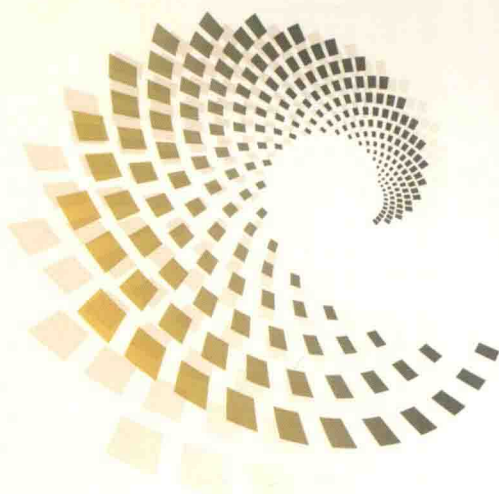


“十二五”国家重点图书

塑性非线性分析原理

Nonlinear Analysis Principle of Plasticity

曾攀 著



“十二五”国家重点图书

塑性非线性分析原理

Nonlinear Analysis Principle of Plasticity

曾攀著



机械工业出版社

结构在承受大的外载时将表现出弹塑性,材料在成形加工中将表现出塑性流动。前者涉及结构件的服役安全性,后者为现代制造业中最重要的材料加工手段之一。在学术上,塑性问题又涉及工程中最复杂的三大非线性问题:材料非线性、几何非线性(大变形)以及接触非线性,这给塑性问题的准确、高效分析带来很大的挑战。本书全面论述材料塑性的非线性分析原理,强调塑性非线性分析的工程概念、力学基础以及分析原理。全书共有7章,内容包括:固体力学问题的基本描述方法,线弹性问题的描述,材料非线性:塑性行为及描述,几何非线性:有限变形下的应变及应力描述,材料塑性行为的数值分析原理,接触问题非线性及其数值分析原理,金属塑性变形研究的前沿领域。全书涉及塑性中的三大非线性问题、求解塑性问题的各种数值分析原理、塑性加工中的成形与改性、变形/温度/组织三场耦合、超塑性、形状记忆合金、晶体塑性等论题,强调塑性问题的工程背景、力学本质以及数学逻辑,力求概念阐述清晰、重点内容突出、实例讨论深入等特点,便于读者研习。

本书可供机械、力学、材料、冶金、航空航天等专业的高年级本科生、研究生、工程技术人员、科研工作者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

塑性非线性理论—应用—塑性分析 Ⅳ. —北京:机械工业出版社,2015.6

“十二五”国家重点图书出版规划项目
ISBN 978-7-111-50377-4

I. ①塑… II. ①曾… III. ①非线性理论—应用—塑性分析 IV.

①O342

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第114331号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:孔劲 责任编辑:孔劲

版式设计:霍永明 责任校对:刘志文

封面设计:鞠杨 责任印制:李洋

三河市宏达印刷有限公司印刷

2015年9月第1版第1次印刷

169mm×239mm·19.25印张·339千字

0001—2500册

标准书号:ISBN 978-7-111-50377-4

定价:78.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88361066

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-68326294

机工官博:weibo.com/cmp1952

010-88379203

金书网:www.golden-book.com

策划编辑:010-88379772

教育服务网:www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

作者简介

曾攀，男，1963年生，海南省海口市人。1982年于西北工业大学获得学士学位，1985年于北京航空航天大学获得硕士学位，1988年于清华大学获得工学博士学位，1988年至1992年在大连理工大学及西南交通大学从事两站博士后研究，为德国“洪堡”学者（1994—1995）、国家杰出青年科学基金获得者（1998）、长江学者（2000）、“新世纪百千万人才工程”国家级人选，现为清华大学机械工程系教授、博导、先进成形制造教育部重点实验室学术委员会副主任、全国塑性工程学会副理事长，担任《机械工程学报》《工程力学》《塑性工程学报》、《锻压技术》等6个学术期刊的编委，为ICTP、NUMIFORM、ICFDM等国际会议学术委员会委员。先后主持国家自然科学基金重点项目、杰出青年基金、霍英东基金项目、大型横向合作项目等科研项目40多个，发表论文120多篇，已获得发明专利8项。出版及翻译学术著作6本，获得国家级、北京市教学成果奖3项，省部级一等、二等科技奖3项；长期从事有限元方法及数值模拟方面的教学工作，编写的教材入选教育部“研究生教学用书”、北京市高等教育精品教材、国家“十二五”规划教材。目前主要从事塑性非线性行为、材料成形数值模拟以及复杂装备的结构设计等领域的研究。

