 年间 30 个重大问题

[意] 皮耶尔乔治·奥迪弗雷迪（Piergiorgio Odifreddi）著　胡作玄　胡俊美　于金青 译

上海科学技术出版社

# 数学世纪

——过去100年间30个重大问题



[意] 皮耶尔乔治·奥迪弗雷迪（Piergiorgio Odifreddi） 著

胡作玄 胡俊美 于金青 译

# 数学世纪

## ——过去100年间30个重大问题

上海科学技术出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

数学世纪：过去100年间30个重大问题／（意）奥迪弗雷迪（Odifreddi，P.）著；胡作玄，胡俊美，于金青译. —上海：上海科学技术出版社，2015.7

ISBN 978－7－5478－2678－2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①奥… ②胡… ③胡… ④于… Ⅲ. ①数学—研究 Ⅳ. ①O1－0

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第114220号



**数学世纪——过去100年间30个重大问题**
［意］皮耶尔乔治·奥迪弗雷迪（Piergiorgio Odifreddi） 著
胡作玄 胡俊美 于金青 译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版
（上海钦州南路71号 邮政编码200235）
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
200001 上海福建中路193号 www.ewen.co
上海商务联西印刷有限公司印刷
开本635×965 1/16 印张12.25
字数150千字
2015年7月第1版 2015年7月第1次印刷
ISBN 978－7－5478－2678－2/O·50
定价：28.00元

献给劳拉

她给予我时间和空间

带给我欢乐和平和

# 译者序

《数学世纪》的意大利文原版是在2000年，也就是20世纪最后一年出版的。正如原版书名《20世纪的数学》(*La matematica del Novecento*)明确指出的，论述整个20世纪的数学。20世纪的数学比起1900年以前的数学来有着显著的不同，我们不妨以“博大精深”来概括。从文献数量来讲，20世纪的数学专著及论文数约为1900年以前的50倍到100倍。当然这不是最主要的，最主要的是新兴领域及学科的建立与发展以及许多经典问题的解决；同时大量新的更有意义的问题的引入，为整个数学带来前所未有的活力。

1900年左右，我们还可以看到掌握几乎全部数学的大数学家，例如庞加莱(H. Poincaré)和希尔伯特(D. Hilbert)，而一般数学家则大都“术业有专攻”，他们或是纯粹数学家或是应用数学家，或是几何学家或是分析学家，而数论专家及代数学家则很少。到20世纪初，数学主要分为四块：数论、代数、几何、分析。后两块占主要部分。1900年以后，由于集合论的引入，产生出数理逻辑与结构数学两大新兴领域，这也由原版的副标题“从集合到复杂性”(*Dagli insiemi alla complessitá*)所显示。复杂性受到重视，显然由于本书作者就是位逻辑学家；而由布尔巴基学派所倡导的结构数学则是20世纪数学的主流及核心，其中包括抽象代数学、一般拓扑学、泛函分析、测度及积分理论，以及前沿的代数拓扑学、微分拓扑学、代数几何学及李群李代数理论等。不过，布尔巴基在给数学带来新鲜血液的同时，也忽略了许多重要的、特别是与计算机应用密切相关的领域，如计算数学、计算机数学、概率论、数理统计以及数学物理和离

散数学、运筹优化等等重要分支。显然，在一本小书中全面顾及这些领域是十分困难的。幸运的是，本书在以布尔巴基为主线的纯粹数学与应用数学、计算数学两方面取得适当的平衡。由于作者的逻辑专业，他在逻辑方面加了相当重要的材料，包括第 1 章的前言的概括，的确使本书生色不少。与此相对，一些艰深的数学远远超出一般读者甚至数学专业读者的理解，忍痛割爱也在所难免。作为补充，有兴趣的读者可参看国内外有关布尔巴基的论述。

数学，正如其他任何科学一样，除了建立理论之外，解决大问题是进展的标志。无疑，问题推动数学进步，数学理论与方法的进步也促使许多历史遗留的大问题逐步得到解决，况且，数学永远有研究不完的大小问题，这也是数学能永葆青春的保证。对 20 世纪来讲，希尔伯特在 1900 年提出的 23 个问题有相当重要的意义，本书也把一些问题的解决列入其中。

时至今日，数学中已解决的问题和尚未解决的问题非常之多。在本书的最后一章，作者举出他认为当时还没有解决的四大问题：古希腊时期的完美数问题，19 世纪的黎曼假设，20 世纪初提出的庞加莱猜想以及 20 世纪 70 年代提出的 P = NP 问题。除了老掉牙的完美数问题之外，另外三个问题也是克莱（Clay）数学研究所在 2000 年提出的七个“千年问题”中的三个。所谓英雄所见略同，而这无疑反映了数学界关注的焦点。当然作者也考虑到这三个问题能够为有一定数学知识的人所理解，尽管其解决对于数学家来讲是莫大的挑战。当然，大量数学问题是一般人甚至隔行的数学家也难以理解的。它们的重要性只能为少数大家及专家体会，在一本带有普及性的著作中，不得不一笔带过或者根本略而不谈。即使是一般读者能够理解的数学问题（约占全部问题的 1% 到 2%）经过许多数学家经年累月的努力，在 20 世纪也交了一份相当令人满意的答卷。已经解决的问题有：17 世纪提出的开普勒猜想和费

