普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

（第三版）

任功全　封建湖　薛宏智　编著

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

线 性 代 数

（第三版）

任功全　封建湖　薛宏智　编著

2009年本书第一版获陕西省普通高等学校优秀教材二等奖

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是根据多年的教学实践，按照新形势下教育改革的要求，在第二版的基础上修订而成的.这次修订吸取了使用本书的教师和读者所提出的宝贵意见，对文字叙述进行了全面修订和润色，保留了原版以矩阵为主线，同时也注意向量的作用和空间思想及代数与几何的相互渗透的体系和风格，以及内容丰富、结构严谨、概念深入浅出、过渡平滑自然、突出有关理论、方法的背景和应用的介绍、注重体现素质教育理念等特点，又在内容编排上增强了伸缩性，部分定理给出新的证明，课后习题作了适当调整并增加了一些较为综合的题目.全书共6章，内容包括行列式、矩阵、n维向量与向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、实二次型、线性空间与线性变换等.同时，书中适当安排了一些学生自学、章节小结、概念点评以及Matlab软件中与线性代数计算有关的命令简介等内容.各章节后均配有一定数量的习题，书后附有习题提示和答案.

本书便于教学和自学，可作为高等院校工科各专业的教材，也可供科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/任功全，封建湖，薛宏智编著.—3版.—北京：科学出版社，2015.5
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-044107-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①任…②封…③薛… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第078824号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：张凤琴
责任印制：霍 兵 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年8月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2012年2月第 二 版 印张：17
2015年5月第 三 版 字数：342 000
2015年5月第十一次印刷

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

第三版前言

本书第三版在吸取当前教材改革中一些成功的改革举措的基础上，对书中一些内容作了修订和补充，如克拉默法则唯一性的证明、行列式的几何意义及一般线性方程组相容性证明的注释等，对第二版中存在的个别问题也作了修订. 同时，结合教学实践和互联网上部分读者对本书的评价及希望，我们对书中绝大部分习题作了提示或较完整的解答，有些是一题多解. 但必须指出，解题的思路和方法是多种多样的，不要因为我们的提示而束缚了思想，只有通过自己的刻苦钻研和独立思考，才能起到对内容加深理解和灵活运用的作用.

我们感谢十年来使用本书的教师和读者支持、关心和提出的宝贵意见. 对线性代数教学内容和教学方法的改革与创新永远在路上，本次再版远未臻于完美，鱼鲁之误，在所难免，希望继续对新版多加批评和帮助.

作　者

2015 年 1 月

第二版前言

本书第一版自2005年出版以来，得到许多高等工科院校数学教师和选修线性代数课程的学生的认同和厚爱而被选用，并于2009年获陕西省普通高等学校优秀教材二等奖. 随着教育改革的深入，为更好地适应当前的教学需要，我们根据在教学实践中积累的经验，并吸取使用本书的教师和读者所提出的宝贵意见，于2011年初开始对第一版进行修订. 第二版在保留第一版体系和风格的基础上，主要做了以下几个方面的修订：

(1) 对文字进行了全面修订和润色，力求简练、确切、规范、严谨.

(2) 考虑到工科院校教学的实际情况，内容编排在保证连贯的前提下，具有一定的弹性，采用不同字体和打星号方式排印，可兼顾不同层次、不同专业对本课程的不同要求，便于使用者取舍. 这样，对于学时较少、要求较低的专业和读者，可只学宋体字部分，用30学时左右就可以掌握线性代数的基本内容. 对于学时充裕、要求较高的专业，可方便地选择楷体部分及打星号内容.

(3) 对部分定理给出新的更简洁、清晰的证明.

(4) 对课后习题作了适当调整并增加了一些较为综合的题目，希望学生在掌握线性代数的基本理论的同时，受到抽象的理性思维的熏陶和锻炼，使教材能成为创造性思维的推动力.

在本次修订中，得到使用本书的同行和读者的关心与支持，我们在此表示诚挚的谢意. 同时，要特别感谢科学出版社的编辑多年来的鼎立支持和热情鼓励.

新版中存在的问题，敬请广大专家、同行和读者批评指正.

