普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学（下册）

GAODENG SHUXUE

主　编◎聂　宏　阎慧珍　宫　华
副主编◎祝丹梅　赵晓颖　李　阳　魏晓丽　赵峥嵘
主　审◎苏晓明

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学

（下册）

主　编　聂　宏　阎慧珍　宫　华
副主编　祝丹梅　赵晓颖　李　阳
　　　　魏晓丽　赵峥嵘
主　审　苏晓明

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是辽宁省10所理工科院校基础课系列教材之一，专门为经管类各专业本科生而编写。

全书分上、下两册，共九章. 上册主要内容包括函数极限与连续、一元函数微分学、不定积分、定积分及其应用. 下册主要内容包括微分方程和差分方程、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和数学实验.

本书精心构建教材内容，将基础知识的学习、数学思维的训练和强化融为一体，同时注重与中学数学的衔接及数学知识引入背景的阐述，强调数学概念、性质、定理的几何直观表述，并突出数学应用性的介绍. 全书图文并茂，结构严谨，推理严密，叙述深入浅出，说理透彻，富于启发. 书中所选例题、习题覆盖面广，反映最新考研动态，具有较强的代表性. 按节配有适量习题，每章配有总习题，书末附有答案和提示.

本书既可作为经管类各专业本科生教材和辅导材料，也可作为工程技术人员学习的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学./聂宏，阎慧珍，宫华主编. —北京：北京理工大学出版社，2015.7

ISBN 978-7-5640-9895-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①聂…　②阎…　③宫　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第246270号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 /100081
电　　话 /(010) 68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址 /http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /三河市华骏印务包装有限公司
开　　本 /787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 /24
字　　数 /662千字
版　　次 /2015年7月第1版　2015年7月第1次印刷
定　　价 /47.80元（上下册）

责任编辑 /钟　博
文案编辑 /钟　博
责任校对 /周瑞红
责任印制 /马振武

前　　言

高等数学是理、工、经、管各专业一门重要的公共基础课，它涵盖丰富，论证严谨，在生产实践和各专业领域中有着广泛的应用. 它为后续专业课程的学习提供必备的理论基础，同时对学生分析问题及解决问题能力的培养将产生重要而深远的影响.

本书以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》和国家教育部考试中心发布的《硕士研究生入学统一考试数学 3 考试大纲》为依据，以培养学生专业素质和创新能力为出发点，结合编者长期积累的教学经验和体会编写而成，目的是为经管学科的学生提供一本反映专业特色和最新考研动态的教材.

本书精心构建教材内容，将基础知识的学习、数学思维的训练和强化融为一体，如从多侧面对重点和难点内容加以剖析，揭示出其本质和内涵，重点例题后配有思考题和答案等. 同时注重与中学数学的衔接及数学知识引入背景的阐述，强调数学概念、性质、定理的几何直观表述，并突出数学应用性的介绍，特别是在经济管理方面的应用，以培养学生运用数学知识分析和解决实际问题的能力，并为专业课程的学习打牢基础.

本书图文并茂，结构严谨，推理严密，叙述深入浅出，说理透彻，富于启发. 书中所选例题、习题覆盖面广，反映最新考研动态，具有较强的代表性. 按节配有适量习题，每章配有总习题，书末附有答案和提示.

本书是辽宁省 10 所理工科院校基础课系列教材之一，分上、下两册，共九章. 上册主要内容包括函数极限与连续、一元函数微分学、不定积分、定积分及其应用. 下册主要内容包括微分方程和差分方程、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数和数学实验.

全书由辽宁石油化工大学聂宏教授主持编写，由辽宁省多所高校多位同仁集体创作完成。其中第一章由赵晓颖(辽宁石油化工大学)执笔，第二章由魏晓丽(辽宁石油化工大学)执笔，第三章和第四章由聂宏(辽宁石油化工大学)执笔，第五章由李阳(辽宁石油化工大学)执笔，第六章和第七章由祝丹梅(辽宁石油化工大学)执笔，第八章由阎慧臻、赵峥嵘(大连工业大学)执笔，第九章由宫华(沈阳理工大学)执笔，全书由祝丹梅组稿，上册由辽宁石油化工大学陈明明教授主审，下册由沈阳工业大学苏晓明教授主审.

