世纪云图 理工社®

2016［张宇考研数学系列丛书］

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（试卷分册·数学三）

史上最全
含1987—2015年
全部真题

AUTHENTIC EX-
AMINATION PAPERS
WITH ANSWERS

□ Mr. Zhang

张宇◎主编

http://www.yuntubook.com
世纪云图
刮涂层 查真伪

赠张宇考研数学真题视频选讲
视频上线日期：2015年6月19日
注册网站会员可下载本书视频
（使用方法见封三）

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世纪云图 理工社®

[张宇考研数学系列丛书]

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（试卷分册 · 数学三）

张宇 ◎ 主编

编委（按姓氏拼音顺序）：蔡燧林 高昆轮 胡金德 刘国辉 杨洋 亦一（笔名）
于吉霞 曾凡（笔名） 张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 试卷分册. 数学三 / 张宇主编. — 北京 : 北京理工大学出版社，2015. 5

ISBN 978－7－5682－0402－6

Ⅰ. ①张…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－习题集　Ⅳ. ①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 068219 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 6
字　　数 / 147 千字
版　　次 / 2015 年 5 月第 1 版　2015 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 / 46.00 元(共 2 册)

责任编辑 / 梁铜华
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

目　录

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷Ⅳ，Ⅴ均为现在的数学三.

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅳ）

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$. （ ）

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x\,dx=0$. （ ）

(3)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 必发散. （ ）

(4)假设 D 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子式，且 $D\neq 0$，但含 D 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0. （ ）

(5)连续型随机变量取任何给定实数值的概率等于 0. （ ）

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分）

(1)下列函数在其定义域内连续的是

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$.

(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0.\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(2)若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $a<x_1<x_2<b$，则至少存在一点 ξ，使得

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\ (a<\xi<b)$.

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)\ (x_1<\xi<b)$.

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\ (x_1<\xi<x_2)$.

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)\ (a<\xi<x_2)$.

(3)下列广义积分收敛的是

(A) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}dx$.

(B) $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$.

(C) $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)^2}$.

(D) $\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

(4)设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，那么在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量中

(A)必有 r 个行向量线性无关.

(B)任意 r 个行向量都线性无关.

(C)任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组.

(D)任意一个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表示.

(5)若二事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$，则

(A) A 和 B 不相容（互斥）.

(B) AB 是不可能事件.

(C) AB 未必是不可能事件.

(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

三、计算下列各题（每小题 4 分，满分 16 分）

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

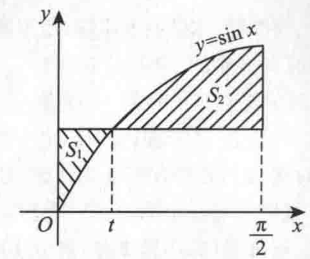
(2)已知 $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$，求 y'.

(3) $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，求 dz.

(4)求不定积分 $\int e^{\sqrt{2x-1}}dx$.

四、（本题满分 10 分）

考虑函数 $y=\sin x$，$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 问：



(1) t 取何值时，右图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小？

(2) t 取何值时，面积 $S=S_1+S_2$ 最大？

五、（本题满分 6 分）

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 x 的幂级数，并指出收敛区间.

六、（本题满分 5 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是第一象限中由直线 $y=x$ 和 $y=x^3$ 围成的封闭区域.

七、（本题满分 6 分）

已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性 $\eta=-3p^3$，而市场对该商品的最大需求量为 1（万件）. 求需求函数.

八、（本题满分 8 分）

解线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4,\\ x_1+x_3-x_4=-3,\\ 3x_1+x_2+x_3=1,\\ 7x_1+7x_3-3x_4=3.\end{cases}$

九、（本题满分 7 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$.

十、（本题满分 6 分）

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\0&-1&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 的实特征值及对应的特征向量.

十一、（本题共 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）

(1)已知随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=1\}=0.2,P\{X=2\}=0.3,P\{X=3\}=0.5,$$

试写出 X 的分布函数 $F(x)$.

(2)已知随机变量 Y 的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{a^2}e^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=\dfrac{1}{Y}$ 的数学期望 EZ.

