数理化巧思妙解大全

初中代数

巧思妙解大全

延边大学出版社

理化巧思妙解大全

初中代数巧思妙解大全

主编　赵云田

编委　刘[illegible]　郭炳臣　董宪强

李绍[illegible]　姜　浩　田百伶

王希文　杨立华　费维和

李　智　杨文仲　赵云田

延边大学出版社

（吉）新登字 13 号

数理化巧思妙解大全
（初中代数巧思妙解大全）
策　　划：山中水
主　　编：赵云田

责任编辑：金光星
封面设计：张沭沉

延边大学出版社出版
吉林省新华书店发行
吉林省科技印刷厂印刷
开本：787×1092 毫米　1/32
印张 11.0 字数：234 千字
1998 年 2 月第二版
1998 年 2 月第一次印刷
印数：3001—4000 册

ISBN 7—5634—0810—X/O·48
定价：11.00 元

前　言

本书收入了有一定难度并能采用巧妙解法的 200 余道例题。每题都介绍了一般解法和巧妙解法，并对巧妙解法的解题思路进行了较为详尽的阐述，目的是为了突出巧妙解法的简捷性和逻辑性。其中有些例题还介绍了两种以上的巧妙解法，以帮助同学们能够从更多的新角度、新侧面去研究问题，从而锻炼思维的准确性、深刻性、灵活性和创造性。

在编写中，我们注重了选择例题的典型性和趣味性，解题思路的广阔性和巧妙性，解题方法的规范性和独特性，同时又注意到把学习方法渗透到学习知识之中，对学生已学习的知识进行层层引导、适时点拔、适当拓宽，以开发学生的思路，启迪他们的思维，激发他们学习的兴趣。

本套书既可和教材配套使用，又可单独成册

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.

第一章　数

基础知识概要

数学运算要求思路正确，方法简捷，结果准确。本章内容主要是数与代数式的基本运算，涉及到的基础知识有：

1、**运算律**

加法交换律：$a+b=b+a$

加法结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$

加法对乘法的分配律：$(b+c+d)\cdot a=ba+ca+da$

乘法交换律：$ab=ba$

乘法结合律：$a(bc)=(ab)\cdot c$

2、**乘法公式**

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

上面公式若从左往右用可作乘法运算，若从右往左用，就可以将一个多项式分解因式。

【例1】 计算 $(-2.4)+(-3.7)+(+4.2)+(+0.7)+(-4.2)$

思路分析　本题若按常规的顺序计算是较复杂的，但若

进行一些适当的变换，巧妙的将某些互为相反数，两数之和为整数的数凑在一起计算，会简化计算。

一般解法：原式$=(-2.4)+(-3.7)+(-4.2)+(+4.2)+(+0.7)$

$=(-6.1)+(-4.2)+(+4.2)+(+0.7)$

$=(-10.3)+(+4.9)$

$=-5.4$

巧妙解法：原式$=[(-3.7)+(+0.7)]+[(+4.2)+(-4.2)]+(-2.4)$

$=(-3)+0+(-2.4)$

$=-5.4$

【例 2】 计算$-1\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times(-\frac{3}{5})$

思路分析　本题是乘除混合运算，若按运算顺序是较复杂的，可把小数转化为分数，把除法转化为乘法，并首先计算出运算符号，这样会使分数便于约分。简化计算步骤。

一般解法：原式$=(-\frac{3}{2})\times\frac{4}{3}\times(-\frac{1}{5})\times\frac{7}{4}\div\frac{7}{5}\times(-\frac{3}{5})$

$=(-2)\times(-\frac{1}{5})\times\frac{7}{4}\div\frac{7}{5}\times(-\frac{3}{5})$

$=\frac{2}{5}\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times(-\frac{3}{5})$

$=-\frac{3}{10}$

巧妙解法：原式$=-\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{3}{5}\right)$

$=-\frac{3}{10}$

【例 3】 计算 $3\frac{1}{2}\times\left[1\frac{5}{7}\times\left(1\frac{2}{3}-2\right)-\frac{4}{7}\right]$

思路分析　本题含有两级运算，并带有括号，怎样去括号是简算的关键，我们发现 $3\frac{1}{2}\times1\frac{5}{7}=\frac{7}{2}\times\frac{12}{7}=6$，且 $3\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{7}{2}\times\left(-\frac{4}{7}\right)=-2$。所以，本题的括号可以从外向里去（即先去中括号，再去小括号）。