前 言

材料的塑性行为对于实际构件在两个方面有极为重要的影响，其一是在构件的成形制造方面，即将材料通过塑性成形的制造方式使其成为可以使用的零部件，这时的塑性非线性称为材料加工塑性非线性行为；其二是零部件在使用过程中的安全评价，即构件在承受大载荷时所表现出的塑性非线性行为，涉及材料的失效与安全。

在塑性成形方面，全世界的钢材约有 75% 需要通过塑性成形的方式进行加工。塑性成形不但能够制造出满足机器装备零部件要求的外形，还能够获得具有优异力学性能的材料组织结构，是重大机器装备关键零部件的首选成形制造手段之一，在核电装备、航空航天、汽车制造等行业中发挥着不可替代的作用。同时，塑性成形也是节约材料资源、降低制造成本的重要环节^{[1][2]}。例如，我国 1100MW 核电发电机的半速转子直径为 2050mm，长度为 16400mm，毛坯质量 310t，就是采用 560t 钢锭在 1.6 万 t 液压机上锻压成形的；美国 C-5A 飞机起落架外筒的尺寸为 2500 × 1100 × 450 (mm)，模锻件质量 1540kg，就是采用超高强度合金钢进行模锻一次性成形的；美国 F22 飞机机身隔框的尺寸为 4078 × 1680 × 178 (mm)，模锻件的质量为 1588kg，模锻件投影面积达到 5.53m²，也是采用钛合金进行模锻一次性成形的；美国卡麦隆 (Cameron) 公司采用 3 万 t 多向模锻液压机可以挤压出大口径多通道零件，其产品一直垄断国际高端市场；中国北方重工集团和清华大学合作，于 2009 年建成 3.6 万 t 大口径钢管垂直挤压成套装备，可以实现大口径钢管的挤压成形；西安航空高技术航空产业基地和清华大学合作，于 2012 年建造了 4 万 t 航空模锻液压机，为国际上最大的单缸模锻液压机，可以直接模锻出新一代飞机的高性能关键零部件；第二重型机器厂研制的世界上最大的 8 万 t 梁柱组合式液压机，将带动大件或特大件的整体成形的相关研究。

国家自然科学基金委在机械工程学科发展战略报告 (2011—2020) 中给出了高性能精确成形领域研究发展路线图 (见图 1)^[1]，就材料成形制造方面提出的重大科学问题之一就是“高性能精确成形制造过程的多场多尺度全过程建模仿真与优化”，具体表现在以下几个方面：