十二、(本题满分 8 分)

假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品，现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取两个零件(取出的零件均不放回)．试求：

(1)先取出的零件是一等品的概率 p；

(2)在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

(试卷Ⅴ)

一、判断题(本题共 5 小题，每小题 2 分，满分 10 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第一、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ　第一、(2)题】

(3)若函数 $f(x)$在区间(a,b)上严格单增，则对区间(a,b)内任何一点 x 有 $f'(x)>0$.　(　　)

(4)若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为常数，且$|\boldsymbol{A}|$和$|k\boldsymbol{A}|$为 $\boldsymbol{A}$ 和 $k\boldsymbol{A}$ 的行列式，则$|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$.　(　　)

(5)【同试卷Ⅳ　第一、(5)题】

二、选择题(每小题 2 分，满分 10 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第二、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ　第二、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ　第二、(3)题】

(4)【同试卷Ⅳ　第二、(4)题】

(5)对于任二事件 A 和 B，有 $P(A-B)=$

(A)$P(A)-P(B)$.　　(B)$P(A)-P(B)+P(AB)$.

(C)$P(A)-P(AB)$.　　(D)$P(A)-P(\bar{B})-P(A\bar{B})$.

三、计算下列各题(每小题 4 分，满分 20 分)

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$.

(2)【同试卷Ⅳ　第三、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ　第三、(3)题】

(4)计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{\sqrt{2x-1}}dx$.

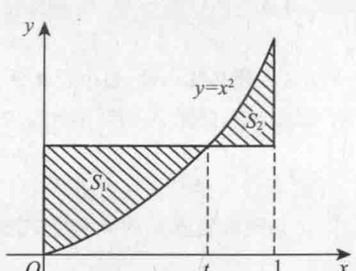
(5)求不定积分 $\int\dfrac{xdx}{x^4+2x^2+5}$.

四、(本题满分 10 分)

考虑函数 $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$．问：

(1)t 取何值时，右图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小？

(2)t 取何值时，面积 $S=S_1+S_2$ 最大？



五、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ　第六题】

六、(本题满分 8 分)

设某产品的总成本函数为 $C(x)=400+3x+\dfrac{1}{2}x^2$，而需求函数为 $p=\dfrac{100}{\sqrt{x}}$，其中 x 为产量(假定等于需求量)，p 为价格，试求：

(1)边际成本；

(2)边际收益；

(3)边际利润；

(4)收益的价格弹性.

七、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ　第八题】

八、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ　第九题】

九、(本题满分 6 分)【同试卷Ⅳ　第十题】

十、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=0.2$，$P\{X=2\}=0.3$，$P\{X=3\}=0.5$，试写出 X 的分布函数 $F(x)$，并求 X 的数学期望与方差.

十一、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ　第十二题】

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名________ 分数________

（试卷Ⅳ）

一、填空题（本题满分 12 分，每空 1 分）

(1)设 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt,-\infty<x<+\infty$，则

①$f'(x)=$________； ②$f(x)$的单调性是________；

③$f(x)$的奇偶性是________； ④其图形的拐点是________；

⑤凹凸区间是________； ⑥水平渐近线是________．

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$________．

(3)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________．

(4)设 $P(A)=0.4,P(A\cup B)=0.7$，那么

①若 A 与 B 互不相容，则 $P(B)=$________；

②若 A 与 B 相互独立，则 $P(B)=$________．

二、（本题满分 10 分，每小题 2 分）

(1)若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$都存在，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在． （ ）

(2)若 x_0 是函数 $f(x)$的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$． （ ）

(3)等式 $\int_0^a f(x)dx=-\int_0^a f(a-x)dx$ 对任何实数 a 都成立． （ ）

(4)若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩必小于 n． （ ）

(5)若事件 A,B,C 满足等式 $A\cup C=B\cup C$，则 $A=B$． （ ）

三、（本题满分 16 分，每小题 4 分）

(1)求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$．

(2)已知 $u+e^u=xy$，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$．

(3)求定积分 $\int_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$．

(4)求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x}{x}dx$．

四、（本题满分 6 分，每小题 3 分）

(1)讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性．

(2)已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛．

五、（本题满分 8 分）

已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数：

$$D=D(p)=\frac{a}{p^2},S=S(p)=bp,$$

其中 $a>0$ 和 $b>0$ 为常数；价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$$\frac{dp}{dt}=k[D(p)-S(p)]\ (k\text{ 为正的常数}).$$

假设当 $t=0$ 时价格为 1，试求

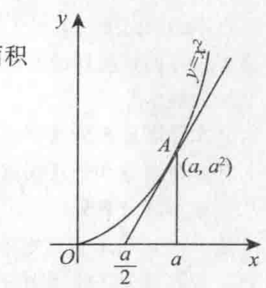
(1)需求量等于供给量时的均衡价格 p_e；

(2)价格函数 $p(t)$；

(3)极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)$．

六、（本题满分 8 分）

在曲线 $y=x^2(x\geqslant 0)$上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形（如右图）的面积为$\dfrac{1}{12}$，试求：



