

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Panorama of Mathematics

数 学 概 览

10.1



数学的世界 I

从阿默士到爱因斯坦
数学文献小型图书馆

— J.R. 纽曼 编

— 王善平 李璐 译

高等教育出版社

Panorama of Mathematics

数 学 概 览



SHUXUE DE SHIJIE I

数学的世界 I

从阿默士到爱因斯坦
数学文献小型图书馆

— J.R. 纽曼 编

— 王善平 李璐 译

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

数学的世界. 1/(美)纽曼(Newman, J. R.)编;
王善平, 李璐译. --北京: 高等教育出版社, 2015. 7
(数学概览/严加安, 季理真主编)
ISBN 978-7-04-043237-4

I. ①数… II. ①纽… ②王… ③李… III. ①数学 -
普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第149049号

策划编辑 王丽萍
责任印制 毛斯璐

责任编辑 王丽萍

封面设计 王 琰

版式设计 杜微言

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 国防工业出版社印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 25.5
字 数 390千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2015年7月第1版
印 次 2015年7月第1次印刷
定 价 59.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 43237-00

《数学概览》编委会

主编： 严加安 季理真

编委： 丁 玖 李文林

曲安京 王善平

徐 佩 姚一隼

《数学概览》序言

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系。的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答。伽利略说: “数学是上帝用来描述宇宙的语言。” 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学。因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育。

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论。如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支。例如, 现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支。老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题。例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明。不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹奖获得者的工作就是明证。

现代数学及其未来是那么神秘, 吸引我们不断地探索。借用希尔伯特的一句话: “有谁不想揭开数学未来的面纱, 探索新世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢? 我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标? 在广阔而丰富的数学思想领域, 新世纪将会带来什么样的新方法和新成就?”

中国有句古话：老马识途。为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界，我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津。想象一下，如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情。这样的机会当然不多，但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养。

作为本丛书的前几卷，我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作。例如，希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期；克莱因的《数学讲座》是他在 19 世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做的系列通俗报告基础上整理而成的，他的报告与当时的数学前沿密切相关，对美国数学的发展起了巨大的作用；李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解；拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献，而且还是分析概率论的奠基人，他的《概率哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考。这些著作历久弥新，写作风格堪称一流。我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点，良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要。

数学是一个整体，数学的各个领域从来就是不可分割的，我们要以整体的眼光看待数学的各个分支，这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来。除了大师们的经典的数学著作之外，我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版，希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域。我们选书的唯一标准就是：该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论，具有历史价值，有趣且易懂，它们应当能够激发读者学习更多的数学。

作为人类文化一部分的数学，它不仅具有科学性，并且也具有艺术性。罗素说：“数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高无上的美。”数学家维纳认为“数学是一门精美的艺术”。数学的美主要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性，数学的美还表现在它内部的和谐和统一。最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美，它应该可以而且能够被我们理解和欣赏。怎么来培养数学的美感？阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径。我们希望这套数学概览译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友。

严加安、季理真

2012 年秋于北京

在古代和现代的研究之间的矛盾时期,对于一个研究必定有一些事情要谈论,它不是从毕达哥拉斯开始,也不是以爱因斯坦结束,而是最年老的和最年轻的研究.

哈代(一个数学家的辩白)

引言

引言既是问候,也是告别.我致力于本书如此长久,以致难以割舍.从我搜集选集的素材开始至今已经十五载有余,这些素材要使人领略到数学的多样性、实用性和优美.起初似乎感到任务不会太艰巨,耗时也不会过分漫长,因为我对本书所涉主题的一般文献还算熟悉,再说我也不打算编纂一部庞大的原始资料集.不久我发现我的估计错了.关于数学的本质、用途和历史的通俗读物并没有带来我所期望的多样性.于是我必须在浩如烟海的技术和学术文献中搜寻数学思想的范例,使普通读者能够理解和喜欢.关于数学的基础和哲学、数学同艺术和音乐的关系以及数学对于社会和经济问题的应用等容易理解的短文难以发现.还有,我并未计划对选集的每篇文章写引言,但在工作的进展过程中,显现出许多文章在结合其背景阅读时是发人深省的,但是当单独阅读时却意味锐减.因此必须对相关文章提供背景资料,解释写它的动机以及它在数学思想的发展中的地位.于是我原本打算两年完成的工作却延续了二十年中的大部分时光;所设想的适度大小的篇幅最终呈现的规模即使是不够自我约束的作者也不得不承认是大大膨胀了.