作　者

2011年11月

第一版前言

线性代数的主要内容是研究代数学中线性关系的经典理论. 由于线性关系是变量之间比较简单的一种关系，而线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，并且一些非线性问题在一定条件下，可以转化或近似转化为线性问题，因此线性代数所介绍的思想方法已成为从事科学研究和工程应用工作的必不可少的工具. 尤其在计算机高速发展和日益普及的今天，线性代数作为高等学校工科本科各专业的一门重要的基础理论课，其地位和作用更显得重要.

本书是根据教育部工科数学课程教学指导委员会最新修订的《工科类本科数学基础课教学基本要求》(修订稿)的精神和原则，结合多年学习、研究和教学工作中的一些感悟与经验，面向工科类本科各专业大学生编写的《线性代数》教材. 内容包括：行列式、矩阵、n 维向量与向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、实二次型、线性空间和线性变换等. 在编写本书时，我们有以下考虑.

(1) 追求适用性、通用性、严谨性、简明性、先进性的统一；强调数学思想方法，考虑到工科院校教学的实际情况，兼顾不同层次、不同专业对本课程的不同要求，便于教师和学生使用；适当加强学生的数学基础，注重实际应用.

(2) 矩阵方法是工程技术中应用十分广泛的方法，而且具有表达具体和明显的特点. 所以，用矩阵方法处理抽象性和逻辑性较强的线性代数内容，可使抽象化的结果转变为具体运算的结果，不仅可以分散本课程的难点，而且有利于学生掌握一些矩阵运算技巧，提高数学计算能力和应用数学思想方法的素质. 基于上述考虑，在结构体系上，本书以矩阵为主线，同时也注意向量的作用和空间思想及代数与几何的相互渗透.

(3) 为提高本书的可读性和趣味性，力求书写简洁流畅，语言通俗易懂. 采用学生易于接受的方式引入概念，突出有关理论、方法的背景和应用的介绍. 同时，适当安排了一些学生自学、章节小结、概念点评及 Matlab 软件中与线性代数计算有关命令简介等内容. 体现素质教育理念，激发学生潜能，培养学生创新意识.

本书由任功全任主编，全面负责总体方案设计、具体内容编排及统稿工作. 各章的具体分工如下：第 1 章由薛宏智编写，第 2～5 章由任功全编写，第 6 章由封建湖编写，张全兴编写了附录.

在编写过程中，参阅了大量国内外同类教材，受到不少启发和教益，谨向有关作者表示诚挚的谢意！同时，长安大学理学院、教务处的有关领导及数学与信息科学系的各位同仁对本书的编写给予热情的支持和指导. 冯复科副教授、侯奠社副教授、张全兴老师仔细阅读了书稿，提出了许多建设性意见. 在此一并致谢！

与一些常见的教材相比，本书第 2 章、第 3 章的内容做了较大修改，这是改革教学内容与教学方法的一种探索和尝试．虽然作者尽了最大努力，但一些改动和叙述未必臻于完善，甚或多有不妥之处．同时，限于作者学识，加之时间仓促，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正．

作　者

2005 年 4 月

目　　录

第三版前言
第二版前言
第一版前言
第 1 章　行列式 …… (1)
1.1　数域与排列 …… (1)
1.2　行列式的定义 …… (4)
1.3　行列式的性质 …… (10)
1.4　行列式按行(列)展开 …… (17)
*1.5　拉普拉斯定理 …… (25)
1.6　克拉默法则 …… (29)
小结与点注 …… (34)
习题 1 …… (36)
第 2 章　矩阵及其运算 …… (40)
2.1　矩阵的引入 …… (40)
2.2　矩阵的运算 …… (44)
2.3　逆矩阵 …… (59)
2.4　矩阵的分块运算 …… (66)
2.5　矩阵的初等变换与初等矩阵 …… (74)
2.6　矩阵的秩 …… (84)
2.7　线性方程组的消元法 …… (90)
小结与点注 …… (101)
习题 2 …… (106)
第 3 章　向量组的线性相关性 …… (112)
3.1　向量空间 …… (112)
3.2　向量组的线性相关性 …… (120)
3.3　向量组的秩 …… (126)
3.4　线性方程组解的结构 …… (131)
小结与点注 …… (136)
习题 3 …… (140)
第 4 章　相似矩阵 …… (148)
4.1　向量的内积 …… (148)