本书在编写过程中，得到了北京理工大学出版社及辽宁省多所高校同行专家的鼎力支持，得到了辽宁石油化工大学教务处的大力支持和帮助，编者深表谢意.

由于编者水平有限，书中不妥之处，敬请专家及读者批评指正.

目　　录

第五章　微分方程与差分方程

在实际问题中，往往很难直接得到所研究的变量之间的函数关系，反而更容易建立一个关于未知函数的导数或微分的方程，我们称此类方程为微分方程. 微分方程建立以后，设法求出满足方程的未知函数，这就是解微分方程. 现实世界中的许多问题都可以在一定的条件下被抽象为微分方程，例如人口的增长问题、经济的增长问题等都可归结为微分方程的问题. 因此微分方程是数学联系、应用于实际的重要途径，是数学及其他学科进行科学研究的有力工具. 我们在这一章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的一阶、二阶微分方程的解法.

另外，在经济管理和许多的实际问题中，已知的数据大多数是按等时间间隔周期统计的，因而相关变量的取值是离散变化的. 如何寻求它们之间的关系及变化规律呢？差分方程是研究这样的离散型数学问题的有力工具，本章在最后介绍差分方程的一些初步应用.

第一节　微分方程的基本概念

定义 5.1　含有自变量、自变量的未知函数及未知函数的(若干阶)导数或微分的方程称为微分方程. 如果未知函数是一元的，通常称此方程为常微分方程；如果未知函数是多元的，通常称此方程为偏微分方程.

本章只讨论常微分方程.

定义 5.2　在微分方程中，未知函数的导数或微分的最高阶的阶数称为微分方程的阶.

若微分方程中未知函数的导数或微分的最高阶数是一阶，称此方程为一阶微分方程，记为 $F(x,y,y')=0$ 或 $y'=f(x,y)$；若微分方程中未知函数的导数或微分是二阶及以上，称此方程为高阶微分方程. 一般的 n 阶微分方程可表示为 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 或 $y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$.

例如：$y'=4x+10$ 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2+2$ 都是一阶的微分方程；$y'''=x+5(y')^5+6$ 是三阶微分方程.

思考题 5－1－1

$4x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=5x-6$ 和 $(y'')^2+\sin xy'-x^2+y^2+2=0$ 是几阶微分方程？

定义 5.3　若把函数 $y=\varphi(x)$ 代入微分方程使微分方程恒成立，则称 $y=\varphi(x)$ 是该微分方程的一个解.

例如：$y=2x^2+10x$，$y=2x^2+10x+C$(C 是任意常数)都是微分方程 $y'=4x+10$ 的解.

定义 5.4　把含有与微分方程的阶数相同个数的独立的任意常数(即它们不能合并而使得任意常数的个数减少)的解称为该**微分方程的通解**；不含任意常数的微分方程的解称为该**微分方程的特解**.

例如：

$y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解，而 $y=3\sin x+5\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的特解.

微分方程的通解可以通过一定的条件确定其中的每一个任意常数的数值，这时的微分方程的解即为特解；确定每一个任意常数的值的条件称为**微分方程的初始条件**；微分方程与初始条件合称**微分方程的初值问题**.

例如:$y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解;加上条件 $y\Big|_{x=0}=-1,y'\Big|_{x=0}=1$ 可确定 $C_1=1,C_2=-1$,从而得到 $y=\sin x-\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的特解;其中条件 $y\Big|_{x=0}=-1$,$y'\Big|_{x=0}=1$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的初始条件;把 $\begin{cases}y''+y=0\\ y\Big|_{x=0}=-1,y'\Big|_{x=0}=1\end{cases}$ 称为微分方程的初值问题.

一般来说,$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y\Big|_{x=x_0}=y_0\end{cases}$ 是一阶微分方程的初值问题;$\begin{cases}y''=f(x,y,y')\\ y\Big|_{x=x_0}=y_0,y'\Big|_{x=x_0}=y_1\end{cases}$ 是二阶微分方程的初值问题,等等.

