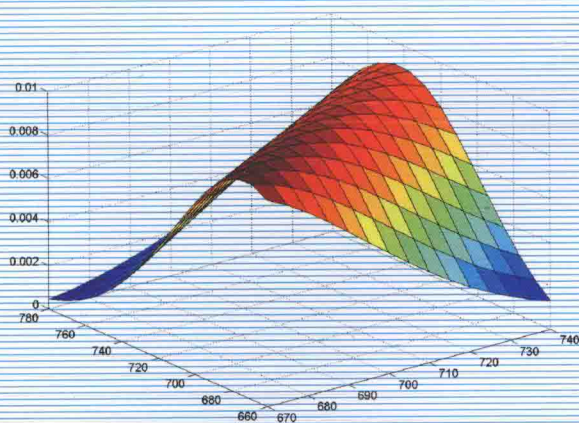


SHUZHIFANGFA DE SHIXIAN YU SHIYAN

数值方法的 实现与实验

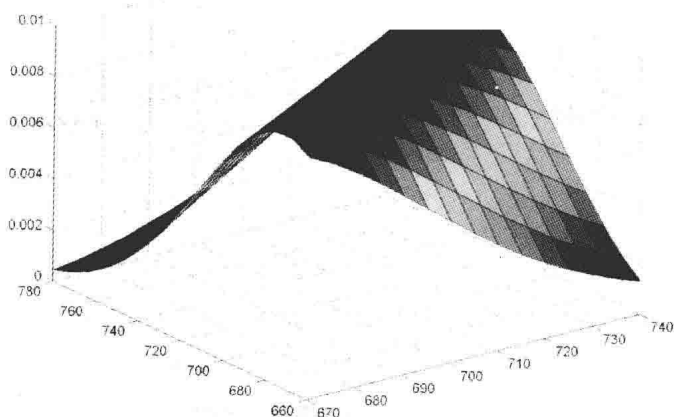
陈远强 编著



西南交通大学出版社

数值方法的实现与实验

陈远强 编著



西南交通大学出版社
· 成 都 ·

内容简介

本书比较系统地介绍了数值方法的基本算法和基本理论,突出科学计算的基本概念和训练,强调方法在计算机上的实现与实验过程。详细给出了各种数值方法的算法步骤、算法流程图或示意图、算法的 MATLAB 程序,并通过具体的问题示例,说明了算法的实验操作过程。本书共分八个章节,包括预备知识、方程的求根算法、线性方程组的直接法、线性方程组的迭代法、函数的插值法、函数的逼近法、数值积分法和常微分方程数值解法等内容。

图书在版编目(CIP)数据

数值方法的实现与实验 / 陈远强编著. — 成都:
西南交通大学出版社, 2015.7
ISBN 978-7-5643-3995-1

I. ①数… II. ①陈… III. ①数值方法—实验 IV.
①O241-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第139121号



数值方法的实现与实验

陈远强 编著

责任编辑 孟秀芝

装帧设计 原谋书装

印张 15 字数 267千

成品尺寸 170 mm × 230 mm

版本 2015年7月第1版

印次 2015年7月第1次

印刷 成都蓉军广告印务有限责任公司

书号: ISBN 978-7-5643-3995-1

出版 发行 西南交通大学出版社

网址 <http://www.xnjdcbs.com>

地址 四川省成都市金牛区交大路146号

邮政编码 610031

发行部电话 028-87600564 028-87600533

定价: 45.00元

课件咨询电话: 028-87600533

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

统计学博士点文库

编委会成员名单

主 任	王 林	韦 维	吴有富		
副主任	童 红	索洪敏	吴兴玲	李伟民	
主 编	吴有富				
编 委	田应福	黄介武	金良琼	王自强	
主 审	吴有富				

前 言

本书内容共分八个章节，包括预备知识、方程的求根算法、线性方程组的直接法、线性方程组的迭代法、函数的插值法、函数的逼近法、数值积分法和常微分方程的数值解法等。

本书比较系统地介绍了数值方法的基本算法和基本理论，突出科学计算的基本概念和训练，强调方法在计算机上的实现与实验过程。详细给出了各种数值方法的算法步骤、算法流程或示意图、算法的 MATLAB 程序，并通过具体的问题实例，说明了算法的实验操作过程。结合分层次教学 and 实际工作的需要，本书充分注重逻辑思维的规律性，突出重点，循序渐进，在保证数学学科的严密性与简洁性的前提下，尽可能做到易教和易学。力图使读者通过本书的学习，掌握基本的科学计算的思想和方法以及计算机操作的实践能力。