4.2　方阵的特征值与特征向量 …………………………………………… (154)
4.3　相似矩阵 ………………………………………………………………… (159)
4.4　实对称矩阵的相似矩阵 ……………………………………………… (164)
4.5　应用举例 ………………………………………………………………… (171)
小结与点注……………………………………………………………………… (176)
习题 4 …………………………………………………………………………… (180)
第 5 章　二次型……………………………………………………………… (185)
5.1　二次型及其标准形 …………………………………………………… (185)
5.2　化二次型为标准形 …………………………………………………… (189)
5.3　正定二次型 …………………………………………………………… (198)
小结与点注……………………………………………………………………… (206)
习题 5 …………………………………………………………………………… (208)
第 6 章　线性空间与线性变换……………………………………………… (211)
6.1　线性空间的定义与基本性质 ………………………………………… (211)
6.2　基、维数与坐标…………………………………………………………… (215)
6.3　线性子空间 …………………………………………………………… (220)
6.4　线性变换 ……………………………………………………………… (226)
6.5　线性变换的矩阵表示 ………………………………………………… (229)
6.6　内积空间 ……………………………………………………………… (232)
小结与点注……………………………………………………………………… (237)
参考文献……………………………………………………………………… (239)
附录　Matlab 软件中与线性代数计算有关的命令简介 ………………… (240)
部分习题答案………………………………………………………………… (242)

第 1 章 行 列 式

行列式(determinant)的概念是人们在求解线性方程组的过程中产生的，是一个重要的数学工具，在数学本身及其他学科的研究中都有广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及用行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1 数域与排列

在学习 n 阶行列式之前，我们先引入数域与排列的概念.

1.1.1 数域

我们知道，数是数学的一个最基本的概念，一切计算最终都归结为数的代数运算. 因此，要定量地研究一个问题，就必须考虑所研究对象的取值范围. 例如，方程 $x^2+1=0$，不仅在有理数范围内无解，就在实数范围内也无解，而在复数范围内有解，且解为 $\pm\mathrm{i}$. 由此可见，同一个问题在不同的数的取值范围内可以有不同的结论. 为了对不同的数的范围统一地讨论一些问题，提取有理数集、实数集、复数集所共有的特征，便有以下数域的概念.

定义 1.1.1 设 P 是至少含有两个不同复数的数集，如果 P 中任意两个数(这两个数可以相同)的和、差、积、商(除数不为零)仍为 P 中的数，那么 P 就称为一个数域(field of numbers).

显然，有理数集 **Q**、实数集 **R**、复数集 **C** 都是数域，而整数集 **Z** 不是数域，因为任两个整数的商不一定是整数.

如果数集 P 中任意两个数作某一运算的结果都在 P 中，我们就说数集 P 对这一运算是封闭的. 因此数域也可定义为：至少含有两个不同数的数集 P，如果对于加法、减法、乘法、除法(除数不为零)的运算是封闭的，则称 P 为一数域.

性质 1.1.1 任意一个数域 P 必含 0 和 1.

证 由数域的定义知，P 中必含有两个不同数 a,b，所以 a,b 至少有一个不为零，不妨设 $b\neq0$，由于数域 P 对于减法、除法运算是封闭的，所以 $b-b\in P$，$\dfrac{b}{b}\in P$，即 $0\in P$，$1\in P$. □

性质 1.1.2 任何数域 P 都包含有理数域 **Q**.

证 P 为数域，则 P 中必含 0 和 1，再由 1 通过加法可得到一切正整数，而用 0

减去正整数可得到一切负整数,因而全体整数集 $\mathbf{Z}\subset P$,通过整数的除法可得一切有理数,即 $\mathbf{Q}\subset P$. □

如果所讨论问题中只涉及数的加、减、乘、除运算且对这些运算封闭,我们就可以认为该问题所涉及的数的取值范围属于某一数域.

