

奥林匹克教学辅导丛书

小学数学竞赛 名师指导

(下册)



主编 陈传理

华中师范大学出版社

奥林匹克教学辅导丛书

小学数学竞赛名师指导

(下 册)

主 编	陈传理		
副主编	方衡儒	刘诗雄	邱应麟
编 委	黄能容	严家华	陈传敏
	方银明	刘 捷	佘厚友
	马汉梅		

华中师范大学出版社

1998年·武汉

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

小学数学竞赛名师指导(下册)/陈传理 主编.

—武汉:华中师范大学出版社,1998.6

(奥林匹克教学辅导丛书)

ISBN 7-5622-1810-2/G·845

I. 小…

II. 陈…

III. 数学-小学-教学参考资料

IV. G 623.5

奥林匹克教学辅导丛书

小学数学竞赛名师指导

(下册)

© 陈传理 主编

华中师范大学出版社出版发行

(武昌桂子山 邮编:430079 电话:(027)7876240)

新华书店湖北发行所经销

武汉市新华印刷厂印刷

责任编辑:胡祚蓉
责任校对:叶 誉

封面设计:甘 英
督 印:方汉江

开本:787mm×1092mm 1/32

版次:1993年9月第1版

印数:170 901—191 000册

印张:7.5 字数:175千字

1998年6月第10次印刷

定价:7.00元

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

目 录

下 册

二十九	观察与猜想	1
三十	简单推理	8
三十一	速算与巧算	13
三十二	分数运算中的技巧	18
三十三	测量问题	26
三十四	奇妙的圆	35
三十五	图形的对称性	46
三十六	叠合图形的面积	57
三十七	简单的立体图形	67
三十八	逆推法	76
三十九	行程问题	80
四十	追及问题	88
四十一	工程问题	96
四十二	分数及百分数应用题	105
四十三	比和比例应用题	114
四十四	枚举法	122
四十五	借用图解题	127
四十六	列方程解应用题(一)	132
四十七	列方程解应用题(二)	138
四十八	列方程解应用题(三)	145
四十九	奇偶性分析	152
五十	推理问题	160

五十一	最大与最小	165
五十二	多退少补	170
五十三	对应	176
五十四	试题选讲	182
附录		190
	1993年小学数学奥林匹克初赛试题(A)卷	190
	1993年小学数学奥林匹克初赛试题(B)卷	192
	1993年小学数学奥林匹克初赛试题(民族卷)	193
	1993年小学数学奥林匹克决赛试题	194
	1993年小学数学奥林匹克决赛试题(民族卷)	196
	1993年小学数学奥林匹克总决赛	197
	计算竞赛	197
	第一试	199
	第二试	201
	部分答案和提示	203

二十九 观察与猜想

在很久很久以前,交通不便,信息闭塞,人们所能观察到的范围比较小,就以为地球是平的.后来,进一步观察到了一些自然现象,比如太阳每天早上从东边升起,晚上又从西边落下等,人们不再认为地球是平的,猜想地球是圆形的,科学的发展证明了这个猜想是正确的.

细心地观察、大胆地猜想、严格地求证,是人类认识自然、发展科学的重要手段.



问题 29.1 观察下面的几个算式,你发现了什么规

律?

$$1+2+1=4,$$

$$1+2+3+2+1=9,$$

$$1+2+3+4+3+2+1=16,$$

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=25.$$

利用上面的规律,你能不能迅速计算出:

$$1+2+3+\cdots+99+100+99+\cdots+3+2+1=?$$

分析 粗略地看,上述每个等式左边各数的排列都是关于中间一个数对称的,中间这个数处在特殊的位置.再看看等式右边,发现等式左边中间的数与右边的数关系为:

第一行左边中间的数是 2, $2 \times 2 = 4$;

第二行左边中间的数是 3, $3 \times 3 = 9$;

第三行左边中间的数是 4, $4 \times 4 = 16$;

第四行左边中间的数是 5, $5 \times 5 = 25$.