- 大型复杂高性能构件成形全过程多场耦合多尺度建模与模拟仿真

方法,介观尺度下微成形过程建模仿真方法。

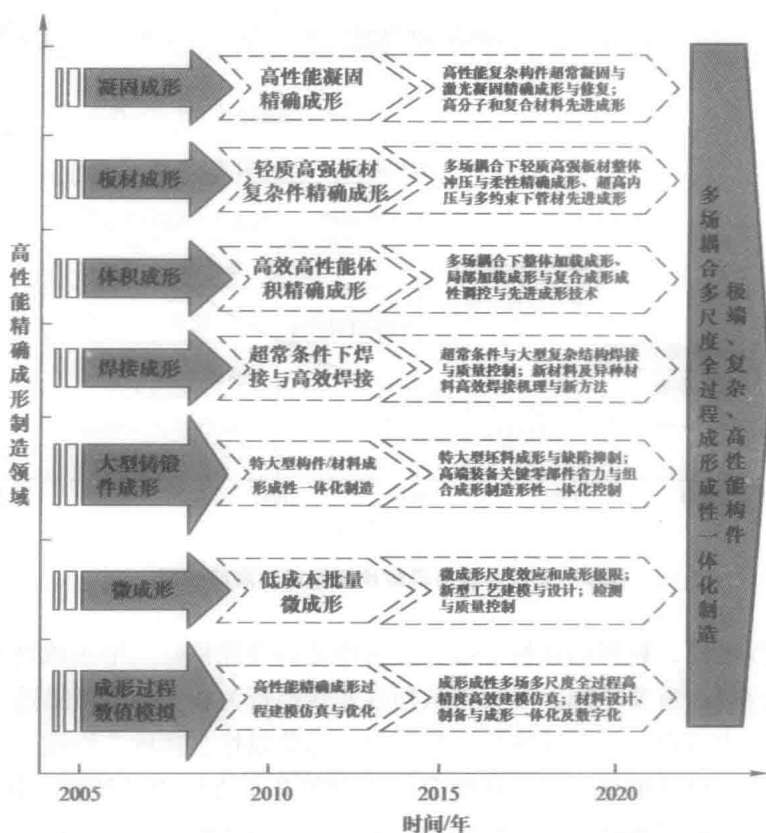


图1 高性能精确成形领域研究发展路线图

- 多场下大型复杂高性能金属零部件凝固与塑性成形成性规律、超常条件下焊接与高效焊接行为的多尺度全过程模拟仿真与分析。
- 基于多场多尺度全过程模拟仿真的大型复杂高性能构件成形成性过程的多参量、多目标、多约束优化设计、稳健控制与数字化精确成形。
- 零件性能与材料制备成形工艺的一体化设计、数字化与智能化,包括材料设计、制备、成形与热处理全过程组织、形状、尺寸和质量的精确控制方法。

上述各个方面无一例外地都涉及材料塑性问题的研究。

在重大装备的服役过程中所涉及的另一个领域为零件与结构的失效与安全服役(见图2)^[1];同样,材料的塑性行为也是一个重要的基础,如对于一些特别重要的零部件,都要求材料有足够的塑性变形能力,才可以使得材料在失效前有足够的吸收破坏能量的能力,所用装备才有安全

保障。

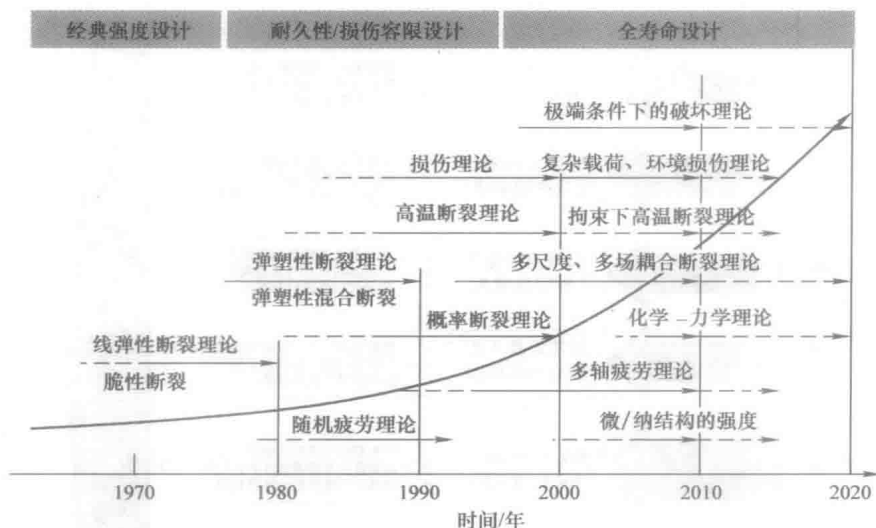


图2 失效评价与寿命预测领域发展路线图

可以看出，材料的塑性非线性行为将是高性能精确成形领域以及结构安全性评价的重要基础。本书将从塑性非线性行为相关的变量描述、试验方法、基本方程、材料非线性、几何大变形非线性、接触非线性、塑性非线性分析的经典原理与现代数值分析原理等几个方面来系统描述该问题，力求做到工程背景明确、数学表达简明、力学概念深刻，使读者对塑性非线性问题有深刻的理解。全书共分7章，相关的内容如下。