我试图在本书中体现数学的广博、数学思想的丰富以及其层面的复杂.数学是一个工具,一种语言 and 一幅图像;它是一件艺术作品,是自身的终结;它是对于完美的酷爱的实现过程.它似乎被视为讽刺的对象,或是幽默的元素和辩论的话题;又似激发联明才智的马刺和启发说书人想象力的酵母;它使人们狂热并给大家带来愉悦.普遍认为它是由人类所创建的但独立于人类单独存在的知识体.我希望在这部选集中你能找到适合各种品味和接受力的素材.

选入本书的文章有许多篇幅较长,这源于我厌恶残缺不全或支离破碎.

理解数学逻辑或相对论,并不是有教养的人所必需的特质。但是如果一个人希望了解这些科目的某些方面,他就必须学习一些内容。精通基本的语言,掌握一项技术,一步步地跟踪一个典型的推理序列,以及理解一个问题的来龙去脉,付出这种努力的读者将不会失望。固然本选集中有些文章是难懂的,但是令人感兴趣的是有多少文章即使没有超常才能或特殊训练也能够被理解。自然,那些有足够勇气挑战更加艰难主题的人将获赢得特殊的回报,这有点像理解了某个论证和得到了证明后所获得的满足感。对于每一个人这都是一种创造性活动,就像他做出了此前从未有过的发现;从而陶冶了人们的情操。

选集是颇具个人偏见的一类著作,即使主题是数学,也不见得比诗歌或小说这种个人偏见来得少。例如我厌烦幻方,但我从不厌烦概率论。我更喜欢几何而非代数,喜欢物理而非化学,喜欢逻辑而非经济,喜欢无穷数学而非数论。我回避了某些主题,淡化一些主题,却对另外一些主题表现出了很高的热情。我不为这些偏见愧疚;我自认缺乏数学才能,但我自由地介绍我所钟爱的数学。

许多人对本书的编纂提供了帮助。对于我的朋友和过去的同事罗伯特·哈赤 (Robert Hatch) 在编辑方面的建议,我难以表达我万分的感激。这种帮助并非是无要紧要的或者仅仅是形式上的,而是本书在本质上和风格上就接受了他的意见。我的老师及朋友欧内斯特·内格尔 (Ernest Nagel) 不仅给出了不少建议和批评,还特为本书提供了关于符号逻辑的精彩随笔。萨姆·罗森堡 (Sam Rosenberg) 阅读了我所写的内容,并且发挥他的智慧改善了它。我的妻子以一如既往的聪明智慧和宽容大度鼓励我工作。Rutgers 大学文学教授和农业系的前图书馆管理员拉尔夫·肖 (Ralph Shaw) 博士,在原稿的准备中给了非常宝贵的帮助。我还感谢我的出版者——特别是杰克·古德曼 (Jack Goodman)、汤姆·托尔·贝文斯 (Tom Torre Bevans) 和彼得·施维德 (Peter Schwed) 的贡献——他们的宽容,本预定 1942 年出版的书一直等到了 1956 年,以及他们在艰难的设计和制作工作中表现出的想象力和才能。