1.1.2 排列

把 $n(n\geqslant 2)$ 个不同的元素按一定的顺序排成一列,称为这 n 个元素的一个排列(permutation). 若取 n 个不同的元素为 $1\sim n$ 这 n 个自然数,则有下面的定义.

定义 1.1.2　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$,称为一个 n 元排列.

例如,自然数 1,2,3 组成的 3 元排列共有六种:123,132,213,231,312,321. 通常由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有 n 元排列的种数用 P_n 表示,容易计算得,$P_n=n(n-1)\cdots 2\times 1=n!$.

显然,$123\cdots n$ 是一个 n 元排列,它的特点是具有自然顺序,即从小到大递增的顺序,我们把这个排列称为自然排列或标准排列,而除此之外的其他的 n 元排列都或多或少地违反了这个顺序.

定义 1.1.3　在一个 n 元排列 $p_1\cdots p_k\cdots p_s\cdots p_n$ 中,按照排列中的顺序任取两个数 $p_k,p_s(1\leqslant k<s\leqslant n)$. 若 $p_k>p_s$,那么 p_k,p_s 就构成了一个逆序,一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如,5 元排列 51423 中构成逆序的数对有 51,54,52,53,42,43,因此 $\tau(51423)=6$.

下面是计算 n 元排列的逆序数的方法.

设由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个 n 元排列为 $p_1p_2\cdots p_n$,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果位于 p_i 后面且小于 p_i 的数有 t_i 个,则元素 p_i 的逆序数为 t_i,那么全体元素的逆序数之和就是这个排列的逆序数,即 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$.

例 1.1.1　求(1) $\tau(52413)$;　(2) $\tau(n(n-1)\cdots 21)$.

解　(1) 在排列 52413 中,

5 的后面比 5 小的数有四个(2,4,1,3),故逆序数为 4;

2 的后面比 2 小的数有一个(1),故逆序数为 1;

4 的后面比 4 小的数有两个(1,3),故逆序数为 2;

1 为最小的数,故逆序数为 0;

3 排在最末位,故逆序数为 0.

于是排列的逆序数 $\tau(52413)=4+1+2+0+0=7$.

(2) 如同(1)中的分析,可得

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义 1.1.4 逆序数为奇数的排列称为奇排列(odd permutation),逆序数为偶数的排列称为偶排列(even permutation).

把一个排列中某两个元素的位置互换,而其余元素的位置不动,就得到了一个新的排列,这种变换称为对换(interchange).例如,经过 1,2 对换,排列 51423 就变成了 52413,从前面的例子知:51423 为偶排列,52413 为奇排列,即施行一次对换改变了排列的奇偶性.事实上,这并不是偶然的.关于排列的奇偶性我们有以下的性质.

性质 1.1.3 排列中任意两个元素作对换,排列改变奇偶性.

证 先考虑相邻对换,即排列中对换的两个元素是相邻的,这时排列$\cdots ij\cdots$经 i,j 对换后变成新的排列$\cdots ji\cdots$.这里"$\cdots$"表示那些位置不变的数.在这两个排列中,不同的只是 i,j 的次序,其余元素的逆序数没有变化.

若 $i<j$,则对换后的排列中元素 j 的逆序数就增加了一个,即 $\tau(\cdots ji\cdots)=\tau(\cdots ij\cdots)+1$;若 $i>j$,则对换后的排列中元素 j 的逆序数就减少了一个,即 $\tau(\cdots ji\cdots)=\tau(\cdots ij\cdots)-1$.所以,相邻对换改变排列的奇偶性.

再考虑一般情形.设对换的两个元素 i 与 j 中间还有 s 个元素($s>0$),即排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots. \tag{1.1.1}$$

这时,把元素 i 依次与右边的 $s+1$ 个元素 $k_1k_2\cdots k_sj$ 进行相邻对换,得

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots, \tag{1.1.2}$$

再把元素 j 依次与左边的 s 个元素 $k_sk_{s-1}\cdots k_1$ 进行相邻对换,于是经过 $2s+1$ 次相邻对换,完成了元素 i 与 j 的对换.而每作一次相邻对换排列的奇偶性改变一次,现经过奇数次相邻元素的对换,最终必改变排列的奇偶性. □

推论 1.1.1 奇、偶排列变成标准排列的对换次数依次为奇数和偶数.