(1)切点 A 的坐标；

(2)过切点 A 的切线方程；

(3)由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积．

七、（本题满分 8 分）

已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3, \\ 3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3, \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2. \end{cases}$

问 k_1 和 k_2 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解的情形下，试求出一般解．

八、（本题满分 7 分）

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$线性无关．设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$．试讨论向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性相关性．

九、（本题满分 6 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求行列式$|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$的值．

十、（本题满分 7 分）

玻璃杯成箱出售，每箱 20 只．假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率相应为 0.8，0.1 和 0.1．一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客随机地察看 4 只；若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回．试求：

(1)顾客买下该箱的概率 α；

(2)在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β．

十一、（本题满分 6 分）

某保险公司多年统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数．

(1)写出 X 的概率分布；

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

(2)利用棣莫弗-拉普拉斯定理,求出索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

十二、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 在区间(1,2)上服从均匀分布.试求随机变量 $Y=e^{2X}$ 的概率密度 $f(y)$.

(试卷Ⅴ)

一、(本题满分 12 分)【同试卷Ⅳ 第一题】

二、(本题满分 10 分)【同试卷Ⅳ 第二题】

三、(本题满分 16 分,每小题 4 分)

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

(2)已知 $u=e^{\frac{x}{y}}$,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

(3)【同试卷Ⅳ 第三、(3)题】 (4)【同试卷Ⅳ 第三、(3)题】

四、(本题满分 6 分)

确定常数 a 和 b,使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1,\\ x^2, & x\leqslant1\end{cases}$ 处处可导.

五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的铁丝切成两段,一段围成正方形,另一段围成圆形.问这两段铁丝各长为多少时,正方形与圆形的面积之和为最小?

六、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ 第七题】

八、(本题满分 6 分)

已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 给定,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵.证明:$\boldsymbol{A}$ 可逆,并求出其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

九、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第八题】

十、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第十题】

十一、(本题满分 7 分)

假设有十只同种电器元件,其中有两只废品.装配仪器时,从这批元件中任取一只,如是废品,则扔掉重新任取一只.试求在取到正品之前,已取出的废品只数的概率分布、数学期望和方差.

十二、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第十二题】

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_______ 分数_______

(试卷Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程是_______.

(2)幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是_______.

(3)若齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

只有零解,则 λ 应满足的条件是_______.

(4)设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

则 $A=$_______,$P\left\{|X|<\dfrac{\pi}{6}\right\}=$_______.

(5)设 X 为随机变量且 $EX=\mu,DX=\sigma^2$.则由切比雪夫不等式,有 $P\{|X-\mu|\geqslant3\sigma\}\leqslant$_______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to0$ 时

(A)$f(x)$是 x 的等价无穷小.　(B)$f(x)$与 x 是同阶但非等价无穷小.

(C)$f(x)$是比 x 更高阶的无穷小.　(D)$f(x)$是比 x 较低阶的无穷小.

(2)在下列等式中,正确的结果是

(A)$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　(B)$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$.

(C)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　(D)$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|=0$,则

(A)$\boldsymbol{A}$ 中必有两行(列)的元素对应成比例.

(B)$\boldsymbol{A}$ 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(C)$\boldsymbol{A}$ 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.

(D)$\boldsymbol{A}$ 中至少有一行(列)的元素全为 0.

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times n$ 矩阵,则必有

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.　　(B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(C) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

(5)以 A 表示事件“甲种产品畅销,乙种产品滞销”,则其对立事件 $\bar{A}$ 为:

(A)“甲种产品滞销,乙种产品畅销”.　　(B)“甲、乙两种产品均畅销”.

(C)“甲种产品滞销”.　　(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

三、计算题(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

(2)已知 $z=f(u,v)$,$u=x+y$,$v=xy$,且 $f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3)求微分方程 $y''+5y'+6y=2e^{-x}$ 的通解.

四、(本题满分 9 分)

设某厂家打算生产一批商品投放市场,已知该商品的需求函数为 $p=p(x)=10e^{-\frac{x}{2}}$,且最大需求量为 6,其中 x 表示需求量,p 表示价格.

(1)求该商品的收益函数和边际收益函数;

(2)求使收益最大时的产量,最大收益和相应的价格;

(3)画出收益函数的图形.

五、(本题满分 9 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 计算下列各题:

(1) $S_0=\int_0^2 f(x)e^{-x}\,dx$;　　(2) $S_1=\int_2^4 f(x-2)e^{-x}\,dx$;

(3) $S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)\,e^{-x}\,dx\ (n=2,3,\cdots)$;　　(4) $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_n$.