J. R. N.

数学概览 图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

	书号	书名	著译者
1	35167-5	Klein 数学讲座	F. 克莱因 著 陈光还 译 徐佩 校
2	35182-8	Littlewood 数学随笔集	J. E. 李特尔伍德 著 李培廉 译
3	33995-6	直观几何（上册）	D. 希尔伯特、S. 康福森 著 王联芳 译 江泽涵 校
4	33994-9	直观几何（下册）附亚历山德罗夫的 拓扑学基本概念	D. 希尔伯特、S. 康福森 著 王联芳、齐民友 译
5	36759-1	惠更斯与巴罗，牛顿与胡克：数学分析 与突变理论的起步，从渐伸线到准晶 体	B. И. 阿诺尔德 著 李培廉 译
6	35175-0	生命·艺术·几何	M. 吉卡 著 盛立人 译
7	37820-7	关于概率的哲学随笔	P.-S. 拉普拉斯 著 龚光鲁 钱敏平 译
8	39360-6	代数基本概念	I.R. 沙法列维奇 著 李福安 译
9	41675-6	圆与球	W. 布拉施克 著 苏步青 译
10.1	43237-4	数学的世界 I	J.R. 纽曼 编 王善平 李璐 译

网上购书：www.landaco.com, www.gdjycbs.tmall.com, academic.hep.com.cn, www.china-pub.com,
www.amazon.cn, www.dangdang.com

其他订购办法：

各使用单位可向高等教育出版社电子商务部汇
款订购。书款通过支付宝或银行转账均可。
购书免邮费，发票随书寄出（大批量订购图书，
发票随后寄出）。

单位地址：北京西城区德外大街 4 号

电 话：010-58581118 传 真：010-58581113

通过支付宝转账：

支付宝：gaojiaopress@sohu.com
名 称：高等教育出版社有限公司

通过银行转账：

户 名：高等教育出版社有限公司
开 户 行：交通银行北京马甸支行
银行账号：110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第 1 部分: 无穷的数学	1
1 数学与形而上学家 伯特兰·罗素	3
编者评注: 汉斯·哈恩	19
2 无穷 汉斯·哈恩	21
第 2 部分: 数学真理与数学结构	39
编者评注: 本部分内容简介	41
1 论数学真理的本质 卡尔·G. 亨佩尔	47
2 几何学与经验科学 卡尔·G. 亨佩尔	61
3 公理化方法 雷蒙德·L. 怀尔德	73
4 哥德尔的证明 欧内斯特·纳格尔, 詹姆斯·R. 纽曼	95
5 数学科学 奥斯瓦尔德·维布伦, 约翰·韦斯利·杨	121
6 数学与世界 道格拉斯·加斯金	133
7 数学公设与人类理解 理查德·冯·米泽斯	147
第 3 部分: 数学的无理性	177
编者评注: 荒谬的重要性	179
1 悖论去而复来 爱德华·卡斯纳, 詹姆斯·R. 纽曼	181
2 直观的危机 汉斯·哈恩	199
第 4 部分: 怎样解题	217
编者评注: 数学之泪	219
1 怎样解题 G. 波利亚	221

第 5 部分: 数学词汇	233
编者评注: 关于二维无限和谐关系和其他数学术语	235
1 老概念的新名称 爱德华·卡斯纳, 詹姆斯·R. 纽曼	237
第 6 部分: 数学之为艺术	251
编者评注: 约翰·威廉·纳文·沙利文	253
1 数学之为艺术 约翰·威廉·纳文·沙利文	257
第 7 部分: 战争中的数学	265
编者评注: 弗雷德里克·威廉·兰彻斯特	267
1 战争中的数学 弗雷德里克·威廉·兰彻斯特	269
编者评注: 运筹学	285
2 怎样猎杀潜艇 菲利普·M. 莫尔斯, 乔治·E. 金博尔	287
第 8 部分: 艺术的数学理论	305
编者评注: 乔治·大卫·伯克霍夫	307
1 审美的数学 乔治·大卫·伯克霍夫	311
第 9 部分: 正义的数学	321
1 伦理学的一个数学方法 乔治·大卫·伯克霍夫	323
第 10 部分: 文学中的数学	333
编者评注: 飞岛拉普塔	335
1 摆线布丁 乔纳森·斯威夫特	339
编者评注: 阿道斯·赫胥黎	345
2 小阿基米德 阿道斯·赫胥黎	347
编者评注: 福琼先生	373
3 南太平洋的几何 西尔维亚·汤森·华纳	375
编者评注: 统计学作为文学的灵感	385
4 不容改变的逻辑 罗素·马洛尼	387
5 律法 罗伯特·M. 科茨	393

第 1 部分*

无穷的数学

1 数学与形而上学家

编者评注: 汉斯·哈恩

伯特兰·罗素

2 无穷

汉斯·哈恩

*原书第 X 部分, 本部分译者为王善平.