证 显然任一排列都可通过若干次对换变成标准排列,由排列奇偶性的性质知,对换的次数就是排列奇偶性变换的次数,由于标准排列为偶排列(逆序数为 0),由此可知奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数,偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数. □

(**思考** 设 n 元排列$\cdots i\cdots j\cdots$的逆序数为 k,那么,n 元排列$\cdots j\cdots i\cdots$的逆序数为 $k+1$ 或 $k-1$ 吗?)

练 习 1.1

1. 判断下列数集是否是数域,并加以证明.

(1) $P_1=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$;

(2) $P_2=\{a+b\mathrm{i}\mid a\in\mathbf{Q},b\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}$.

2. 求下列各排列的逆序数.

(1) 3 1 5 4 6 2; (2) 3 6 5 4 1 2;

(3) 7 6 5 4 3 2 1; (4) 6 7 4 5 3 1 2.

3. 选取 i 与 k，使

(1) $1\ 2\ 7\ 4\ i\ 5\ 6\ k\ 9$ 成为偶排列；

(2) $1\ i\ 2\ 5\ k\ 4\ 8\ 9\ 7$ 成为奇排列.

4. 讨论排列 $1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ (2n)$ 的奇偶性.

1.2　行列式的定义

从这节开始，我们总是在某一固定的数域 P 上讨论问题，所谈到的数均指这个数域 P 中的数. 在给出 n 阶行列式的定义之前，首先让我们简单回顾一下二阶、三阶行列式的概念.

1.2.1　二阶和三阶行列式

在初等数学中，我们曾学过二元和三元线性方程组的求解方法. 例如，二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，用加减消元法可求得(1.2.1)的唯一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

为了方便记忆，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.2.3}$$

(1.2.3)称为二阶行列式，其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素. a_{ij} 的第一个下标 i 表示它所在行的序号，称为**行标**，第二个下标 j 表示它所在列的序号，称为**列标**. 例如，a_{21} 就表示位于第 2 行、第 1 列处的元素.

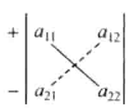

图 1.2.1

上述二阶行列式的定义，也可用对角线法则来定义，如图 1.2.1 中实线称为行列式的主对角线，虚线称为行列式的次对角线，即二阶行列式等于它的主对角线上两个元素的乘积减去次对角线上两个元素的乘积.

根据定义，(1.2.2)中分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.2.1)的唯一解就可写为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}, x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

上述公式中的 D 称作方程组(1.2.1)的**系数行列式**(determinant of coefficient matrix)，$D_j(j=1,2)$就是用方程组的常数列代替系数行列式的第 j 列所得的行列式.

同样地，对三元线性方程组也有类似的结论. 对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.2.4}$$

我们引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.2.5}$$

显然，三阶行列式是由 9 个数排成 3 行 3 列构成的，它表示一个数，其值为 6 项代数和，其中正负项各半，每项均为取自行列式中位于不同行不同列的三个元素的乘积. 其计算规律遵循图 1.2.2 所示的**对角线法则**.

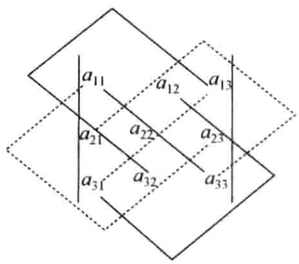

图 1.2.2

三条实线看作是平行于主对角线的连线，三条虚线看作是平行于次对角线的连线，实线上的三个元素的乘积赋予正号，虚线上的三个元素的乘积赋予负号.