六、(本题满分 6 分)

假设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f'(x)\leqslant 0$,记 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$,证明在$(a,b)$内 $F'(x)\leqslant 0$.

七、(本题满分 5 分)

已知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

八、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$.问:

(1)当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关?

(2)当 t 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关?

(3)当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时,将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

九、(本题满分 5 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$.

(1)试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2)利用(1)的结果,求矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵.

十、(本题满分 7 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & 若\ 0<x<+\infty,0<y<+\infty,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

试求:(1) $P\{X<Y\}$;(2) $E(XY)$.

十一、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 在$[2,5]$上服从均匀分布,现在对 X 进行三次独立观测,试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第一、(1)题】

(2)某商品的需求量 Q 与价格 P 的函数关系为 $Q=aP^b$,其中 a 和 b 为常数,且 $a\neq 0$,则需求量对价格 P 的弹性是______.

(3)行列式 $\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}=$______.

(4)设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,其中 X_1 在$[0,6]$上服从均匀分布,X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$,X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布.记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$,则 $DY=$______.

(5)【同试卷Ⅳ　第一、(4)题】

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ　第二、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ　第二、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ　第二、(3)题】

(4)设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是

(A) $r=n$.　　(B) $r<n$.　　(C) $r\geqslant n$.　　(D) $r>n$.

(5)【同试卷Ⅳ　第二、(5)题】

三、(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

(2)已知 $z=a^{\sqrt{x^2-y^2}}$,其中 $a>0,a\neq 1$,求 dz.

(3)求不定积分 $\int\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx$.

(4)求二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}dxdy$,其中 D 是 $x^2+y^2=1$,$x=0$ 和 $y=0$ 所围成的区域在第Ⅰ象限部分.

四、(本题满分 6 分)

已知某企业的总收入函数为 $R=26x-2x^2-4x^3$,总成本函数为 $C=8x+x^2$,其中 x 表示产品的产量,求利润函数,边际收入函数,边际成本函数,以及企业获得最大利润时的产量和最大利润.

五、(本题满分 12 分)

已知函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$,试求其单调区间,极值点及图形的凹凸性、拐点和渐近线,并画出函数的图形.

六、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ　第七题】

七、(本题满分 6 分)

讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)$ 的线性相关性.

八、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ　第九题】

九、(本题满分 8 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

(X,Y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$P\{X=x,Y=y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

试求：(1) X 的概率分布；

(2) $X+Y$ 的概率分布；

(3) $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望.

十、(本题满分 8 分)

某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命(单位：小时)都服从同一指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

试求：在仪器使用的最初 200 小时内，至少有一只电子元件损坏的概率 α.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_______ 分数_______

(试卷Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$________.

(2)设 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$________.

(3)曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 所围成的平面图形面积为________.

(4)若线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\ x_2+x_3=a_2,\\ x_3+x_4=-a_3,\\ x_4+x_1=a_4\end{cases}$$

有解，则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件________.

(5)一射手对同一目标独立地进行 4 次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手的命中率为________.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)设函数 $f(x)=x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是

(A)偶函数. (B)无界函数. (C)周期函数. (D)单调函数.

(2)设函数 $f(x)$ 对任意的 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a、b 为非零常数，则

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导. (B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$.

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$. (D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.

(3)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均不为零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一部分向量线性无关.

(4)设 A、B 为二随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是

(A) $P(A+B)=P(A)$. (B) $P(AB)=P(A)$.

(C) $P(B|A)=P(B)$. (D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(5)设随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率分布为

m	-1	1
$P\{X=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

m	-1	1
$P\{Y=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是

(A) $X=Y$. (B) $P\{X=Y\}=0$. (C) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$. (D) $P\{X=Y\}=1$.

三、(本题共4小题,每小题5分,满分20分)

(1)求函数 $I(x)=\int_e^x \frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在区间 $[e,e^2]$ 上的最大值.

(2)计算二重积分 $\iint\limits_D xe^{-y^2}dxdy$,其中 D 是曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

(3)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域.

(4)求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)e^{-\sin x}$ 的通解.

四、(本题满分9分)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告,根据统计资料,销售收入 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间的关系有如下经验公式

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2.$$

(1)在广告费用不限的情况下,求最优广告策略;

(2)若提供的广告费用为1.5万元,求相应的最优广告策略.

五、(本题满分6分)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续,其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少,$f(0)=0$,试应用拉格朗日中值定理证明不等式 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$,其中常数 a,b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

六、(本题满分8分)

已知线性方程组
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2.\end{cases}\qquad (*)$$

(1) a,b 为何值时,方程组有解?