微分方程的解的图形是一条曲线,称为微分方程的积分曲线.通解的图形是一族积分曲线,特解是这一族积分曲线中的某一条积分曲线.初值问题的几何意义就是求微分方程满足初始条件的某条积分曲线.

思考题 5-1-2

已知一曲线经过点(0,1),且曲线上任意一点处的斜率是其横坐标的4倍,求此曲线.

例 5.1 验证

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x \tag{5.1}$$

是微分方程

$$y''+y=e^x \tag{5.2}$$

的解.

解 因 $y'=C_1\cos x-C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x,y''=-C_1\sin x-C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x$,

故 $y''+y=-C_1\sin x-C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x+C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x=e^x$ 成立.函数(5.1)及其导数代入微分方程(5.2)后成为一个恒等式,因此函数(5.1)是微分方程(5.2)解.

思考题 5-1-3

函数(5.1)是微分方程(5.2)通解吗?如何说明?

例 5.2 已知函数(5.1)是微分方程(5.2)通解,求(5.2)满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=0$,$y'\Big|_{x=0}=0$ 的特解.

解 将 $y\Big|_{x=0}=0,y'\Big|_{x=0}=0$ 代入例5.1中 y 及 y' 的表达式,得

$$\begin{cases}C_1\sin 0+C_2\cos 0+\frac{1}{2}e^0=0\\ C_1\cos 0-C_2\sin 0+\frac{1}{2}e^0=0\end{cases},$$

解得 $C_1=-\frac{1}{2},C_2=-\frac{1}{2}$,故所求特解为 $y=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}e^x$.

习题 5-1

1. 选择题:

(1) 微分方程 $y'=3y^{\frac{2}{3}}$ 的一个特解是(   ).

A. $y=x^3+1$　　B. $y=(x+2)^3$　　C. $y=(x+C)^2$　　D. $y=C(1+x)^3$

(2) 函数 $y=\cos x$ 是下列哪个微分方程的解(　　).

A. $y'+y=0$　　B. $y'+2y=0$　　C. $y''+y=0$　　D. $y''+y=\cos x$

(3) $y'=y$ 满足 $y\Big|_{x=0}=2$ 的特解是(　　).

A. $y=e^x+1$　　B. $y=2e^x$　　C. $y=2\cdot e^{\frac{x}{2}}$　　D. $y=3\cdot e^x$

(4) 微分方程$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0$ 的通解是 $y=$(　　).

A. $\frac{C}{x}$　　B. Cx　　B. $\frac{1}{x}+C$　　D. $x+C$

(5) $y''=e^{-x}$的通解为 $y=$(　　).

A. $-e^{-x}$　　B. e^{-x}　　C. $e^{-x}+C_1x+C_2$　　D. $-e^{-x}+C_1x+C_2$

2. 验证函数 $y=Ce^{-3x}+e^{-2x}$(C 为任意常数)是方程$\frac{dy}{dx}=e^{-2x}-3y$ 的通解,并求出满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=0$ 的特解.

第二节　可分离变量的一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0. \tag{5.3}$$

如果从(5.3)中能解出 y',则一阶微分方程可表示为 $y'=f(x,y)$.

一阶微分方程有时也可以写成 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

如果一阶微分方程为$\frac{dy}{dx}=f(x)$或 $dy=f(x)dx$,则只需等式两边积分即得 $y=\int f(x)dx+C$.

并非一阶微分方程都可以如此求解的,如$\frac{dy}{dx}=x^3y$,原因是方程右端含有未知函数,积分$\int x^3y\,dx$ 求不出来. 为了解决这个困难,在方程的两端同乘以$\frac{dx}{y}$,使方程变为$\frac{dy}{y}=x^3dx$. 这样,变量 y 与 x 被分离在等式的两端,然后两端积分得

$$\int\frac{dy}{y}=\int x^3dx+C\Rightarrow\ln|y|=\frac{1}{4}x^4+C,$$

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{5.4}$$

的一阶微分方程称为可分离变量的微分方程.

方程(5.4)的求解方法如下:

首先分离变量,即把 $f(x)$,dx 与 $g(y)$,dy 分别移到方程的两端:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$$

再对两端分别求积分,即可求得微分方程的通解

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C,$$

其中 C 是任意常数.