本书的编写参考了许多教材、资料和著作，在此向文献作者表示感谢。

本书可作为普通高等院校理工科各专业学生的教学用书或教学参考书，亦可供工程技术人员参考学习。

由于作者水平有限，书中一定存在不妥之处，诚恳期望广大读者批评指正。

作 者

2014 年 7 月 3 日于花溪

目 录

1	预备知识	1
1.1	MATLAB 简介	1
1.2	数值方法概论	34
2	方程的求根算法	37
2.1	二分法	37
2.2	不动点迭代法	40
2.3	艾特肯加速迭代法	43
2.4	牛顿切线法	47
2.5	割线法	50
	综合实验题	52
3	线性方程组的直接法	54
3.1	高斯顺序消元法	54
3.2	列主元素消元法	59
3.3	完全主元素消元法	64
3.4	LU 分解法	66
3.5	平方根分解法	73
	综合实验题	75
4	线性方程组的迭代法	77
4.1	向量和矩阵的范数	77
4.2	迭代法的收敛性	79
4.3	雅可比迭代法	80
4.4	高斯-塞德尔迭代法	84
4.5	松弛迭代法	89
	综合实验题	93
5	函数的插值法	95
5.1	插值法的思想	95
5.2	原始代数插值法	97
5.3	拉格朗日插值法	98

5.4	牛顿插值法	104
5.5	分段线性插值法	111
5.6	分段三次埃尔米特插值法	115
5.7	三次样条插值法	122
5.8	多元函数的插值法	139
	综合实验题	145
6	函数的逼近法	146
6.1	线性最小二乘法	146
6.2	最佳平方逼近法	154
6.3	三角多项式逼近法	158
6.4	多元函数的逼近法	159
	综合实验题	166
7	数值积分法	168
7.1	机械法	169
7.2	代数精度法	173
7.3	插值求积法	175
7.4	牛顿-柯特斯法	176
7.5	复合求积法	180
7.6	变步长梯形法	183
7.7	龙贝格法	186
7.8	高斯-勒让德法	190
7.9	广义积分法	195
7.10	重积分的数值积分法	198
	综合实验题	202
8	常微分方程数值解法	203
8.1	符号精确解	203
8.2	欧拉法	204
8.3	梯形法	210
8.4	龙格-库塔法	214
8.5	亚当斯法	218
8.6	一阶微分方程组的数值解法	227
	综合实验题	229
	参考文献	231

1 预备知识

本章首先介绍实现各种数值方法的工具——MATLAB 应用软件——的一些基本命令操作，然后再介绍数值算法的特点、数值结果误差的度量以及传播情况。

1.1 MATLAB 简介

MATLAB (Matrix Laboratory) 语言是美国的 Cleve Moler 博士在 20 世纪 70 年代末基于当时流行的 Linpack 和 Espack 软件包开发出来的，当时主要用于“矩阵理论”和“数据分析”等课程的计算。MATLAB 语言最初采用 Fortran 语言编写，随后改为 C 语言编写。它与 C 语言既有等同的一面，又更加接近人的抽象思维。随着 Microsoft Windows 环境的发展，它充分利用该环境的交互性、多任务功能和图形功能，创建了基于 C 语言的 MATLAB 专用语言，开启了矩阵的智能表示。后来 Mathworks 软件开发公司在 Cleve Moler 博士的主导下，对 MATLAB 进行了大规模的扩展与改进，如对 Simulink 仿真环境进行了较大规模的改进，使其仿真功能得到了全面的优化；同时一大批其他学者对 MATLAB 语言进行了自主开发，以工具箱的形式加入 MATLAB 总体环境，如系统辨识、信号处理、控制系统、鲁棒控制、模糊控制、神经网络、小波分析、定量反馈理论和有限元分析等。