马大定理、19 世纪提出的极小曲面问题和四色猜想、1900 年希尔伯特提出的超越数问题（第七问题）和晶体群问题（第十八问题）都在 20 世纪得到解决，并且写进这本书。20 世纪初，庞加莱提出的庞加莱猜想，连同瑟斯顿（W. Thurston）的几何化猜想，在 21 世纪初得到了光辉的、完满的解决。俄国数学家佩雷尔曼（G. Perelman）最终在 2010 年获得为七个"千年难题"而设置的百万美元大奖（不过据说他拒领）。当然，方法之难也只有少数大家及专家能够掌握。

为了让读者能够体会一点 20 世纪数学的味道，作者采取一个好办法，就是宣告某某数学家获得国际数学大奖。众所周知，数学没有诺贝尔奖，而国际公认的数学大奖也少得可怜，在 20 世纪中后期，只有两项国际大奖为人称道，一项是从 1936 年起每四年一次召开的国际数学家大会上颁发的菲尔兹（Fields）奖，它是奖给 40 岁以下的年轻数学家的，到 2014 年，共有 56 位数学家获奖。另一项是沃尔夫（Wolf）数学奖，它从 1978 年起几乎每年颁发，它像诺贝尔奖一样，没有年龄限制，带有终身成就奖的味道。到 2015 年，正好也有 56 位大数学家获此殊荣。这些获奖者无疑代表着 20 世纪下半叶数学的最高成就。因此，书中也介绍了其中一些获奖者的成就，例如科恩（P. Cohen）的独立性定理（本书 2.10 节）、托姆（R. Thom）的奇点理论（本书 2.11 节）、柯尔莫哥洛夫（A. N. Kolmogorov）的概率论公理化（本书 3.5 节）等。这两个奖多是奖给纯粹数学方面的。21 世纪传来大好消息，挪威政府出资设立阿贝尔（Abel）奖。其奖金与诺贝尔奖相当，奖给当代最著名的数学家。阿贝尔奖从 2003 年起每年颁发，至 2014 年，共有 14 位大数学家获奖。首位获奖者是法国数学家塞尔（J. P. Serre），他是第一位三冠王，之前他也获得菲尔兹奖和沃尔夫奖。他获得菲尔兹奖时还不满 28 周岁，这项纪录至今无人打破。他的工作可谓"博大

精深”，不过只能在本书中一带而过。

布尔巴基学派虽然大大扩充了纯粹数学领域，但对于一些经典数学领域，特别是应用数学及与计算机有关的领域重视不够。而20世纪的数学特点正是纯粹数学与应用数学再度结合，它们的结合对双方都起着促进作用，特别是20世纪末的数学物理学。不过，这些领域比数学和物理的专门分支反而更加艰深。本书的一大特点就是专门论述前期的应用数学。例如数学与相对论和量子力学平行发展，对读者会有很大启发。

20世纪科技方面最伟大的成就当属电子计算机，它可以看成数学与电子学的结合的产物，同时给数学提出大量理论问题。它们对未来社会的发展至关重要，其中许多分支已进入寻常百姓家，如混沌理论（本书4.3节）、分形理论（本书4.5节）等。

正如英译本的副标题“上100年30个最重大的问题”所明示的，本书论述了20世纪数学中30项成就，纯粹数学（第2章）15项，应用数学（第3章）10项，加上与计算机有关的5项，总共15项，使得读者对于庞大的数学领域能有一个初步但全面的认识。尽管每一节读懂都并非易事。第1章基础虽在全书最前面，却是点睛之笔。读者读完全书之后，如能回来重读基础这章，对于数学的认识也许会有提高。而读者如果想要获得更宽广的眼界，建议读戴森（F. Dyson）的前言，他本人是沃尔夫物理学奖的获得者，对数学也很内行，尽管如他所说，物理学家和数学家看待数学的角度有所不同。其实，书中许多应用数学方面的成就，也使他们获得诺贝尔物理学奖或经济学奖、沃尔夫物理学奖以及图灵奖。而这正恰当地反映出在21世纪数学必将大有可为！