(2)方程组有解时,求出方程组的导出组的一个基础解系;

(3)方程组有解时,求出方程组的全部解.

七、(本题满分5分)

已知对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,存在自然数 k,使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 试证明矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,并写出其逆矩阵的表达式($\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵).

八、(本题满分6分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,λ_1 和 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 试证明 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

九、(本题满分4分)

从0,1,2,…,9等十个数字中任意选出三个不同的数字,试求下列事件的概率:$A_1=\{$三个数字中不含0和5$\}$;$A_2=\{$三个数字中不含0或5$\}$;$A_3=\{$三个数字中含0但不含5$\}$.

十、(本题满分5分)

一电子仪器由两个部件构成,以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位:千小时),已知 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)问 X 和 Y 是否独立?

(2)求两个部件的寿命都超过100小时的概率 α.

十一、(本题满分7分)

某地抽样调查结果表明,考生的外语成绩(百分制)近似正态分布,平均成绩为72分,96分以上的占考生总数的2.3%,试求考生的外语成绩在60分至84分之间的概率.

[附表](表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数)

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1)【同试卷Ⅳ 第一、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ 第一、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ 第一、(3)题】

(4)【同试卷Ⅳ 第一、(4)题】

(5)已知随机变量 $X\sim N(-3,1)$,$Y\sim N(2,1)$,且 X,Y 相互独立,设随机变量 $Z=X-2Y+7$,则 $Z\sim$________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1)【同试卷Ⅳ 第二、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ 第二、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ 第二、(3)题】

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*|=$

(A) $|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. (B) $|\boldsymbol{A}|$. (C) $|\boldsymbol{A}|^n$. (D) $|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

(5)已知随机变量 X 服从二项分布,且 $EX=2.4$,$DX=1.44$,则二项分布的参数 n,p 的值为

(A) $n=4,p=0.6$. (B) $n=6,p=0.4$.

(C) $n=8,p=0.3$. (D) $n=24,p=0.1$.

三、(本题满分20分,每小题5分)

(1)求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$.

(2)求不定积分 $\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx$.

(3)设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$,其中 φ 为可微函数,求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(4)【同试卷Ⅳ 第三、(2)题】

四、(本题满分9分)【同试卷Ⅳ 第四题】

五、(本题满分6分)

证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$,$-\infty<x<+\infty$.

六、(本题满分4分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵 $\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\10^{10}&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$,计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为10阶单位矩阵,λ 为常数.

七、(本题满分 5 分)

设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为单位阵.试证明 $\boldsymbol{A}$ 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

八、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ 第六题】

九、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第九题】

十、(本题满分 6 分)

甲乙两人独立地各进行两次射击,假设甲的命中率为 0.2,乙的为 0.5,以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数,试求 X 和 Y 的联合概率分布.

十一、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第十一题】

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名______ 分数______

(试卷Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $z=e^{\sin xy}$,则 $dz=$______.

(2)设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点$(-1,0)$,且在点$(-1,0)$有公共切线,则 $a=$______,$b=$______,$c=$______.

(3)设 $f(x)=xe^x$,则 $f^{(n)}(x)$在点 $x=$______处取极小值______.

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$为分块矩阵,则 $\boldsymbol{X}^{-1}=$______.

(5)设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

则 X 的概率分布为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)下列各式中正确的是

(A)$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$. (B)$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

(C)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$. (D)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$.

(2)设 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,则下列级数中肯定收敛的是

(A)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. (C)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$. (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值之一是

(A)$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|^n$. (B)$\lambda^{-1}|\boldsymbol{A}|$. (C)$\lambda|\boldsymbol{A}|$. (D)$\lambda|\boldsymbol{A}|^n$.

(4)设 A 和 B 是任意两个概率不为零的互不相容事件,则下列结论中肯定正确的是

(A)$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容. (B)$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容.

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$. (D)$P(A-B)=P(A)$.

(5)对任意两个随机变量 X 和 Y,若 $E(XY)=EXEY$,则

(A)$D(XY)=DXDY$. (B)$D(X+Y)=DX+DY$.

(C)X 与 Y 独立. (D)X 与 Y 不独立.

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 n 是给定的自然数.

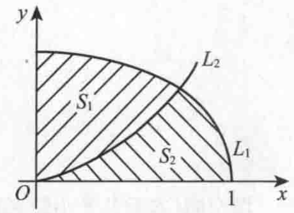
四、(本题满分 5 分)

计算二重积分 $I=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴、y 轴与曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 所围成的区域，$a>0,b>0$.