第1章为固体力学问题的基本描述方法，以非常明了的方式介绍基本力学变量、指标记法、物理量的坐标变换及张量、张量的不变量原理。

第2章为线弹性问题的描述，引入应力张量、应变张量、三大类方程及两类边界条件，并以指标变换的方式系统讨论正交各向异性以及各向同性材料的本构方程的表达式，给出应力张量、应变张量的重要性质及特征列表。

第3章为材料非线性：塑性行为及描述，介绍材料塑性行为的试验，包括塑性流动应力的试验方法、体积不变性及静水压力影响的试验、应力状态对材料塑性的影响、材料性能随温度的变化规律、几种典型的单向应力-应变曲线模型，系统描述了屈服条件、塑性强化准则、塑性应变流动法则、弹塑性本构方程的完整表达式。

第4章为几何非线性：有限变形下的应变及应力描述，从1D情形下

的真应力与真应变入手, 给出构形、变形梯度、极分解、速度梯度及大变形下应变的表示, 讨论了 Green 应变、小变形应变、单向拉伸情形的构形及变形、小角度的刚体转动等问题。进行三种平面变形情况下的分析, 比较了工程应变、Green 应变、Almansi 应变之间的关系。介绍了大变形下的应力表达、应变及应力的物质导数、大变形情况下的本构方程, 系统给出了大变形情形下的所有应变及应力表达式汇总。

第 5 章为材料塑性行为的数值分析原理, 为本书的重点。内容包括: 通过一个简单结构求解的时间离散过程入手, 系统论述关于时间过程的隐式方法与显式方法、塑性非线性数值分析的分类、一般弹性问题的变分原理、弹塑性问题分析的虚功原理、刚塑性有限元分析原理以及大变形问题的虚功原理及有限元列式。特别给出了处理体积不可压缩性的拉格朗日乘子法、不可压缩性的罚函数法以及采用体积近可压缩性的刚塑性问题变分原理。在有限元列式上, 给出基于当前构形的虚功原理、基于初始构形的虚功原理、大变形增量求解的 TL 方法、UL 方法、Euler 方法。还就数值分析中因积分引起的剪切自锁、沙漏等现象的本质原因进行剖析。

第 6 章为接触问题非线性及其数值分析原理, 内容包括: 塑性成形中的摩擦及特点、描述摩擦行为的模型、数值分析中接触摩擦模型的处理以及塑性成形中摩擦行为的试验测试方法, 在处理接触非线性问题的数值分析原理方面, 给出相应的虚功原理、拉格朗日乘子法、罚函数法、接触问题分析中的单元形式与接触搜寻。

第 7 章为金属塑性变形研究的前沿领域, 内容包括: 塑性变形的金属力学基础、超塑性变形、NiTi 形状记忆合金的耦合行为研究、晶体塑性及数值模拟。论述了金属塑性变形的晶体结构、成形与改性、变形/温度/组织的三场耦合原理。讨论了超塑性变形现象、超塑性的力学特性、超塑性变形机理及影响因素。就 NiTi 形状记忆合金的研究现状、热力耦合行为、本构关系、原位多场测量进行了系统的介绍。对晶体塑性研究领域中的数值分析原理及基于晶粒的有限元建模进行了论述。

本书的特点是强调对塑性问题的本质理解与分析原理的准确表达, 力求做到概念清晰、深入浅出, 注重逻辑性及可读性的统一, 为致力于塑性问题研究的科技工作者及研究生提供重要的素材。

本书的一些工作, 特别是第 7 章的研究, 得到国家自然科学基金项目 (No: 51275270) 的资助, 在此表示感谢。

清华大学机械工程系的方刚副教授、雷丽萍副教授对本书进行了认真的审读, 提出了许多建设性的修改意见。作者所指导的博士生杜泓飞完成

了本书 7.3 节的撰写,同时 7.4 节选用了作者所指导硕士生刘海军、曹鹏的学位论文的部分内容。在本书的撰写过程中,清华大学机械工程系的博士生杨沾沛,硕士生黑梦、莫戈、陈曦等参与了本书文稿的准备工作,博士生汪力骁、谢炜、奚柏立、萧遥、马哲,硕士生陈子砚、王倩、莫戈、贺哲龙、孙宇申、曹岚、吴瑛参与了本书的校核工作,张惠玲女士对本书的文字编辑也做出了重要贡献。在此,作者对上述各位人士表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中难免存在不足,敬请读者提出批评。