MATLAB 作为线性系统的一种分析和仿真工具，是理工科大学生应该掌握的技术工具，而且它作为一种编程语言和可视化工具，可解决工程技术、科学计算和数学学科中许多问题。MATLAB 建立在向量、数组和矩阵的基础上，使用方便，人机界面直观，输出结果可视化，其中矩阵是 MATLAB 的核心。在这一章，我们将重点介绍 MATLAB 的矩阵运算、符号运算、图形功能以及程序的编写等内容。

1.1.1 MATLAB 的基本要素

MATLAB 具有以下七个方面的特点。① MATLAB 开发环境：一套方便

用户使用的工具集、进行应用研究开发的交互式平台；② MATLAB 数学与运算函数库：包含了大量的用于科学计算的函数；③ MATLAB 语言：一个高级的基于矩阵、数组的语言，进行应用开发的编程工具；④ MATLAB 图形处理系统；⑤ 强力的二维、三维图形开发工具；⑥ 应用程序接口（API）：用于与其他语言混编；⑦ 面向专门领域的工具箱：小波工具箱、神经网络工具箱、信号处理工具箱、图像处理工具箱、模糊逻辑工具箱、优化工具箱、鲁棒控制工具箱等几十个不同应用的工具箱。

MATLAB 语言主要是由变量、常量、数值、字符串、运算符及标点等基本要素构建而成的。

1) 安装

MATLAB 在 IBM 兼容的个人计算机上、Microsoft Windows 环境下运行，需要 8 MB 以上的内存。在 Windows 环境下，用户启动光盘中的 Setup 指令，并指定 MATLAB 的存放路径，安装程序可以自动完成安装，安装结束后，在 Windows 下就可以得到 MATLAB 的快捷方式的图标。用鼠标双击该图标，就可以启动 MATLAB，并显示 MATLAB 的窗口画面，从而进入 MATLAB 的工作空间。如图 1-1 所示。

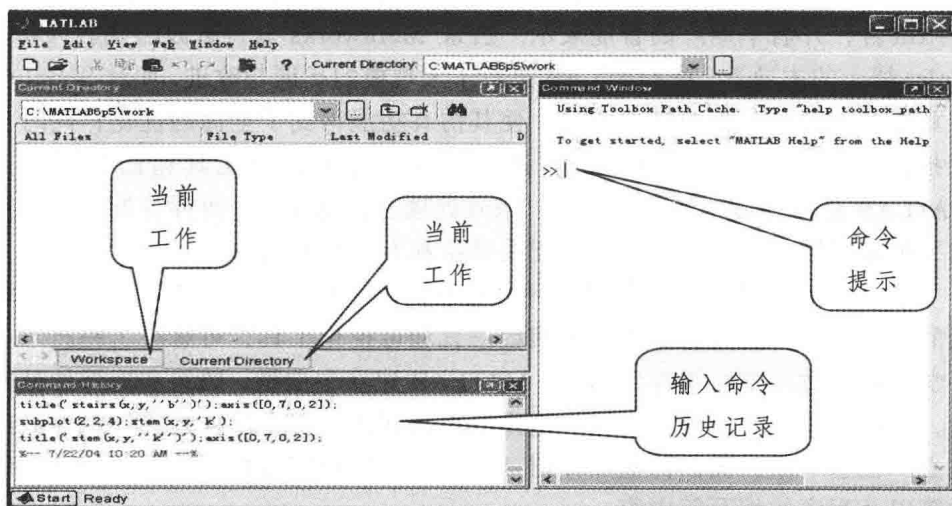


图 1-1 MATLAB 的启动窗口

用鼠标单击命令窗口顶端的任意一个选项都得到下拉式菜单。例如可以通过“file”方便地打开编辑窗口；通过“help”得到函数查询功能；运行“demo”可以了解和掌握 MATLAB 更全面的信息。MATLAB 常用命令见表 1-1。

表 1-1 MATLAB 常用命令

help	在线帮助	lookfor	通过关键字查找帮助
clc	擦去一页命令窗口	size(a)	显示空间中的变量 a 的尺寸
clear	清除空间中的变量名	length(a)	显示空间中的变量 a 的长度
clf	清除图形窗口中的图形	type name	列出文件
who	显示空间中所有变量的简单列表	load name	将文件 name.mat 读入内存
whos	显示空间中变量的大小、数据格式等详细信息	save name	将空间中所有变量存入名为 name.mat 的文件中
what	M 文件、MAT 文件和 MEX 文件的目录列表	which	函数和文件定位

2) 变量

与其他计算机语言一样, MATLAB 也有变量命名规则. 变量名必须以字母开头, 之后可以是任意字母、数字或下划线, 且不含有空格或标点符号的单个词, 例如 kai123_h45.