注 平面直角坐标系中以向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2)$为邻边的平行四边形的面积是 $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$（当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 与单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 定向一致时，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 为正，否则为负）；在空间直角坐标系中以向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{\gamma}=(c_1,c_2,c_3)$为棱的平行六面体的体积是 $|(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$（当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 与单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 定向一致，即它们组成右手系时，$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}$ 为正；当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 组成左手系时，$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}$

为负). 因此,一个二阶行列式可以表示以它的第一、二列为坐标的两个向量为邻边的平行四边形的定向面积,一个三阶行列式可以表示以它的第一、二、三列为坐标的三个向量为棱的平行六面体的定向体积.

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

那么,当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.2.4)的唯一解就可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2.1　求解方程组 $\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-5y+3z=2, \\ x-y+z=-1. \end{cases}$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\times(-5)\times 1+(-4)\times 3\times 1+1\times 1\times(-1)-1\times(-5)\times 1-1\times(-4)\times 1-2\times(-1)\times 3=-8\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-5+12-2-5+8+3=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4+3-1-2-1+6=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=10-8-1+5-4+4=6,$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\quad y=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},\quad z=\frac{D_3}{D}=-\frac{3}{4}.$$

综上所述,在引入了二阶、三阶行列式的概念以后,二元、三元线性方程组的解可以公式化. 为了把这一思想推广到 n 元线性方程组,我们引入 n 阶行列式的概念.

1.2.2 n 阶行列式

在给出 n 阶行列式定义之前,让我们先分析一下三阶行列式的定义式(1.2.5)的结构.不难看出:

(1) (1.2.5)中右边的每一项都是取自行列式中不同行不同列的三个元素的乘积,因此,右边的任一项除正负号外均可写为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的形式,其中 $p_1p_2p_3$ 为一个三元排列.

(2) (1.2.5)中右边每一项的三个元素的行标排成标准排列 123 时,列标都是 1,2,3 的某一排列,这样的排列共有 3! 种,故三阶行列式共有 6 项.

(3) 容易算得,在(1.2.5)中,带正号的三项列标排列 123,231,312 全为偶排列;带负号的三项列标排列 132,213,321 全为奇排列.

因此,三阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 的种数求和.

仿此,可以把行列式推广到一般情形.

定义 1.2.1 设有数域 P 中 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,排成一个 n 行 n 列的正方形阵列,在正方形阵列的两边用竖线段括起来成为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2.6}$$

(1.2.6)称为 n 阶行列式,它表示一个数,其值为

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的种数求和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})_{n\times n}$ 或 $\det(a_{ij})$,数 a_{ij} 称为行列式的元素.

由定义 1.2.1 知,n 阶行列式值等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和,这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一 n 元排列,当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列时,该项前面带正号;当 $p_1p_2\cdots p_n$ 为奇排列时,该项前面带负号.

当 $n=2,3$ 时，按此定义的二阶、三阶行列式与前面用对角线法则定义的二阶、三阶行列式显然是一致的. 但当 $n>3$ 时，已不再有相应的对角线法则. 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，注意不要和绝对值记号相混淆.

例 1.2.2　(1) 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，求 x^3 和 x^4 的系数.

解　(1) 在行列式中只有 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素不为零，且恰处于不同行不同列，所以行列式中不为零的项只有 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1n}a_{n1}$，这时该项列下标排列的逆序数 $\tau(23\cdots n1)=n-1$，于是 $D=(-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1n}a_{n1}=(-1)^{n-1}n!$.

(2) 根据行列式的定义，仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 四个元素相乘才能出现 x^3 项，这时该项列下标排列的逆序数为 $\tau(2134)=1$，故 x^3 的系数为 -1. 同理，x^4 的系数为 2.

例 1.2.3　证明 n 阶上三角行列式(其主对角线以下的元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　由定义 1.2.1 知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

在此行列式中，当 $p_i<i$ 时，元素 $a_{ip_i}=0$，从而在定义式中，可能不为零的项中的任意因子 a_{ip_i} 的行标和列标必须满足 $p_i\geqslant i$，即 $p_1\geqslant 1$，$p_2\geqslant 2$，…，$p_{n-1}\geqslant n-1$，$p_n\geqslant n$. 而能满足上述关系的列标排列只有一个标准排列 $12\cdots n$，且 $\tau(12\cdots n)=0$. 故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，n 阶对角行列式