作者
于清华园

目 录

前言

第 1 章 固体力学问题的基本描述方法	1
1.1 基本力学变量	1
1.2 指标记法	3
1.3 物理量的坐标变换及张量表示	8
1.4 张量的不变量	13
第 2 章 线弹性问题的描述	17
2.1 应力张量	17
2.1.1 应力的定义	17
2.1.2 应力的坐标变换	19
2.1.3 应力张量的不变量	21
2.1.4 静水压力、球应力张量、偏应力张量、八面体应力	22
2.2 应变张量、球应变张量、偏应变张量、体积应变、应变率	25
2.3 三大方程之一：力的平衡方程	27
2.3.1 2D 情形下的平衡方程	27
2.3.2 3D 情形下的平衡方程	30
2.4 三大方程之二：变形的几何方程	30
2.4.1 2D 情形下的变形几何方程	30
2.4.2 3D 情形下的变形几何方程	32
2.5 三大方程之三：材料的本构方程	32
2.5.1 基于单向拉伸试验建立材料的本构方程	32
2.5.2 基于张量表达的材料本构方程	35
2.6 边界条件	47
2.7 线弹性问题的变量及方程汇总	48
2.8 应力张量、应变张量的重要性质及特征列表	50
第 3 章 材料非线性：塑性行为及描述	53

3.1 材料非线性塑性行为的试验	53
3.1.1 塑性流动应力的试验方法	55
3.1.2 温度、变形程度、变形速率对流动（屈服）应力的影响	58
3.1.3 塑性成形体积不变性及静水压力影响的试验	63
3.1.4 应力状态对材料塑性的影响	64
3.1.5 材料的物理量随温度的变化规律	66
3.1.6 几种典型的单向应力-应变曲线模型	70
3.2 复杂应力状态下的一般性屈服条件	71
3.2.1 直接试验方法	71
3.2.2 金属材料常用的屈服准则	73
3.3 各种情形的屈服面	79
3.3.1 等向强化屈服面	80
3.3.2 随动强化屈服面	81
3.3.3 混合强化屈服面	81
3.3.4 考虑静水压力的屈服准则	81
3.3.5 考虑体积近不可压缩性的屈服条件	82
3.4 塑性应变流动法则	83
3.4.1 稳定性的概念	83
3.4.2 材料行为的稳定性	84
3.4.3 加-卸载准则与流动法则	86
3.5 弹塑性本构方程的完整描述	89
3.5.1 等效应力与等效应变	89
3.5.2 弹塑性本构方程的一般表达式	93
3.5.3 比例加载情形下的弹塑性本构方程	95
3.5.4 各向异性情形下的弹塑性本构方程	99
3.5.5 其他屈服函数	104
第4章 几何非线性：有限变形下的应变及应力描述	106
4.1 1D情形下的真应力与真应变	106
4.2 构形、变形梯度、极分解、速度梯度	109
4.3 有限变形下的应变表示	111
4.4 关于应变的讨论	113
4.4.1 Green 应变的物理含义	113
4.4.2 小变形下的应变表示	117
4.4.3 单向拉伸情形的构形及变形分析	118
4.4.4 形变张量 E 或 C 的主方向特征	120
4.4.5 三种平面变形情况下的分析及比较	121