一般解法：原式$=3\frac{1}{2}\times\left[1\frac{5}{7}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{7}\right]$

$=\frac{7}{2}\times\left[\frac{12}{7}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{7}\right]$

$=\frac{7}{2}\times\left[\left(-\frac{4}{7}\right)-\frac{4}{7}\right]$

$=\frac{7}{2}\times\left(-\frac{8}{7}\right)$

$=-4$

巧妙解法：原式$=\frac{7}{2}\times\frac{12}{7}\times\left(\frac{5}{3}-2\right)+\frac{7}{2}\times\left(-\frac{4}{7}\right)$

$=6\times\left(\frac{5}{3}-2\right)+(-2)$

$=10-12-2$

$=-4$

【例 4】 计算 $\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{16}+\frac{3}{4}\right)\times(-48)-1.35\times6+3.85\times6$

思路分析　本题若按运算顺序，先算括号内，之后相乘，再计算加、减这样运算较复杂。若巧用乘法的分配律，会收到简化运算之效果。

一般解法：原式$=\frac{25}{48}\times(-48)\times1.35\times6+3.85\times6$

$=-25-8.1+23.1$

$=-33.1+23.1$

$=-10$

巧妙解法：原式$=(-\frac{1}{6})(-48)+(-\frac{1}{16})(-48)+\frac{3}{4}(-48)+[(-1.35)+3.85]\times6$

$=8+3-36+2.5\times6$

$=-10$

【例 5】 计算$\frac{-1}{1\times2}+\frac{-1}{2\times3}+\frac{-1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{-1}{1993\times1994}$

思路分析　本题若按常规计算是很困难的，我们可以巧用拆项法，如：$\frac{-1}{1\times2}=-(1-\frac{1}{2})$，$\frac{-1}{2\times3}=-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$，……，这样会使一些项消掉，可大大的简化计算。

一般解法：按常规计算极困难。（略）

巧妙解法：原式$=-(1-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})-\cdots\cdots-(\frac{1}{1993}-\frac{1}{1994})$

$=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots\cdots-\frac{1}{1993}+\frac{1}{1994}$

$=-1+\frac{1}{1994}$

$=-\frac{1993}{1994}$

【例 6】 计算$(1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+99^2)-(2^2+4^2+6^2+$

……$+100^2$)。(91 年天津初二数学竞赛题)

思路分析　若将每个数平方之后再加、减显然很复杂，我们可以巧妙的分组，然后利用平方差公式，可奏奇效。

巧妙解法 1：原式$=1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+99^2-2^2-4^2-6^2-\cdots\cdots-100^2$

$=-[(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+(100^2-99^2)]$

$=-[(2+1)(2-1)+(4+3)(4-3)+(6+5)(6-5)+\cdots\cdots(100+99)(100-99)]$

$=-(3+7+11+\cdots\cdots+199)$

$=-\dfrac{50(3+199)}{2}$

$=-5050$

巧妙解法 2：原式$=1^2+(2+1)^2+(4+1)^2+\cdots\cdots+(98+1)^2-(2^2+4^2+\cdots\cdots+100^2)$

$=1^2+2^2+4+1+4^2+8+1+\cdots\cdots+98^2+98\times2+1-2^2-4^2-\cdots\cdots-100^2$

$=50+4+8+\cdots\cdots+98\times2-100^2$

$=50+\dfrac{(4+196)\times49}{2}-10000$

$=4950-10000$

$=-5050$

【例 7】 计算$-2^{10}+\left(-\dfrac{1}{2^2}\right)^2+(-2)^{10}+(-1)^{1995}\times(0.25)^2$