在这里需要注意以下三点:

(1) 变量名最多不能超过 63 个字符, 多的字符将被忽略, 例如 woaizhongguogongchandang 只能表示为 woaizhongguogongcha.

(2) 变量名中的字母区分大小写, 如 kai123_h45, Kai123_h45, kaI123_h45, kai123_H45, KAI123_H45 都不是相同的变量.

(3) 变量一般为局部变量, 即仅在其调用的 M 文件内部有效; 若要定义全局变量, 需在变量前加关键字 global.

除了普通变量, MATLAB 还有一些特殊的变量, 见表 1-2. 这些特殊变量在 MATLAB 启动后, 会自动赋予其值. 如果定义了相同名字的变量, 则其默认的原始赋值将会丢失, 直至清除所有的变量或重新启动 MATLAB.

表 1-2 MATLAB 的特殊变量

特殊变量	取值	特殊变量	取值
Ans	用于结果的缺省变量名	i, j	$i = j = \sqrt{-1}$
Pi	圆周率	nargin	所用函数的输入变量数目
Eps	计算机的最小数(浮点运算的相对精度)	nargout	所用函数的输出变量数目
Flops	浮点运算数	realmin	最小可用正实数
Inf	无穷大, 如 1/0	realmax	最大可用正实数
NaN	不定量, 如 0/0		

在数学应用中, 函数也是一个变量. MATLAB 所支持的内部函数见表 1-3. 这里需要注意, 三角函数只对弧度值进行相应计算.

表 1-3 常见的内部函数

函数命令	说 明	函数命令	说 明
abs(x)	绝对值或复数的幅值	sign(x)	符号函数
sin(x)	正弦	real(x)	复数的实部
asin(x)	反正弦	imag(x)	复数的虚部
cos(x)	余弦	conj(x)	复数的共轭
acos(x)	反余弦	round(x)	四舍五入到最接近的整数
tan(x)	正切	floor(x)	对 $-\infty$ 方向取整数
atan(x)	反正切	ceil(x)	对 $+\infty$ 方向取整数
exp(x)	指数 e^x	gcd(x,y)	整数 x,y 的最大公约数
log(x)	自然对数	lcm(x,y)	整数 x,y 的最小公倍数
log10(x)	以 10 为底的对数	rem(x,y)	x/y 的余数
sqrt(x)	平方根		

例如:

```
>>1/0
Warning: Divide by zero.
ans =
    Inf
>>0/0
Warning: Divide by zero.
ans =
    NaN
```

```
>>pi=1
pi =
    1
>>clear pi
>>pi
ans =
    3.1416
```

3) 数值

在 MATLAB 的工作空间中显示数值结果时, 要遵循一定的原则. 当数值缺省且为实数时, 用保留小数点后 4 位浮点数来表示, 其他情况见表 1-4 给出的结果(以 $a=215/6$ 为例).

表 1-4 数值格式命令

命令	数值显示	说明
Format long	35.833 333 333 333 34	16 位
Format long e	35.833 333 333 333 34e+01	16 位加指数
Format short	35.833 3	缺省显示
Format short e	35.833e+01	5 位加指数
Format hex	4041eaaaaaaaab	十六进制
Format bank	35.83	2 个十进制位
Format rat	215/6	有理数近似
Format +	+	正、负或零

MATLAB 语言还提供了复数的表达和运算功能,复数的基本单位表示为 i 或 j 。例如:

```
>> z=2*exp(pi/3i)
```

```
z =
```

```
1.0000 + 1.7321i.
```

如果是表达式,必须在虚部的数值与 i 、 j 之间使用乘号。例如:

```
>> sin(pi/3)+cos(pi/3)j
```

```
??? sin(pi/3)+cos(pi/3)j
```

```
Error: Unexpected MATLAB expression.
```

```
>> sin(pi/3)+cos(pi/3)*j
```

```
ans =
```

```
0.8660 + 0.5000i.
```