4.4.6 小角度的刚体转动	123
4.4.7 实例讨论: 工程应变、Green 应变、Almansi 应变的比较	124
4.5 有限变形下的应力表达	126
4.5.1 有限变形状态下的体积及面元变化	127
4.5.2 当前构形中的 Cauchy 应力	129
4.5.3 初始构形中的第一类 Piola - Kirchhoff 应力 (非对称张量)	129
4.5.4 初始构形中的第二类 Piola - Kirchhoff 应力 (对称张量)	130
4.5.5 第二类 Piola - Kirchhoff 应力张量的刚体转动性质	131
4.6 应变及应力的物质导数	131
4.6.1 物质导数	131
4.6.2 速度梯度与变形率	132
4.6.3 与刚体运动无关的 Almansi 本构应变速率	134
4.6.4 与刚体运动无关的 Jaumann 应力率	135
4.7 有限变形情况下的本构方程	136
4.7.1 Kirchhoff 材料	136
4.7.2 超弹性材料	137
4.7.3 次弹性材料	138
4.7.4 弹塑性材料	138
4.7.5 黏性材料	138
4.8 有限变形的应变及应力表达式汇总	139
第 5 章 材料塑性行为的数值分析原理	142
5.1 线弹性问题求解的隐式算法与显式算法	143
5.2 关于时间过程的隐式算法与显式算法	148
5.2.1 时间离散过程的显式算法格式	148
5.2.2 时间离散过程的隐式算法格式	149
5.2.3 关于时间离散格式的稳定性	152
5.2.4 显式算法与隐式算法的应用范围	156
5.3 塑性问题的非线性数值分析分类	157
5.4 一般弹性问题的变分原理	157
5.4.1 变分原理	157
5.4.2 虚功原理	159
5.5 弹塑性问题分析的虚功原理	160
5.5.1 塑性问题的增量方程	160
5.5.2 增量形式的虚功原理及有限元列式	161
5.6 刚塑性有限元分析原理	162
5.6.1 刚 (黏) 塑性问题的基本方程	163

5.6.2	求解刚塑性问题的一般变分原理	164
5.6.3	处理体积不可压缩性的拉格朗日乘子法	165
5.6.4	处理体积不可压缩性的罚函数法	166
5.6.5	考虑体积近可压缩性的刚塑性问题变分原理	167
5.6.6	求解刚塑性问题的几种方法比较	168
5.6.7	刚(黏)塑性问题的变分原理	169
5.6.8	刚塑性问题的有限元分析列式	171
5.6.9	刚性区的处理及初始速度场的确定	175
5.7	有限变形问题的虚功原理及有限元列式	179
5.7.1	基于当前构形的平衡关系及虚功原理	179
5.7.2	基于初始构形的当前平衡关系及虚功原理	180
5.7.3	有限变形分析的有限元列式	183
5.7.4	有限变形增量求解的 TL 方法	188
5.7.5	有限变形增量求解的 UL 方法	192
5.7.6	有限变形问题求解的 Euler 方法	196
5.8	数值积分中所出现问题的讨论(剪切自锁,沙漏)	200
第 6 章 接触问题非线性及其数值分析原理		205
6.1	接触摩擦非线性:塑性成形中的摩擦行为	205
6.1.1	塑性成形中的摩擦及特点	205
6.1.2	经典摩擦定律	206
6.1.3	塑性成形中的摩擦模型	207
6.1.4	接触与摩擦的三个条件及表达式	208
6.1.5	非线性摩擦条件的光滑化处理	210
6.1.6	塑性成形中摩擦行为的试验测试	211
6.2	接触问题分析的虚功原理	214
6.3	接触问题分析的拉格朗日乘子法	215
6.4	接触问题分析的罚函数法	217
6.5	接触问题分析的有限元列式	218
6.6	接触问题有限元方程的求解方法	223
6.6.1	显式算法	223
6.6.2	隐式算法	225
6.7	接触问题分析中的单元形式与接触的搜寻	225
第 7 章 金属塑性变形研究的前沿领域		228
7.1	塑性变形的金属力学基础	228
7.1.1	金属材料的结构层次	228