思路分析　本题若按常规运算是很复杂的，而且计算量较大，但我们仔细观察后发现，本题中有几对相反数相加，我

们可将其结合在一起运算起来简捷。

一般解法：原式$=-1024+\frac{1}{16}+1024+(-1)\times\frac{1}{16}$

$=\frac{1}{16}-\frac{1}{16}$

$=0$

巧妙解法：原式$=-2^{10}+(\frac{1}{4})^2+(-2)^{10}+(-1)\times(\frac{1}{4})^2$

$=(-2^{10}+2^{10})+[(\frac{1}{4})^2-(\frac{1}{4})^2]$

$=0+0$

$=0$

【例 8】 计算：$(-0.25+0.125)\div(-\frac{1}{2^2})^2-(\frac{11}{16}-0.125)\div(-0.5)^3$

思路分析　本题是一道四则混合计算题，而且分数、小数混合在一起，这就更使运算复杂化，为使运算准确、简捷、迅速，需要将分数、小数统一起来，需要灵活的运用运算律。

一般解法：原式$=(-\frac{1}{8})\div\frac{1}{16}-(\frac{11}{16}-\frac{1}{8})\div(-\frac{1}{8})$

$=-2-\frac{9}{16}\times(-8)$

$=-2+\frac{9}{2}$

$=2\frac{1}{2}$

巧妙解法：原式$=[(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8})\times16]-(\frac{11}{16}-\frac{1}{8})\div(-0.125)$

$=(-4+2)-(\frac{11}{16}-\frac{1}{8})\times(-8)$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$=-2-\left[\frac{11}{16}\times(-8)+\left(-\frac{1}{8}\right)\times(-8)\right]$

$=-2-\left(-\frac{11}{2}+1\right)$

$=-2+\frac{9}{2}$

$=2\frac{1}{2}$

【例 9】计算 997^2

思路分析　一般解法是直接利用乘法 997×997，这种运算较复杂，可以巧用乘法公式将其展开。

一般解法：(略)

巧妙解法 1：$997^2=(1000-3)^2=1000^2-2\times1000\times3+3^2$

$=1000000-6000+9$

$=994009$

巧妙解法 2：$997^2=997^2-3^2+9=(997+3)(997-3)+9$

$=1000\times994+9$

$=994009$

【例 10】计算 $\overbrace{99\cdots9}^{n个}\times\overbrace{99\cdots9}^{n个}+1\overbrace{99\cdots9}^{n个}$

思路分析　本题若通过常规的计算是相当复杂的，根据题目的特点，若巧妙的引进一个辅助字母进行代换，可以简化运算过程，迅速而又准确的求出结果。

一般解法：原式$=(\overbrace{99\cdots9}^{n个})^2+10^n+\overbrace{99\cdots9}^{n个}$

$=(\overbrace{99\cdots9}^{n个})\cdot(\overbrace{99\cdots9}^{n个}+1)+10^n$

$$=\overbrace{99\cdots9}^{n\text{个}}\times10^n+10^n$$

$$=10^n\times(\overbrace{99\cdots9}^{n\text{个}}+1)$$

$$=10^n\times10^n$$

$$=10^{2n}$$

巧妙解法：设$\overbrace{99\cdots9}^{n\text{个}}=A$，则$A+1=10^n$

原式$=A^2+(A+1)+A$

$$=A^2+2A+1$$

$$=(A+1)^2$$

$$=(10^n)^2$$

$$=10^{2n}$$

【例 11】求证：$\sqrt{\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}}-\overbrace{22\cdots2}^{n\text{个}}}=\overbrace{33\cdots3}^{n\text{个}}$

思路分析　本题若根据常规的方法先计算被开方数，之后开方，那是很困难的，不妨我们也采用巧换元的方法加以证明。

一般证法：

左边$=\sqrt{\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}}\times10^n+\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}}-2\times\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}}}$

$$=\sqrt{\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}}\times10^n-\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}}}$$

$$=\sqrt{\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}}\times(10^n-1)}$$

$$=\sqrt{\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}}\times9\times\overbrace{11\cdots1}^{n\text{个}}}$$

$=\sqrt{9\times(\overbrace{11\cdots1}^{n个}{}^2)^2}$

$=\overbrace{33\cdots3}^{n个}=$右边

∴等式得证。

巧妙证法：设$\overbrace{11\cdots1}^{n个}=A$，

则，左边$=\sqrt{(A\times10^n+A)-2A}$

$=\sqrt{A\times10^n-A}$

$=\sqrt{A(10^n-1)}$

$=\sqrt{A\times\overbrace{99\cdots9}^{n个}}$

$=\sqrt{A\cdot9A}$

$=\sqrt{9A^2}$

$=3A$

$=\overbrace{33\cdots3}^{n个}=$右边

∴原等式成立。

评注　上面的两个例题均采用巧换元的方法加以解题。当题目中的某些数字（或字母、代数式）较多，而且有一定的规律，在解题过程中不易发现其内在的关系，这时可采用换元法，将其简化，这样会给解题带来莫大的方便。