这说明,每个等式右边的数恰为等式左边中间项的数值的平方.由于

$$1+2+\cdots+99+100+99+\cdots+2+1$$

的中间数字为 100, 所以它的值等于 $100 \times 100 = 10000$.

本书已介绍过高斯的故事, 用高斯求和的方法可以证明等式

$$1+2+\cdots+99+100+99+\cdots+2+1=100 \times 100$$

的正确性.



问题 29.2

下面一列数是按一定的规律排列的:

$$3, 12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, \cdots$$

(1) 第 12 个数是(); (2) 912 是第()个数.

分析 我们来观察一下, 看前面几个数有什么共同点.

$$3 = 3 \times 1 = 3 \times (3 \times 0 + 1),$$

$$12 = 3 \times 4 = 3 \times (3 \times 1 + 1),$$

$$21 = 3 \times 7 = 3 \times (3 \times 2 + 1),$$

$$30 = 3 \times 10 = 3 \times (3 \times 3 + 1),$$

$$39 = 3 \times 13 = 3 \times (3 \times 4 + 1),$$

.....

这些依次排列的数的构成是很有规律的, 归纳一下就有下面的结论:

$$\text{第 } n \text{ 个数} = 3 \times [3 \times (\text{这个数} - 1) + 1].$$

有了这个结论再来回答所提出的问题就不难了.

$$(1) \text{ 第 } 12 \text{ 个数} = 3 \times [3 \times (12 - 1) + 1] = 102;$$

(2) 设 912 是第 x 个数, 依题意列方程

$$3[3(x-1)+1]=912,$$

解方程得 $x=102$. 所以, 912 是第 102 个数.

上面两例的解答告诉我们:

(1) 观察要按一定的顺序有条理地进行;

(2) 观察的目的就是要找出一组物体的组成规律或差异.

问题 29.3

观察分析下面这串分数的变化规律：

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}; \dots$$

- (1) $\frac{7}{10}$ 是第几个分数?
 (2) 第 400 个分数是几分之几?

问题 29.4

一张圆形大饼在它的外面切了 10 刀，

得一个十边形(图 29-1)，问这个十边形的内角和为多少?

分析 (1)为了知道十边形的内角和是多少，我们先来看看一些简单的多边形的内角和是多少：

① 三角形的内角和是 180° (图 29-2(a))；

② 四边形内角和是两个三角形的内角和的总和，等于 360° (图 29-2(b))；

③ 五边形内角和是三个三角形的内角和的总和，等于 540° (图 29-2(c))。

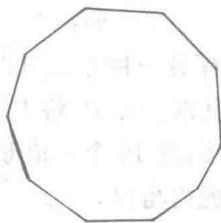


图 29-1

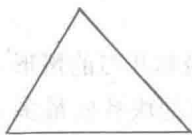


图 29-2(a)

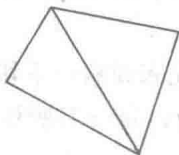


图 29-2(b)

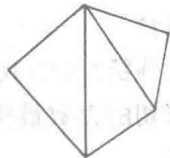


图 29-2(c)

(2) 猜想:十边形的内角和是 8 个三角形内角和的总和, 等于 $180^{\circ} \times 8 = 1440^{\circ}$.

(3) 验证:如图 29-3,我们把十边形的一个顶点 A 与不在这个顶点相邻的每个顶点连起来,就得到 8 个拼在一起的三角形,这八个三角形的内角和加在一起就是十边形的内角和.

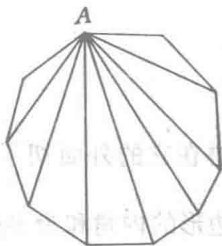


图 29-3

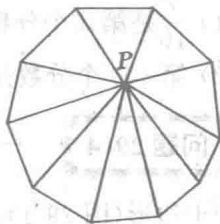


图 29-4

还有另一种方法可以达到验证的目的,如图 29-4,在十边形内任取一点 P ,将 P 点与十边形的每个顶点相连得到 10 个三角形,这 10 个三角形的内角和的总和减去一个周角就是十边形的内角和.