4) 标点

一些标点符号在 MATLAB 中也被赋予特殊的意义,有时表示要进行一些特定的运算等,见表 1-5。

表 1-5 标点符号的用途

标点	定义	标点	定义
:	冒号,具有多种应用功能	...	续行符
;	区分行,及取消结果显示	%	注释标记
,	区分列,及函数参数分隔符等	!	调用操作系统运算
()	指定运算过程中的先后次序等	[]	矩阵定义的标志等
{ }	用于构成单元数组等	'	字符串的标示符

下面对表 1-5 中的各标点作进一步的介绍. 首先, 用冒号来定义行向量. 基本格式:

$x = x_1:\text{step}:x_2$ (初始值: 步长: 尾元素数值限)

$x = x_1:x_2$ (默认步长为 1)

注意: 这里强调 x_2 为尾元素数值限, 而不是尾元素值. 当 $x_2 - x_1$ 恰为步长的整数倍时, x_2 才能成为尾值. 例如:

```
>> a=1:2:12
```

```
a =
```

```
1 3 5 7 9 11
```

```
>> a=12:-2:1
```

```
a =
```

```
12 10 8 6 4 2
```

```
>> a=1:6
```

```
a =
```

```
1 2 3 4 5 6
```

```
>> a=2:2:12
```

```
a =
```

```
2 4 6 8 10 12
```

其次, 通过使用冒号, 可以截取指定矩阵中的部分. 例如:

```
>> a=[1:18]; a=reshape(a,3,6)
```

```
a =
```

```
1 4 7 10 13 16
```

```
2 5 8 11 14 17
```

```
3 6 9 12 15 18
```

```
>> a1=a(:,1:3)
```

```
a1 =
```

```
1 4 7
```

```
2 5 8
```

```
3 6 9
```

```
>> a2=a(1:2,3:end)
```

```
a2 =
```

```
7 10 13 16
```

```
8 11 14 17
```

分号在 MATLAB 语言中所起的作用是作为分隔行的标志, 这里包括在矩阵定义中对行的区分以及在程序代码中对行的划分. 在矩阵定义中, 分号之间的数据被认为是矩阵的同一行. 对于以分号结尾的行语句, MATLAB 语言中的运算结果不会显示在命令窗口中.

逗号主要起两个作用. 第一, 逗号是函数参数的分隔符, 也是矩阵下标的分隔符; 第二, 逗号也是区分矩阵列的标志, 在同一行中, 逗号分隔开的是各个列.

括号是调整运算先后次序的标点,可以通过引用括号来调整运算次序. 矩阵的定义需要使用中括号. 此外,中括号可以表示空矩阵,并通过该空矩阵实现对矩阵的部分删除. 例如:

```
>> a=[1,2,3,4; 5,6,7,8; 4,3,2,1; 8,7,6,5]           >> a(:,1:2)=[]
a =                                                       a =
    1     2     3     4                                     3     4
    5     6     7     8                                     7     8
    4     3     2     1                                     2     1
    8     7     6     5                                     6     5

>> b=a([1 3],:;)
b =
    3     4
    2     1
```

小数点“.”起到了数学符号的作用;而作为点运算的标志符,它又构成了各种各样的点运算;最重要的是,它可作为结构型数组应用时的专有符号.

“...”为 MATLAB 语言中的续行符,但是该续行符只能出现在各个语义群之间,即不能出现在变量名之间,否则会出错. 例如:

```
>> a=sin(pi/4)+cos(pi/4)-tan(pi/4)...           >> a=sin(pi/4)+cos(pi/4)-t...
    +cot(pi/4)                                     an(pi/4)
a =                                                  ??? an(pi/4)
1.4142                                           Error: Unexpected MATLAB expression.
```

单引号作为字符串的标示符而存在,同时,它在矩阵运算中也表示矩阵的转置运算及复数的共轭值. 例如:

```
>> a=[1,2,3,4; 5,6,7,8]           >> a'
a =                                   ans =
    1     2     3     4               1     5
    5     6     7     8               2     6
                                   3     7
>> s=3-4i; s'                       4     8
ans =
3.0000 + 4.0000i
```

5) 运算符

在 MATLAB 语言中的运算符包括算术运算符、关系运算符和逻辑运算

符. 在这三种运算符中, 其优先级的先后顺序为: 算术运算符、关系运算符、逻辑运算符, 运算符见表 1-6.