【例 12】 已知数 $A=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)+1$

试确定 A 的个位数是多少？

思路分析　此题若采用计算的方法来确定个位数，是相当繁杂的；若进行一些巧妙的变形会收到简捷的效果。

巧妙解法：$\because 1=2-1$，

由公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，得

$(2-1)(2+1)=2^2-1$

$(2^2-1)(2^2+1)=2^4-1$

$(2^4-1)(2^4+1)=2^8-1$

……

$\therefore A=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)+1$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)+1$

$=2^{128}-1+1$

$=2^{128}=4^{64}=16^{32}$

$=\overbrace{16\times16\times\cdots\times16}^{32个}$

由此可知 A 的个位数是 6。

【例 13】 若 $a\times c\times\overline{ac}=\overline{ccc}$，其中 a、c 各是一位整数；$\overline{ac}$ 表示十位数字是 a，个位数字是 c 的两位数；$\overline{ccc}$ 表示三个数位上的数字都是 c 的三位数。求：a，c 的值及原式。

思路分析　本题在刚开始接触时，似乎摸不着头绪，但经过仔细地分析已知条件，发现：可对式子 $a\times c\times\overline{ac}=\overline{ccc}$ 进行约分，约分后，得 $a\times\overline{ac}=111$，即 $a\times(10a+c)=111$，由此可知 a，c 均为奇数。然后通过计算可以求得 c，进而求得 a。

巧妙解法：$\because a\times c\times\overline{ac}=\overline{ccc}$

$\therefore a\times\overline{ac}=111$

即 $a\times(10a+c)=111$　　①

又知两数之积为奇数，则这两数必为奇数。

$\therefore a$ 与（$10a+c$）都为奇数

$\therefore c$ 也必为奇数

由①式得：$C=\frac{111}{a}-10a$ ②

又 C 为整数，所以 a 必能整除 111，而在 1～9 这些数中，能够整除 111 的奇数只有 1 和 3。

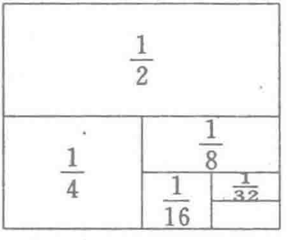
$\therefore$ 当 $a=1$ 时，由②式得 $c=101$，这与 C 为一位数相矛盾。

当 $a=3$ 时，由②式得 $C=7$

$\therefore$ 原式为：$3\times7\times37=777$

【例 14】 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots$。

思路分析　这是求无限多个分数之和的问题，本题可利用等比数列的求和公式去做（高中知识），但也可利用初中所学过的知识去求解。我们利用构造图法来解。这样，就是连小学生都能做得出的简单计算了。



巧妙解法： 如图，我们作一个边长为 1 的正方形。并依次进行等分，这样就可以得到矩形、正方形、矩形、正方形、矩形……。这些图形的面积依次为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$……。从而可得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots=1$$

评注　本题思路之巧妙，高中的知识，我们通过简单的几何图形就可求解。

【例 15】计算：$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$。

思路分析　本题是求无穷个分数之和，若利用常规的方法是很难求出结果。但我们可以根据题目的特点，巧妙的进行代换，就使得问题简明得多。

巧妙解法：　设$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots=x$

则　$3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots-\frac{1}{3}\right)=x$

即　$3\left(x-\frac{1}{3}\right)=x$

解之，得 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore$　$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}$

评注　本题巧解之处在于将原式加 1，减 1 后提取了公因数 3，然后余下因式中的 $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots-\frac{1}{3}\right)$ 可用 x 代换成 $\left(x-\frac{1}{3}\right)$。这样通过解一次方程可求出 x。

【例 16】计算 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{1993^2}\right)\left(1-\frac{1}{1994^2}\right)$。

思路分析　本题若直接运用乘法运算是很复杂的，可根据每个因式的特点，利用平方差公式进行因式分解，然后再计算可大为简捷。

一般解法：

原式$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{1994}\right)\left(1-\frac{1}{1994}\right)$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.