看,真理躲闪着逃往洞穴老家,
头顶堆垒着诡辩的群山!
哲学早先倚仗天国,
如今萎缩只剩第二因,再无其他.
物理学祈求形而上学庇护,
而形而上学吁请感觉帮助!
看,神秘飞向数学!

亚历山大·蒲柏¹⁾

1 数学与形而上学家²⁾

伯特兰·罗素³⁾

因发明蒸汽机和进化论而感到自豪的 19 世纪,也许用发现纯数学 (pure mathematics) 作为扬名的招牌才更合乎情理. 纯数学这门科学,如同其他大多数科学,在诞生前很久就已经被命名. 于是我们看到,19 世纪以前的作者已经在谈论他们称之为“纯数学”的东西. 但如果问他们,这门学科是什么? 他们只会回答,它包括了算术、代数、几何,等等. 至于这些研究领域有什么共同之处,以及它们与应用数学的区别在哪里,我们的前辈则一无所知.

纯数学是布尔 (Boole) 在其名为《思想的规律》(Laws of Thought, 1854) 的著作中提到的. 此书通篇声称它不是数学书;这表明布尔太谦虚了,以致

¹⁾亚历山大·蒲柏 (Alexander Pope, 1688—1744), 18 世纪英国最重要的诗人,以写讽刺诗和翻译荷马作品出名,其诗文一直被广泛引用. 代表作讽刺长诗《群愚史诗》(The Dunciad) 反映了现代文明在伴随着科学一起成长的过程中,对英国传统思想、文化和价值观造成巨大的冲击并带来混乱. 此处引用了该诗的一节;其中“第二因” (the second cause) 通常指自然科学 (第一因指上帝). ——译注

²⁾形而上学家 (metaphysician), 此处是指本文中几位致力于澄清数学基本概念的学者. ——译注

³⁾伯特兰·罗素 (Bertrand Arthur William Russell, 1872—1970), 英国贵族,著名的哲学家、逻辑学家、数学家、历史学家和社会批评家. ——编注

不认为他的书是第一部写论 (write on) 数学的著作。他还犯了一个错误, 以为自己在研究思想的规律: 关于人们实际上是如何思考的问题与他并无关系; 而且如果他的著作确实包含了思想的规律, 那么奇怪的是, 以前从来没有人按照这种方式思考。事实上, 他的书在研究“形式逻辑”, 而这同数学是一回事。

纯数学完全由断言组成, 它们大致如此: 如果关于任一事物 (anything) 的如此这般的命题为真, 则关于该事物的如此这般的另外命题也为真。重要的是, 不讨论第一个命题是否确实为真, 也不关心设其为真的那个任一事物是什么。这些讨论和关心应该属于应用数学。在纯数学中, 我们从若干推理规则出发; 利用这些规则我们能判断, 如果某个命题为真, 则其他某个命题也为真。这些推理规则构成了形式逻辑原理的主要内容。我们可以提出任何看似有趣的假设 (hypothesis), 然后推演他们的后承 (consequences)。如果我们的假设是关于任一事物, 而不是关于一个或多个特定事物, 则我们的演绎就构成了数学。因此, 数学可以定义为这样一门学科: 在这里我们永远不知道自己在谈论什么, 也不知道我们所说的是否为真。我希望, 那些一开始就被数学迷惑的人会对这个定义感到满意, 而且也许会赞同这是一个准确的定义。