7.1.2 金属的晶体滑移系与 Schmid 因子	228
7.1.3 塑性加工过程中变形、温度与组织的三场耦合	231
7.2 超塑性变形	237
7.2.1 超塑性变形现象	237
7.2.2 超塑性的力学特性	238
7.2.3 超塑性变形机理及影响因素	239
7.3 NiTi 形状记忆合金中的局部化变形与相变塑性行为研究	240
7.3.1 NiTi 形状记忆合金的研究现状	240
7.3.2 NiTi 形状记忆合金的热-力耦合行为	242
7.3.3 形状记忆合金耦合行为的原位多场测量方法	244
7.3.4 形状记忆合金耦合行为的试验结果	248
7.3.5 NiTi 形状记忆合金的本构关系	255
7.4 晶体塑性及分析原理	259
7.4.1 晶体塑性的描述	259
7.4.2 晶体塑性的数值分析原理	268
7.4.3 单晶体塑性变形的数值模拟	271
7.4.4 多晶体塑性变形的试验与数值模拟	274
参考文献	282
索引	288

第1章 固体力学问题的基本描述方法

1.1 基本力学变量

本书主要研究具有复杂几何形状的固体物质在外载的作用下所发生的力学现象，包括大载荷作用下的材料非线性行为、几何大变形行为以及各个物体之间的相互接触行为。这些行为都是高度非线性的，仅在小载荷作用下，其材料的变形行为才能够近似为线弹性。无论是非线性行为还是线性行为，描述材料及结构的力学变量的种类是相同的。在定义描述固体物质变形的基本变量时，应考虑两个因素：①可测量性。②与固体物质的几何形状无关性。也就是需要定义能够描述固体物质变形时的本质特征的物理量，而不随着物体的几何形状变化而变化。对于固体物质变形时的力学行为，至少应该有以下变量或涉及以下变量：①位移，②力。

这两类变量都是具有可测量性的，但还需进一步考虑如何定义与固体物质几何形状无关的本质特征变量。

下面以简单的拉杆拉伸试验为例来说明如何定义描述固体物质变形时的本质特征的物理量，如图 1-1a 所示，考虑 3 组单向拉伸试验如下。

- 第 1 组试验：为基准试验，即采用一个等截面的试样，在其两端作用有拉力，测量在受载过程中的拉力与位移之间的关系。
- 第 2 组试验：相对于第 1 组试验的试样，将试样的横截面面积增大一倍，同样，测量在受载过程中的拉力与位移之间的关系。
- 第 3 组试验：相对于第 1 组试验的试样，将试样的长度增大一倍，同样，测量在受载过程中的拉力与位移之间的关系。

设计第 2 组及第 3 组试验的目的是改变原试样的几何特征，即：横截面面积及长度，进而考察试样在承受外载时的力学行为。假定所施加的外载荷较小，可以得到这 3 组试验的拉力 - 位移曲线，如图 1-1b 所示。可以看出，这 3 组试验曲线都是线性的，但不重合。若进一步改变试样的横截面面积或长度，将得到更多的试验曲线。也就是说，直接将拉力及位移