胡作玄

# 前言

17 世纪初，两位大哲学家，英格兰的培根(F. Bacon)和法国的笛卡儿（R. Descartes）宣告近代科学的诞生。他们每位都描绘他们自己对未来的图景，而他们的图景是十分不同的。培根说："一切都依赖于我们把眼睛紧盯在自然界的事实之上。"笛卡儿说："我思故我在。"按照培根的想法，科学家应该周游世界来搜集事实，直到积累起来的事实揭示出大自然是如何运作的。然后科学家会从这些事实中归纳出自然界所服从的规律。而按照笛卡儿的想法，科学家应该呆在家里冥思苦想来演绎出自然界的规律。为了正确地演绎出自然界的规律，科学家只需要逻辑规则与上帝存在的指示。从培根与笛卡儿开辟道路以来，四百年间，科学就是同时遵循这两条道路快速进步。无论是培根的经验主义还是笛卡儿的教条主义本身都不具有阐释自然界秘密的能力，但两者结合在一起则已经取得惊人的成功。四百年间，英国科学家倾向于成为培根派，而法国科学家则倾向于成为笛卡儿派。

法拉第（M. Faraday）、达尔文（C. Darwin）、卢瑟福（E. Rutherford）都是培根派；帕斯卡(B. Pascal)、拉普拉斯(P. S. de Laplace)、庞加莱则是笛卡儿派。科学就是由于这两种对立的民族文化的相互交流而大大丰富起来。两种文化也总是在两个国家中起作用。牛顿从本质上讲是笛卡儿派，他同笛卡儿企图那样运用纯粹思维，并用它击溃笛卡儿的涡旋理论。居里夫人(M. Curie)从本质上是培根派，她熬煮成吨的粗铀矿石来驳倒原子不可破坏的教条。

奥迪弗雷迪(P. Odifreddi)干成了一项出色的工作,在一本简短而又可读的书中讲述了20世纪的数学故事。我对奥迪弗雷迪的论述仅有的不满意的地方在于,从我的口味来看,它有点太笛卡儿式了。他论述数学史比我想象的更有条理,更有逻辑性。我正好是培根派,而奥迪弗雷迪则是笛卡儿派。在历史事实方面我们是没有分歧的,我们的分歧只是在于应当强调的重点所在。本书是奥迪弗雷迪对真理的描述,而我的描述则会多少有些不同。

对20世纪数学来讲,笛卡儿式的描述中有两个决定性的事件。第一个是1900年在巴黎举行的国际数学家大会,会上希尔伯特给出主旨演讲,他通过提出著名的23个未解决问题为即将到来的世纪的数学绘制出路线图。第二个决定性的事件是20世纪30年代法国的数学家结成布尔巴基(Bourbaki)的数学家小组,致力于出版一系列教科书,为的是给整个数学建立一个统一框架。希尔伯特问题在引导数学研究走向富有成果的方向上取得巨大成功。其中一些问题已经得到解决,还有一些仍未解决,但几乎所有问题都激发起数学的新思想和新领域的快速产生和发展。布尔巴基的计划同样具有巨大影响力,它改变其后50年数学的风范,给数学加上逻辑的协调性,而这在先前并不存在,同时把数学的重点由具体的实例移向抽象的一般性。在布尔巴基的事务体系中,数学无非是包含在布尔巴基的教科书中的抽象结构,而不在教科书中出现的就不是数学。具体的例子,因为它不出现在教科书中,就不是数学。布尔巴基的计划就是笛卡儿的数学风格的极端表现,它把数学领域大大缩窄,排除掉培根派的旅游者在路旁可能采撷到的所有美丽的花朵。幸运的是,奥迪弗雷迪不是一位极端的笛卡儿派,他容许许多具体的例子出现在他的书中。他收进来的美丽的花朵包括零散的有限群以及欧氏空间中的球的堆积。他甚至还在纯粹数学的例子之外同样加进一些应用数学的例子。他描述

菲尔兹奖，这是在每四年一次召开的国际数学家大会上给解决具体问题的或者创造新的抽象思想的年轻人的奖项。

我作为培根派，感到这本书的主要缺失之处是令人惊奇的要素。当我看数学史时，我见到一连串的不合逻辑的跃变、不太可能的巧合以及自然界的玩笑。自然界的最深刻的玩笑就是 -1 的平方根。物理学家薛定谔(E. Schrödinger)把它纳入他 1926 年提出的波动方程当中，而奥迪弗雷迪在书中第 3 章第 4 节中讨论量子力学的时刻就连提也没提到。薛定谔方程正确地描绘我们已知的关于原子行为的所有事情。它是全部化学以及大部分物理学的基础。 -1 的平方根就意味着自然界是用复数而不是实数运作。这个发现对薛定谔也如同对所有其他的人一样令人十分意外。据薛定谔讲，他的 14 岁的女朋友荣格(I. Junger)对他说："嘿，当你开始研究时，你甚至从来也没有想到，从这当中会出现如此多的合理的内容。"整个 19 世纪，数学家从阿贝尔(N. Abel)到黎曼(B. Riemann)到魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass)已经创造出一个宏伟的复变函数论。他们已经发现，当函数论从实数推广到复数时，就变得更为深刻，更加有力。但他们也总是把复数看成一个人工构造出的产物，只是实际生活中有用的和漂亮的抽象。他们从来也没有想到，这个由他们发明的人造的数系实际上是原子活动的场所。他们从来没有想象到，自然界首先在这个地方取得成功。