表 1-6 运算符

操作符	定 义	操作符	定 义
+	算术加	.^	点乘方
-	算术减	\	算术左除
*	算术乘	.\	点左除
.*	点乘	/	算术右除
^	算术乘方	./	点右除
==	等于	>	大于
~=	不等于	>=	大于等于
&	逻辑与	xor	逻辑异或
	逻辑或	any	当向量中存在非零元素时为真
~	逻辑非	all	当向量中所有元素非零时为真

其中, 点运算是指操作元素点对点的运算, 也就是矩阵内元素对元素之间的运算. 点运算要求参与运算的变量在结构上必须是相似的.

例1 >>a=[1,2,3; 4,5,6; 7,8,9]

a =

```

1     2     3
4     5     6
7     8     9
```

>> b=[1 2 3

4 5 6

7 8 9]

b =

```

1     2     3
4     5     6
7     8     9
```

>> c=a*b

c =

```

30    36    42
66    81    96
102   126   150
```

>> d=a.*b

d =

```

1     4     9
16    25    36
49    64    81
```

例2 >>a=[1:3; 4:6; 7:9];

>>x=5;

>>y=ones(3)*5;

>>xa=x<=a

xa =

0 0 0

0 1 1

1 1 1

>>b=[0 1 0;1 0 1;0 0 1];

>>ab=a&b

ab =

0 1 0

1 0 1

0 0 1

>>nb=~b

nb =

1 0 1

0 1 0

1 1 0

例3 >>a=magic(5);

>>a(:,3)=zeros(5,1)

a =

17 24 0 8 15

23 5 0 14 16

4 6 0 20 22

10 12 0 21 3

11 18 0 2 9

>>a1=all(a(:,1)<10)

a1 =

0

>>a2=all(a>3)

a2 =

1 1 0 0 0

>>a11=any(a(:,1)>10)

a11 =

1

>>a22=any(a>10)

a22 =

1 1 0 1 1

6) 字符串

在 MATLAB 中的字符串一般是 ASCII 值的数值数组，它作为字符串表达式显示出来。字符串用单引号输入或赋值；字符串的每个字符都是字符数组的一个元素；字符串和字符数组基本等价。字符串的每个字符（包括空格）都是字符数组的一个元素，字符串的相关操作见表 1-7。例如：

>> s='i love you'

s =

i love you

>> size(s)

ans =

1 10

>> s(2)

ans =

>> s(10)

ans =

u

表 1-7 字符串的相关操作

函数名	相关操作	函数名	相关操作
strcat	链接字符串	strvcat	垂直链接字符串
strcmp	比较两个字符串是否相等. 当相等时, 系统将返回值 1, 不相等时, 返回值 0	strncmp	比较两个输入字符串的前几个字符是否相等. 当相等时, 系统将返回值 1, 不相等时, 返回值 0
findstr	在其他的字符串中寻找该字符串	strjust	证明字符数组
strmatch	查找可能匹配的字符串	strep	用其他字符串代替该串
strtok	查找字符串中的记号	blanks	生成空的字符串
deblank	删除字符串内的空格	ischar	字符串检验
iscellstr	字符串的单元检验	isletter	字母检验
isspace	空格检验	strings	strings 函数的帮助
upper	转换串为大写	lower	转换串为小写
double	字符串转换为数值代码	num2str	数字转换为字符串
int2str	整数转换为字符串	mat2str	矩阵转换为字符串

1.1.2 MATLAB 的矩阵运算

1) 矩阵的表示

方式 1: 直接输入小矩阵 (最简便的方法). 例如, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 可

以这样输入:

```
>>A = [1,2,3; 4,5,6; 7,8,9]
```

A =

```
1     2     3
4     5     6
7     8     9
```

需要注意如下几点:

(1) 输入矩阵时要以 “[]” 为其标识, 即矩阵的元素应在 “[]” 内部.