五、(本题满分 5 分)

求微分方程 $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 满足 $y\big|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$ 的特解.

六、(本题满分 5 分)



假设曲线 $L_1: y=1-x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$、$x$ 轴和 y 轴所围区域被曲线 $L_2: y=ax^2$ 分为面积相等的两部分(如右图)，其中 a 是大于零的常数，试确定 a 的值.

七、(本题满分 8 分)

某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为 $q_1=24-0.2p_1$ 和 $q_2=10-0.05p_2$，总成本函数为 $C=35+40(q_1+q_2)$. 试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

八、(本题满分 6 分)

试证明函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

九、(本题满分 7 分)

设有三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}$，问 λ 取何值时：

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一？

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

十、(本题满分 6 分)

考虑二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$，问 λ 取何值时，f 为正定二次型？

十一、(本题满分 6 分)

试证明 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的转置，$i=1,2,\cdots,n$.

十二、(本题满分 6 分)【同试卷Ⅴ 第十三、(1)题】

十三、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上服从联合均匀分布.

(1)求 X 和 Y 的相关系数 ρ；

(2)问 X 和 Y 是否独立？

十四、(本题满分 5 分)

设总体 X 的概率密度为 $p(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^a}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$ 是未知参数，$a>0$ 是已知常数. 试根据来自总体 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$.

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ 第一、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ 第一、(2)题】

(3)【同试卷Ⅳ 第一、(3)题】

(4) n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}_n=$________.

(5)设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$________.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ 第二、(1)题】

(2)设数列的通项为：$x_n=\begin{cases}\frac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n\ 为奇数,\\ \frac{1}{n}, & n\ 为偶数,\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$，x_n 是

(A)无穷大量. (B)无穷小量. (C)有界变量. (D)无界变量.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. (B) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. (C) $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$. (D) $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$.

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是

(A)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(B)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

(C)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

(D)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

(5)【同试卷Ⅳ 第二、(4)题】

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

四、(本题满分 5 分)

求定积分 $I=\int_{-1}^{1}(2x+|x|+1)^2\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 5 分)

求不定积分 $I=\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\mathrm{d}x$.

六、(本题满分 5 分)

已知 $xy=xf(z)+yg(z)$，$xf'(z)+yg'(z)\neq 0$，其中 $z=z(x,y)$ 是 x 和 y 的函数，求证

$$[x-g(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}.$$

七、(本题满分 6 分)【同试卷Ⅳ 第六题】

八、(本题满分 8 分)【同试卷Ⅳ 第七题】

九、(本题满分 6 分)

证明不等式 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}(0<x<+\infty)$.

十、(本题满分 5 分)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足条件 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$.

(1)证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵;

(2)已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

十一、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ　第九题】

十二、(本题满分 5 分)

已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量,试求常数 k 的值.

十三、(本题满分 7 分)

一汽车沿一街道行驶,需要通过三个均设有红绿信号灯的路口,每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立,且红绿两种信号显示的时间相等. 以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数.

(1)求 X 的概率分布;

(2)求 $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

十四、(本题满分 6 分)

在电源电压不超过 200 伏,200—240 伏和超过 240 伏三种情况下,某种电子元件损坏的概率分别为 0.1,0.001 和 0.2. 假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,25^2)$. 试求:

(1)该电子元件损坏的概率 α;

(2)该电子元件损坏时,电源电压在 200—240 伏的概率 β.

附表:

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.841	0.885	0.919

表中 $\Phi(x)$是标准正态分布函数.

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_______　分数_______

(试卷Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设商品的需求函数 $Q=100-5p$,其中 Q,p 分别表示需求量和价格,如果商品需求弹性的绝对值大于 1,则商品价格的取值范围是________.

(2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为________.

(3)交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\mathrm{d}x=$________.

(4)设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=a$,$|\boldsymbol{B}|=b$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,则 $|\boldsymbol{C}|=$________.

(5)将 C,C,E,E,I,N,S 这七个字母随机地排成一行,则恰好排成 $SCIENCE$ 的概率为________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $F(x)=\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$为连续函数,则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$等于

(A)a^2.　(B)$a^2f(a)$.　(C)0.　(D)不存在.

(2)当 $x\to0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量?

(A)x^2.　(B)$1-\cos x$.　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　(D)$x-\tan x$.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解的充分条件是

(A)$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关.　(B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关.　(D)$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关.

(4)设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则

(A)$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.　(B)$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(C)$P(C)=P(AB)$.　(D)$P(C)=P(A\cup B)$.