在这里,我们用三角形的内角和解决了计算十边形内角和的问题,可见简单的东西多么重要.



问题 29.5

今天是小泉的生日,张老师买来一个大蛋糕,对全班 56 个同学说:“我们来庆祝小泉的生日,每人吃一块蛋糕.现在要将蛋糕分成 56 块,你们说至少要切几刀?”

分析 (1) 我们先来观察一下切最初几刀的情形.由于要求切的刀数最少,所以每一刀所切出的块数要最多.如图 29-5:

- ①切 1 刀, 最多切成 2 块; ②切 2 刀, 最多切成 4 块;
 ③切 3 刀, 最多切成 7 块; ④切 4 刀, 最多切成 11 块.

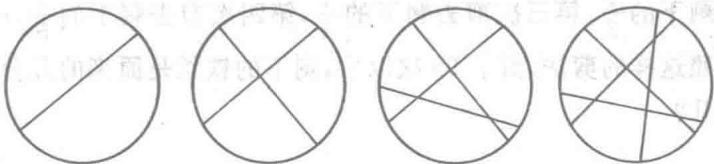


图 29-5

(2) 列表如下:

切的刀数	0	1	2	3	4
切出的块数	1	2	4	7	11	?

(3) 寻找规律:

$$1+1=2, \quad 2+2=4, \quad 4+3=7, \quad 7+4=11.$$

这似乎告诉我们, 切第几刀得到的块数等于切这刀前已切出的块数加上这一刀的刀数. 果真是这样吗?

(4) 猜想:

切的刀数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
切出的块数	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	...

这个猜想和歌德巴赫猜想一样, 是需要证明的, 但我们还做不到. 现仅验证切 5 刀时猜想成立.

由图 29-6 可以看出, 切 5 刀可切出 16 块.

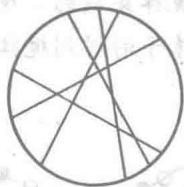


图 29-6

问题 29.6

一根铁丝，第一次剪去它的 $\frac{1}{2}$ ，第二次剪去剩下的 $\frac{1}{3}$ ，第三次剪去剩下的 $\frac{1}{4}$ ，第四次剪去剩下的 $\frac{1}{5}$ ，……照这样的剪法，剪了 99 次以后，剩下的铁丝是原来的几分之几？

练习 29

1. 观察图 29-7 的图形变化规律，在右边再补上二幅，使它们成为一个完整的系列。

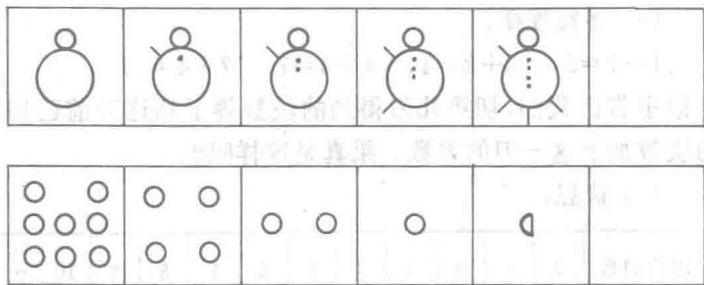


图 29-7

2. 图 29-8 是一串完整的珠子，珠子有白有黑，是按照一定的规律穿成的。现在有部分珠子被压在盒子里，请你先找找珠子的排列规律，然后回答下面的三个问题：

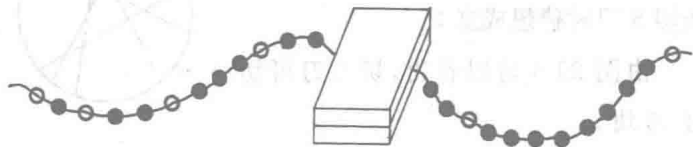


图 29-8

(1) 盒内有几颗珠子? (2) 这串珠子一共有多少颗?

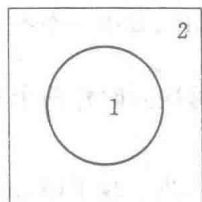
(3) 黑珠子有多少颗?