注:(1) 在求通解时,我们主要关心 $g(y)\neq 0$ 的情况. 如 $g(y)=0$ 则不妨设 $y=y_0$ 是 $g(y)=0$ 的零点,即 $g(y_0)=0$,代入原方程,可知常数函数 $y=y_0$ 显然是方程(5.4)的一个特解,此种情况常不另外考虑.

(2) 在上述的通解表示式中,$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ 与 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 分别表示的是一个具体的原函数;两个不定积分中出现的任意常数归并在一起记为 C.

例 5.3　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2(1+y^2)$ 的通解.

解　分离变量可得 $\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=3x^2\mathrm{d}x$.

两端分别求积分得到通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int 3x^2\mathrm{d}x+C,\text{即 } \arctan y=x^3+C.$$

其中 C 是任意常数. 该通解也可写为 $y=\tan(x^3+C)$.

思考题 5-2-1

求方程 $y'=2xy$ 的通解.

例 5.4　求微分方程 $4x\mathrm{d}x-3y\mathrm{d}y=3x^2y\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}x$ 的通解.

解　合并同类项得 $x(4-y^2)\mathrm{d}x=3y(1+x^2)\mathrm{d}y$.

分离变量得

$$\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{3y}{4-y^2}\mathrm{d}y,$$

积分得

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=-\frac{3}{2}\ln|4-y^2|+C_1,$$

得通解为 $1+x^2=C|4-y^2|^{-3}$,其中 C 是一个正的任意常数($C=\mathrm{e}^{2C_1}$).

思考题 5-2-2

求解方程 $xy'-y\ln y=0$.

例 5.5　设一曲线经过点(2,3),它在两坐标轴间的任一切线段被切点所平分,求这一曲线的方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=y(x)$,则曲线上任一点 (x,y) 处的切线方程为 $\frac{Y-y}{X-x}=y'$.

由已知,当 $Y=0$ 时,$X=2x$,代入上式即得到所求曲线应满足的微分方程及初始条件

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x}\\ y\Big|_{x=2}=3\end{cases}.$$

此方程为可分离变量的微分方程,易求得通解为 $xy=C$.

又因 $y\Big|_{x=2}=3$,则 $C=6$,故所求的曲线为 $xy=6$.

思考题 5-2-3

在商品销售预测中,在时刻 t 的销售量用 $Q=Q(t)$ 表示,如果商品销售的增长速度(即边

际销售）$\dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}$正比于销售量与销售接近于饱和水平的程度$N-Q(t)$之积，求销售量函数.

习题 5－2

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $x^2\mathrm{d}y+(3xy-y)\mathrm{d}x=0$；　　(2) $(y-1)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$；

(3) $xy\mathrm{d}x=(1+y^2)\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}y$；　　(4) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$.

2. 求满足方程$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=nf(x)$，其中$n>1, n\in N$的可导函数$f(x)$.

3. 求微分方程$\begin{cases} x(y^2+1)\mathrm{d}x+y(1-x^2)\mathrm{d}y=0 \\ y\Big|_{x=0}=1 \end{cases}$的特解.

4. 求微分方程$\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0$满足条件$y(0)=1$的特解.

第三节　齐 次 方 程

定义 5.5　如果一阶微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$中的函数$f(x,y)$可以变为$\dfrac{y}{x}$的函数，即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$的形式，习惯上称这样的微分方程为齐次方程.

例如，方程$(xy-y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$就是齐次方程，因为我们可以把此方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}=\frac{\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\dfrac{y}{x}\right)}.$$

要求出齐次方程的通解，我们可以用变量代换的方法.

设齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5.5}$$

假设$u=\dfrac{y}{x}$，则可以把齐次方程(5.5)化为可分离变量的微分方程. 因为$u=\dfrac{y}{x}$，则$y=ux$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$代入方程(5.5)可把原方程变为$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g(u)$，即$x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g(u)-u$. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

等式两端积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+C.$$

记$G(u)$为$\dfrac{1}{g(u)-u}$的一个原函数，再把$u=\dfrac{y}{x}$代入，则可得方程(5.5)的通解为$G\left(\dfrac{y}{x}\right)=\ln|x|+C$，$C$为任意常数.