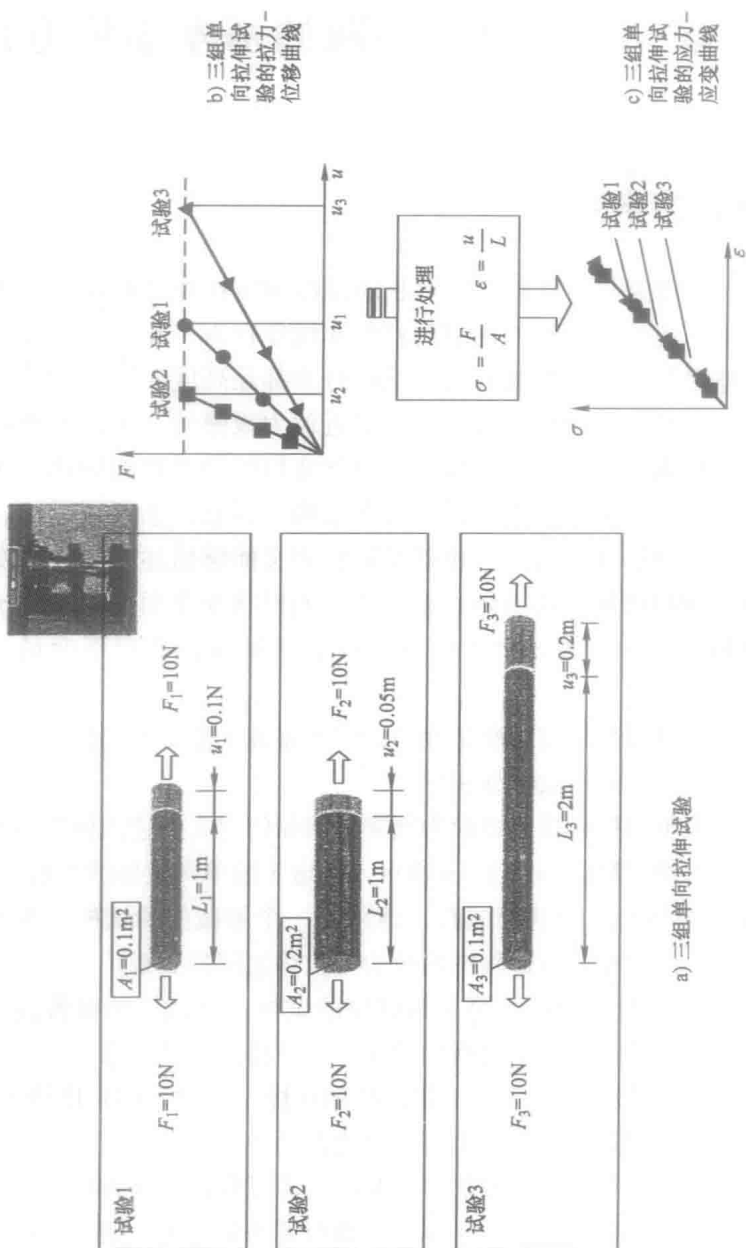


图 1-1 三组单向拉伸试验以及试验曲线的处理

作为力学参量的话,虽然对同一种材料,但得到的试验曲线是与试样的几何形状相关的。为了获得描述该材料在受载变形时的本质物理量,需要定义更为抽象的变量,也就是如何将图 1-1b 中的 3 根曲线变为 1 根曲线,而该曲线仅与材料性质相关,与试样的几何形状无关。这样的曲线就是单向拉伸情形下材料的本构关系。如图 1-1c 所示,若将载荷(力)除以横截面面积来定义应力,将试样的伸长量除以试样的原长来定义应变,这样重新画出应力-应变曲线,这三组曲线将完全重合。因此,可以得到启示:只有定义抽象的应力及应变,才能够准确地描述材料的力学行为,该行为仅与材料性质有关,而与试样的几何形状无关。

通过对以上最简单的单向拉伸情形的讨论,可以归纳出描述固体物质变形力学行为的基本物理量种类有 3 类,即

- 位移——可直接测量的物理量;
- 应力——抽象的间接物理量,可用来描述材料的受力状态;
- 应变——抽象的间接物理量,可用来描述材料的变形状态。

在三维问题中,其作用的力可以分解成 3 个分量,定义应力时所需要考虑的空间立方体的特征作用面也有 3 个,因此,在定义应力时(作用力除以面积)的组合量将达到 9 个,这时,应该采用更科学的指标记法来表达。对于应变也是这样,具体的讨论见第 2 章。

基于 3 大类描述固体物质变形力学行为的基本物理量,还可以进一步定义出一些组合物理量以描述变形过程中的能量变化关系,如外力功、变形功、功率等,这些组合物理量在建立 3 大类变量之间的方程时将起到非常重要的作用。

1.2 指标记法

对于一个真实的物理量,需要采用一定的坐标系来进行描述。比较常用的方法就是使用基于坐标系的分量来进行表达。若选用的坐标系不同,则在各个坐标系中的分量也不相同。因此,我们需要研究针对同一个物理量以及在各个坐标系中分量的转换关系,从而引入指标记法,即基于坐标系的各个分量来表达物理量的方法。

指标记法(indicial notation)的下标约定如下。

- 自由指标(free index)。即每项中只出现一次的下标,如 σ_{ij} ,其中 i, j 为自由指标,它们将依照坐标系的坐标轴依次变化;在平面问题中(或记为 2D 问题),自由指标变化的范围为 1、2,在三维问题中(或记为 3D 问题),自由指标变化的范围为 1、2、3,它对应直角坐标系中的 3