(5)设 n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,$DX_1=\sigma^2$,$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,则

(A)S 是 σ 的无偏估计量.　(B)S 是 σ 的最大似然估计量.

(C)S 是 σ 的相合估计量(即一致估计量).　(D)S 与 $\overline{X}$ 相互独立.

三、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\neq1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 问函数 $f(x)$在 $x=1$ 处是否连续?若不连续,修改函数在 $x=1$处的定义,使之连续.

四、(本题满分 5 分)

计算 $I=\int \frac{\operatorname{arccot} e^x}{e^x}dx$.

五、(本题满分 5 分)

设 $z=\sin xy+\varphi\left(x,\frac{x}{y}\right)$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,其中 $\varphi(u,v)$ 具有二阶偏导数.

六、(本题满分 5 分)

求连续函数 $f(x)$,使它满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$.

七、(本题满分 6 分)

求证:当 $x\geqslant 1$ 时,$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

八、(本题满分 9 分)

设曲线方程为 $y=e^{-x}(x\geqslant 0)$.

(1)把曲线 $y=e^{-x}$,x 轴,y 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周,得一旋转体,求此旋转体体积 $V(\xi)$;求满足 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$ 的 a.

(2)在此曲线上找一点,使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大,并求出该面积.

九、(本题满分 7 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$.

(1)求 x 和 y 的值;

(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

十、(本题满分 6 分)

已知三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,且 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是以下方程组的解:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$$

(1)求 λ 的值;(2)证明 $|\boldsymbol{B}|=0$.

十一、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶,n 阶正定矩阵,试判定分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 是否是正定矩阵.

十二、(本题满分 7 分)

假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$,试求在 100 次独立重复测量中,至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α,并利用泊松分布求出 α 的近似值(要求小数点后取两位有效数字).

附表

λ	1	2	3	4	5	6	7	…
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	…

十三、(本题满分 5 分)

一台设备由三大部件构成,在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10,0.20 和 0.30. 假设各部件的状态相互独立,以 X 表示同时需要调整的部件数,试求 X 的概率分布,数学期望 EX 和方差 DX.

十四、(本题满分 4 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\0, & 其他.\end{cases}$$

(1)求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(2)求概率 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\frac{x+t}{x-t}\right)^x$,则 $f'(t)=$________.

(2)【同试卷Ⅳ 第一、(1)题】

(3)设 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$________;其定义域为________.

(4)矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ 的非零特征值是________.

(5)设对于事件 A,B,C,有 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,则 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率为________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ 第二、(1)题】

(2)当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,比其它三个更高阶的无穷小量是

(A)x^2. (B)$1-\cos x$. (C)$\sqrt{1-x^2}-1$. (D)$x-\sin x$.

(3)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵,则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 等于

(A)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$. (B)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. (C)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$. (D)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

(4)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 均为 n 维向量,那么下列结论正确的是

(A)若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(B)若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$.

(D)若 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(5)【同试卷Ⅳ 第二、(4)题】

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$.

四、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第四题】

五、(本题满分 6 分)

求连续函数 $f(x)$,使它满足 $\int_0^1 f(tx)dt=f(x)+x\sin x$.

六、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第五题】

七、(本题满分 6 分)

设生产某产品的固定成本为 10,而当产量为 x 时的边际成本函数为 $MC=-40-20x+3x^2$,边际收入函数为 $MR=32+10x$. 试求:

(1)总利润函数;

(2)使总利润最大的产量.

八、(本题满分 6 分)

求证:方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根,其中 p,q 为常数,且 $0<q<1$.

九、(本题满分 7 分)

给定曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$.

(1)求曲线在横坐标为 x_0 的点处的切线方程;

(2)求曲线的切线被两坐标轴所截线段的最短长度.

十、(本题满分 5 分)

设矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位阵,又已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$,试求出矩阵 $\boldsymbol{X}$.

十一、(本题满分 5 分)

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$,3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 试求 λ 的值.

十二、(本题满分 6 分)

已知实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件:①$a_{ij}=A_{ij}\,(i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式;②$a_{11}\neq0$. 计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

十三、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第十二题】

十四、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第十三题】

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名______ 分数______

(试卷Ⅳ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$________.

(2)已知

$$y=f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right),\ f'(x)=\arctan x^2,$$

则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

(3)级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为________.

(4)设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为________.

(5)设总体 X 的方差为 1,根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本,测得样本均值为 5,则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0,\\0, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A)极限不存在. (B)极限存在但不连续. (C)连续但不可导. (D)可导.