例 5.6　解方程$y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 原方程可变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}=\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x}-1}$,显然是齐次方程.

故令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $y=ux$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,于是原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1}.$$

再分离变量,得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分,得

$$u-\ln|u|+C=\ln|x|,$$

即 $\ln|ux|=u+C$,得到原方程的通解为 $\ln|y|=\dfrac{y}{x}+C$.

思考题 5-3

求解方程 $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$.

注:齐次方程的求解实质是通过变量替换,将方程转化为可分离变量的方程. 变量替换法在解微分方程中有着特殊的作用,但困难之处是如何选择适宜的变量替换. 一般来说,变量替换的选择并无一定之规,往往要根据所考虑的微分方程的特点来构造.

例 5.7 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+2xy+y^2$ 的通解.

解 令 $u=x+y$,则

$$y=u-x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1.$$

原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=u^2$,即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\mathrm{d}x$,两端积分,得

$$\arctan u=x+c.$$

把 u 用 $x+y$ 换回,得原方程的通解为 $x+y=\tan(x+c)$.

习题 5-3

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y(x^2-xy+y^2)\,\mathrm{d}x+x(x^2+xy+y^2)\,\mathrm{d}y=0$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$.

2. 求微分方程 $xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$ 的特解.

3. 求微分方程 $\begin{cases} y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \\ y\Big|_{x=1}=2 \end{cases}$ 的特解.

第四节　一阶线性微分方程和伯努利方程

一、一阶线性微分方程

定义 5.6　把方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{5.6}$$

称为**一阶线性微分方程**. 如果方程(5.6)中的 $Q(x)\equiv 0$,则把此时的方程(5.6)称为齐次的;如果 $Q(x)$不恒等于零,则把方程(5.6)称为**非齐次的**.

设方程(5.6)是非齐次的微分方程,为求出其通解,首先我们讨论(5.6)式所对应的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

的通解问题. 显然这是一个可分离变量的方程,它的通解为

$$y=C\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{5.7}$$

现在我们使用常数变易法来求非齐次线性方程(5.6)的通解. 此方法是将(5.7)通解中的常数 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$,即作变换

$$y=u\cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{5.8}$$

假设(5.8)式是非齐次线性方程(5.6)的解. 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-uP(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{5.9}$$

将(5.8)式和(5.9)式代入方程(5.6),得

$$u'\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-uP(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+P(x)u\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

即

$$u=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C.$$

将上式代入(5.8)式,得到非齐次线性微分方程(5.6)的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right). \tag{5.10}$$

注:(1)将公式(5.10)中的不定积分 $\int P(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ 分别理解为一个原函数;

(2)将(5.10)式写成如下两项之和:

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

不难发现:第一项是对应的齐次线性方程的通解,第二项是对应的非齐次线性方程(5.6)的一个特解. 由此得到一阶线性非齐次微分方程的通解之结构为对应的齐次线性微分方程的通解与非齐次线性微分方程的特解之和.

例 5.8　求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{3}{2}}$ 的通解.

解　这是一个非齐次线性微分方程,由公式(5.10)得

$$y=\mathrm{e}^{-\int(-\frac{2}{x+1})\mathrm{d}x}\left[\int(x+1)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\int(-\frac{2}{x+1})\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$= e^{\ln(x+1)^2}\left[\int (x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\ln(x+1)^2} dx + C\right]$$
$$= 2(x+1)^{\frac{5}{2}} + C(x+1)^2.$$

由此例的求解可知,若能确定一个方程为一阶线性非齐次微分方程,求解它只需套用公式(5.10)即可,当然也可以用常数变易法进行求解.

思考题 5－4

求方程$\frac{d\rho}{d\theta}+3\rho=2$的通解.

例 5.9　求微分方程 $y dx+(x-y^3)dy=0$ 的通解(设 $y>0$).

解　如果将方程改写为　$\frac{dx}{dy}-\frac{y^3-x}{y}=0$,即 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=y^2$.