自然界的另一个玩笑是量子力学的精密的线性性，这个事实就是任何物理对象的可能状态形成一个线性空间。在量子力学发明之前，经典物理学总是非线性，而线性模型只是近似成立。量子力学出现之后，自然界本身突然变成线性的。这对数学产生深刻的后果。在 19 世纪，李(S. Lie)发展了他的关于连续群的复杂理论，为的是阐明经典动力学系统的行为。当时，无论是数学家还是物理学家对李群都没有什么兴趣。这个非线性理论对于数学家太

复杂，对于物理学家太费解，李去世时十分沮丧。然而，50 年之后，结果发现自然是精确线性的，李代数的线性表示理论成为粒子物理的自然语言。李群与李代数作为 20 世纪数学的中心主题获得重生。这在奥迪弗雷迪书中第 2 章第 12 节中有所讨论。

自然界的第三个玩笑是拟晶的存在，奥迪弗雷迪在第 3 章开头对此进行了简短讨论。在 19 世纪，晶体的研究导致欧氏空间中可能的离散对称群的完全列举。定理得到证明，也就是建立这样的事实：三维空间中离散对称群只可能包含三、四或六阶旋转。而在 1984 年发现了拟晶，这是由液体金属合金中产生出的真实固体，它有二十面体对称群，其中包括五重的旋转。大约同时，数学家彭罗斯（R. Penrose）发现平面的彭罗斯铺砌。这是一种平行四边形排列，它覆盖全平面，具有长程的五角形序列。三维的合金的拟晶就相当于二维的彭罗斯铺砌。在这些发现之后，数学家必须推广晶体群的理论以便把拟晶纳入其中。这是一个主要的研究计划，它仍在进行当中。

最后，我要提到我钟爱的培根式的梦想，寻找一维拟晶理论以及黎曼 $\zeta$ 函数理论之间的可能联系。一维拟晶无需有任何对称性。它可以简单定义为在一条直线上质点的非周期排列，它的傅里叶变换也是一条直线上质点的一种排列。由于缺少对对称性的要求，一维拟晶比起在二维或三维的拟晶来有更大的自由度。一维拟晶可能有多丰富，我们几乎一无所知。同样，关于黎曼 $\zeta$ 函数的零点（奥迪弗雷迪在第 5 章第 2 节讲述），我们也所知不多。黎曼假设是说，除了平凡的例外之外，所有 $\zeta$ 函数的零点都在复平面的某一条直线上。这是 1859 年由黎曼作出的猜想，也是整个数学最著名的未解决问题。我们所知的一个事实是，如果黎曼假设成立，则在临界直线上的 $\zeta$ 函数的零点按照定义是一个拟晶。假如黎曼假设成立，$\zeta$ 函数的零点具有一个傅里叶变换，它由在所有素

数幂的对数处的质点构成，而不含别处的质点。这就提供了证明黎曼假设的一个可能方法。首先，你对所有一维拟晶进行完全分类，列出表来。对新品种的对象进行收集和分类是培根式活动的完美典范。然后，你浏览这个表，看看其中是否有 $\zeta$ 函数的零点，如果有 $\zeta$ 函数的零点，则你就证明了黎曼假设，那你就只要等到下一届国际数学家大会来领取你的菲尔兹奖章。当然，这个方法最困难的部分是收集并分类拟晶，这只能作为一个练习留给读者。

弗里曼·戴森(Freeman Dyson)
美国新泽西州，普林斯顿高等研究院

# 致 谢

感谢哈伯德(J. Hubbard)和卡恩(P. Kahn)给了我最初的灵感,感谢巴尔托奇(C. Bartocci)、博诺托(C. Bonotto)、博塔齐尼(U. Bottazzini)、坎托尼(L. Cantoni)、科利诺(A. Collino)、德阿尔法罗(V. De Alfaro)、迪谢诺(S. Di Sieno)、埃默(M. Emmer)、贾卡尔迪(L. Giacardi)、洛利(G. Lolli)、马塔洛尼(C. Mataloni)、莫罗(A. Moro)、潘科内西(A. Panconesi)、雷吉(T. Regge)和瓦拉布雷加(P. Valabrega)在整个创作和最后的修订过程中的帮助。

# 目录