3. 把一张等腰直角三角形的纸片沿底边上的高对折, 然后再将所得到的新的等腰直角三角形沿底边上的高对折, 这样折 10 次最多能折出多少个大小相等的等腰直角三角形?
4. 从 1 到 1001 的所有自然数按下表格式排列, 用 1 个正方形框子框出九个数, 要使这九个数的和等于 (1) 1986; (2) 2529; (3) 1989.

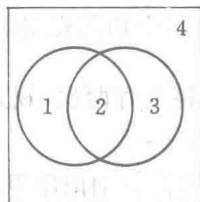
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
...
995	996	997	998	999	1000	1001

问能否办到? 若能办到, 请你写出正方形框里的最大数和最小数.

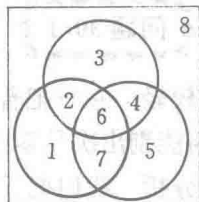
5. 如图 29-9: 方纸内画一个圆, 可以把纸面分成内外两个区域 [图(1)]; 画两个圆, 最多可以把纸面分成 4 个区域 [图(2)]; 画三个圆, 最多可以把纸面分成 8 个区域 [图(3)]. 如果画 20 个圆, 最多可把纸面分成多少个区域?



(1)



(2)



(3)

图 29-9

三十 简单推理

智慧老人在城外碰到了两个小男孩，便想考一考他们。老人对两个孩子说：“我这里有两顶白帽子，一顶红帽子。你们先将眼睛闭上，我给你们各戴一顶帽子，你们再睁开眼睛告诉我，你们各自头上戴的帽子是什么颜色。”一切停当。那个看得出来是一个锦衣玉食、神采飞扬的官家子弟盯着对方的头上一下傻了眼，口中不住念道“两顶白帽子，一顶红帽子。两顶……”。而那个面目清秀、腼腆朴实的孩子看了一眼对方的神态便脱口而出：“我戴的是白帽子！”智慧老人赞许地对这个孩子点了点头。你们说为什么？

那个说对了帽子的孩子是这样考虑的：官家子弟看见我头上的帽子后拿不定主意，他一定以为除了我头上的帽子外，他的头上戴的帽子是红是白都有可能，而智慧老人的帽子是二白一红，那么我头上戴的帽子就一定是白的了。这个孩子根据已知的判断（条件），经过简单分析便得出了新的（正确的）判断。这个过程就是推理。官家子弟只看了已知的事实，想不到正确的结论，就是因为他不会推理。

这一讲我们来讨论一些简单的推理问题。

*** * 问题 30.1 * ***

有三个相同规格的零件，其中一个次品重量较轻。在一把普通秤上称两次，规定每次同时称两个零件，问能剔出次品零件吗？

分析 我们把三个零件分别记作甲、乙、丙。按下面的方式称两次：

第一次 同时称甲、乙，记下重量；

第二次 同时称丙、乙,记下重量.

这里有两种情况:

(1) 两次称的重量一样,即

$$\text{甲} + \text{乙} = \text{丙} + \text{乙},$$

这时乙是次品零件;

(2) 两次称的重量不一样,如第一次称的重一些,即

$$\text{甲} + \text{乙} > \text{丙} + \text{乙},$$

这时丙为次品零件;如第二次称的重一些,则甲为次品零件.

总而言之,按题设要求称两次,可以剔出次品零件.

在这里我们是从已知条件出发,顺着推出结论来的.



问题 30.2

有三个相同规格的零件,其中一个为次

品,重量较轻,在没有砝码的天平上称一次,问能将那个次品零件剔出来吗?



问题 30.3

小明在邮局寄了三种信:平信邮资每封

8分,航空信邮资每封1角,挂号信邮资每封2角,他共用去一元二角二分.问:小明寄的三种信的总和最少是几封?