这是一个把 x 当因变量而把 y 当自变量的一阶线性微分方程,用公式可直接得到通解为

$$x = e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(\int y^2 e^{\int\frac{1}{y}dy}\,dy + C\right),$$

积分得

$$x=\frac{1}{y}\left(\frac{1}{4}y^4+C\right).$$

二、伯努利方程

定义 5.7　形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \tag{5.11}$$

的微分方程称为伯努利方程,其中 n 为常数,且 $n\neq 0,1$.

伯努利方程是一类非线性微分方程,但通过适当的变换就可以把它转化为线性的微分方程.在(5.11)式的两端除以 y^n,可得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)\text{或}\frac{1}{1-n}(y^{1-n})'+P(x)y^{1-n}=Q(x),$$

于是令 $z=y^{1-n}$,就得到关于变量 z 的一阶线性微分方程

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

利用求解公式(5.10),再把变量 z 换回原变量,可得(5.11)的通解为

$$y^{1-n} = e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}\,dx + C\right].$$

例 5.10　求方程$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=(a\ln x)y^2$ 的通解.

解　方程两端除以 y^2,令 $z=y^{-1}$,则原方程可变为

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=-a\ln x,$$

可得

$$z=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right].$$

再把变量 z 换回原变量,可得原方程的通解为 $yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$.

三、一阶微分方程在经济上应用的实例

例 5.11　(新产品推广模型)设某产品的销售量 $Q(t)$是时间 t 的可导函数,如果该产品的销售量对时间的增长速率$\frac{dQ}{dt}$与销售量 $Q(t)$及销售量接近于饱和水平的程度 $N-Q(t)$之积成正比(N 为饱和水平,比例常数为 $k>0$),且当 $t=0$ 时 $Q(0)=\frac{1}{4}N$. 求:(1) 销售量 $Q(t)$;(2) 销售量 $Q(t)$增长最快的时刻 T.

解　(1) 由题意可建立如下微分方程:

$$\frac{dQ}{dt}=kQ(N-Q),(k>0)$$

此方程为可分离变量的微分方程,从中解出 $Q(t)$,得

$$Q(t)=\frac{NCe^{Nkt}}{Ce^{Nkt}+1}.$$

由 $Q(0)=\frac{1}{4}N$,得 $C=\frac{1}{3}$,故可得

$$Q(t)=\frac{N}{1+3e^{-Nkt}}. \tag{5.12}$$

(2) 对(5.12)求一阶、二阶导数得

$\frac{dQ}{dt}=\frac{3N^2ke^{-Nkt}}{(1+3e^{-Nkt})^2}$,$\frac{d^2Q}{dt^2}=\frac{-3N^3k^2e^{-Nkt}(1-3e^{-Nkt})}{(1+3e^{-Nkt})^3}$. 令$\frac{d^2Q}{dt^2}=0$,得 $T=\frac{\ln 3}{Nk}$.

当 $t<T$ 时,$\frac{d^2Q}{dt^2}>0$;当 $t>T$ 时,$\frac{d^2Q}{dt^2}<0$. 故当 $T=\frac{\ln 3}{Nk}$时,$Q(t)$的增长速度是最快的.

注:习惯上把$\frac{dQ}{dt}=kQ(N-Q)(k>0)$称为 Logistic 方程,该方程的解曲线 $Q(t)=\frac{N}{1+Be^{-Nkt}}$称为 Logistic 曲线. 在经济学、生物学等中常遇到这样的变化规律.

习题 5 - 4

1. 求解微分方程:

(1) $(y^2-6x)y'+2y=0$;　　(2) $\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}$;

(3) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\sin x$;　　(4) $y'=\frac{2y-x^2}{x}$;

(5) $xy'+(1-x)y=e^{2x}$;　　(6) $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$.

2. 求微分方程$\begin{cases}(x+1)y'-2y-(x+1)^{\frac{7}{2}}=0\\ y\big|_{x=0}=1\end{cases}$的特解.

3. 求微分方程 $y'+\frac{1}{x}y+e^x=0$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的特解.

4. 求$\frac{dy}{dx}-y\cdot\tan x=\sec x, y\big|_{x=0}=0$ 的特解.