(2)设 $f(x)$ 为连续函数,且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)\,\mathrm{d}t$,则 $F'(x)$ 等于

(A) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. (B) $f(\ln x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(C) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. (D) $f(\ln x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(3) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似的

(A)充分必要条件. (B)充分而非必要条件.

(C)必要而非充分条件. (D)既非充分也非必要条件.

(4)设两事件 A 与 B 满足 $P(B|A)=1$,则

(A) A 是必然事件. (B) $P(B|\bar{A})=0$. (C) $A\supset B$. (D) $A\subset B$.

(5)设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)$,且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$,$F(x)$ 为 X 的分布函数,则对任意实数 a,有

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. (B) $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

(C)$F(-a)=F(a)$. (D)$F(-a)=2F(a)-1$.

三、(本题满分 5 分)

设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数,求 dz.

四、(本题满分 7 分)

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\displaystyle\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$,求常数 a 的值.

五、(本题满分 9 分)

设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$,需求函数为 $q=\dfrac{1}{e}(d-p)$,其中 C 为成本,q 为需求量(即产量),p 为单价,a,b,c,d,e 都是正的常数,且 $d>b$,求:

(1)利润最大时的产量及最大利润;

(2)需求对价格的弹性;

(3)需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

六、(本题满分 8 分)

假设:

(1)函数 $y=f(x)(0\leqslant x<+\infty)$ 满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\leqslant f(x)\leqslant e^x-1$;

(2)平行于 y 轴的动直线 MN 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=e^x-1$ 分别相交于点 P_1 和 P_2;

(3)曲线 $y=f(x)$、直线 MN 与 x 轴所围封闭图形的面积 S 恒等于线段 P_1P_2 的长度.

求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

七、(本题满分 6 分)

假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内二阶可导,过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$,其中 $0<c<1$. 证明:在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f''(\xi)=0$.

八、(本题满分 10 分)

k 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\-x_1+kx_2+x_3=k^2,\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}\qquad(*)$$

有唯一解、无解、有无穷多解? 在有解情况下,求出其全部解.

九、(本题满分 9 分)

设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$,其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 都是 3 维列向量,$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶正交矩阵. 试求常数 α,β.

十、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 同分布,X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\0, & 其他.\end{cases}$$

(1)已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 独立,且 $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$,求常数 a;

(2)求 $\dfrac{1}{X^2}$ 的数学期望.

十一、(本题满分 8 分)

假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.

(1)求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布;

(2)求在设备已无故障工作 8 小时的情形下,再无故障运行 8 小时的概率 Q.

(试卷Ⅴ)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$________.

(2)已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$,$f'(x)=\arcsin x^2$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

(3)$\displaystyle\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$________.

(4)【同试卷Ⅳ 第一、(4)题】

(5)设 10 件产品有 4 件不合格品,从中任取两件,已知所取两件产品中有一件是不合格品,则另一件也是不合格品的概率为________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)【同试卷Ⅳ 第二、(1)题】

(2)【同试卷Ⅳ 第二、(2)题】

(3)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量,且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$,$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$,则四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|$ 等于

(A)$m+n$. (B)$-(m+n)$. (C)$n-m$. (D)$m-n$.

(4)设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则矩阵 $\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$ 有一特征值等于

(A)$\dfrac{4}{3}$. (B)$\dfrac{3}{4}$. (C)$\dfrac{1}{2}$. (D)$\dfrac{1}{4}$.

(5)设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布,$X\sim N(\mu,4^2)$,$Y\sim N(\mu,5^2)$,记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}$,$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}$,则

(A)对任何实数 μ,都有 $p_1=p_2$. (B)对任何实数 μ,都有 $p_1<p_2$.

(C)只对 μ 的个别值,才有 $p_1=p_2$. (D)对任何实数 μ,都有 $p_1>p_2$.

三、(本题满分 5 分)【同试卷Ⅳ 第三题】

四、(本题满分 7 分)【同试卷Ⅳ 第四题】

五、(本题满分 7 分)

已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C=25\,000+200x+\dfrac{1}{40}x^2$(元),问:

(1)要使平均成本最小,应生产多少件产品?

(2)若产品以每件 500 元售出,要使利润最大,应生产多少件产品?

六、(本题满分 6 分)

设 p,q 是大于 1 的常数,并且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 证明:对于任意的 $x>0$,有 $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\geqslant x$.

七、(本题满分 13 分)

运用导数的知识作函数 $y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图形.

八、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix},$$

试求其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的逆矩阵.

九、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵($m>n$),已知 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$. 试判断 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是否线性相关?