现代数学最辉煌成就之一就是发现了数学到底是什么; 因此, 关于这门科学再多讲几句话也无可厚非。通常, 任一数学分支——例如几何学——都是从一些被认为不能定义的原始概念和若干条被认为无法证明的原始命题或公理开始的。目前的事实是, 虽然每个应用数学分支中都有不能定义或无法证明的东西, 但它们在纯数学中并不存在, 除了诸如属于普通逻辑的东西。广义地讲, 逻辑学的特征在于这样的事实: 其命题可以表现为适用于任意事物的形式。所有的纯数学——算术、分析与几何——都结合逻辑学原始概念而建立, 它们的命题均从逻辑学一般公理 (如三段论和其他推理规则) 导出。而这一切不再只是梦想和愿望。相反, 已经对数学领域中最重要和最困难的部分完成了这样的工作。对于少量剩余部分, 并没有特别的困难, 正在很快完成。哲学家对能否实现这样的演绎过程已经争论了多少世纪; 数学家则坐下来, 完成了这项工作。对于哲学家来说, 现在已经没有什么事情可做了, 只能优雅地承认数学家的成就。

众所周知, 形式逻辑这门最终被证明等同于数学的学科, 是由亚里士多德 (Aristotle) 创立的, 并且是中世纪的主要学习科目 (除了神学)。但亚里士

多德从来没有超越三段论——这只是此学科很小的一部分,而中世纪的学者从来没有超越亚里士多德。如果要获得我们比中世纪的大学教授们更聪明的任何证据,可以在这里寻找。在整个中世纪,几乎所有最有才智的学者都献身于形式逻辑的研究;但在19世纪,人们只花了极微小部分的精力来探究这门学科。然而,自1850年开始,每隔10年所做的推动该学科发展的的工作,超过从亚里士多德到莱布尼茨(Leibniz)的整个时期。人们发现了如何制造推理符号,就像代数学那样,从而能运用数学规则进行有效的推演。除了三段论他们还发现了其他的许多规则,从而发明了一个逻辑学的新分支,叫做“关系逻辑”(Logic of Relatives)⁴⁾,以处理全面超出旧逻辑学范围的研究课题,而这些课题构成了数学的主要内容。

外行人不太容易理解符号化对于探讨数学基础的重要性,而对此的解释则可能像奇谈怪论:符号化之所以有用是因为它们让事情变得困难。(这只是对于数学的基础部分而言,对于其高级部分则并非如此。)我们想要知道的是,从什么能推出什么来。刚开始时,每件事情都是自明的(self-evident);但要看清能否从一条自明的命题推出另一条命题,是非常困难的。显然性永远是正确性的敌人。于是我们发明了一些困难的新符号,其中没有什么东西看上去是显然的。然后我们建立了运算这些符号的若干条规则,使得所有的事情都成为机械的。用这种方法,我们发现了什么东西必须被当作“前提”(premiss),什么东西必须被证明或定义。例如,整个算术和代数已被证明只需要三个不能定义的概念和五条无法证明的命题。但是,如果没有符号化,要获得这个发现会非常困难。“二加二等于四”是如此地显然,以致我们几乎不会去怀疑它能否被证明。对于要证明其他自明的事情也会持这样的看法。

外行人可能会认为,证明那些自明命题的工作有点无聊。对此,我们可以回答说:从一条显然的命题得到另一条显然的命题往往并非是自明的;所以,当我们用不明显的方法来证明一件明显的事情时,确实会发现新的真理。但是,我们还可以做更有趣的反驳:自从人们试图证明那些显然的命题后,他们发现其中有许多是错误的。自明性经常只是一种幻象,如果我们受其指引,一定会走入歧途。例如,没有什么事情比这更显然了:“整体永远比其部分包含更多的东西。”或者说,“一个数加上1后会增大。”但我们现在知道,这些命题通常是错的。因为大部分数是无穷数;而如果一个数是无穷数,那你可以

⁴⁾这主要归功于皮尔斯(C. S. Peirce)先生。——编注