分析 小明共用了1元2角2分寄平信、航空信和挂号信,可知他寄平信用了 $8 \times 4 = 32$ (分)或 $8 \times 9 = 72$ (分).由于三种信的总和要最少,所以平信封数应尽可能少,从而知小明只寄了4封平信.剩下的是 $122 - 32 = 90$ (分).

航空信和挂号信的封数要少的话,就要航空信的封数尽可能少.航空信至少1封用了10分.那么寄挂号信用了 $90 - 10 = 80$ (分),寄了 $80 \div 20 = 4$ (封).

所以,平信、航空信和挂号信总和至少为:

$$4 + 1 + 4 = 9 \text{ (封)}.$$

问题 30.4

小华在一个文具店里买了 5 支铅笔, 4 块橡皮, 8 个练习本, 付给售货员 2 元钱, 售货员叔叔找给他 5 角 5 分. 小华看了看铅笔的价格是每支 8 分, 就说: “叔叔, 您把帐算错了!” 请问: 小华怎么知道这笔帐算错了?

有时在已知条件下可能的情况比较多, 这时就要假设其中某个正确, 根据条件往下推, 如果出现矛盾便否定这个假设, 再从假设的反面继续往下推, 直到推出正确的结论.

问题 30.5

E 先生在外地经商, 他的四位邻居 A 、 B 、 C 、 D 对他的收入进行猜测.

A 说: “ E 赚了 500 万元.”

B 说: “ E 至少赚了 1000 万元.”

C 说: “ E 赚的不到 2000 万元.”

D 说: “ E 最少赚了 1 万元.”

这四个猜测中只有一个猜测是对的. 问 E 先生究竟赚了多少钱?

解 如果 A 的猜测正确, 则 C 和 D 的猜测也正确, 这与“只有一个猜测是对的”矛盾, 所以 A 的猜测不对.

如果 B 的猜测正确, 则 D 的猜测也正确, 同样与题设矛盾, 所以 B 的猜测不对.

由于 B 和 C 两个猜测中至少有一个是正确的, 按题设只有一个正确, 而已证明 B 的猜测不对, 所以 C 的猜测是对的.

再由题设“只有一个猜测是对的”推知 D 的猜测不对.

在推理过程中, 如果将已知条件或推理过程中的每个结果用一张表反映出来, 则能帮我们理清推理的思路, 以便较快地获得正确的结果.

问题 30.6

A、B、C、D、E 五位同学参加小学数学

奥林匹克竞赛，甲、乙、丙、丁、戊五位老师对竞赛名次进行猜测，预测情况如下：

甲：B 第 3 名，C 第 5 名；

乙：E 第 4 名，D 第 5 名；

丙：A 第 1 名，E 第 4 名；

丁：C 第 1 名，B 第 2 名；

戊：A 第 3 名，D 第 4 名。

结果表明，每个名次都有人猜中。问：A、B、C、D、E 五位同学的名次各为多少？

分析 为清楚起见，把题目条件列成下表。

因为每个名次都有人猜中，而第 2 名只有 B 被猜到，所以第 2 名必定是 B。

我们用“ \Rightarrow ”表示“推出”的意思。由右表易知：B 是第 2 名 \Rightarrow B 不是第 3 名 \Rightarrow A 是第 3 名 \Rightarrow A 不是第 1 名 \Rightarrow C 是第 1 名 \Rightarrow C 不是第 5 名 \Rightarrow D 是第 5 名 \Rightarrow D 不是第 4 名 \Rightarrow E 是第 4 名。

	1	2	3	4	5
甲			B		C
乙				E	D
丙	A			E	
丁	C	B			
戊			A	D	

所以，A、B、C、D、E 五位同学的名次依次为 3、2、1、5、4。

问题 30.7

甲、乙、丙三位老师对一次数学奥林匹

克竞赛的名次进行预测。他们的预测如下：

甲：学生 A 得第一名，学生 B 得第三名；

乙：学生 C 得第一名，学生 D 得第四名；

丙：学生 D 得第一名，学生 B 得第三名。

竞赛结果表明，他们都说对了一半，说错了一半。问 A 、 B 、 C 三位学生的名次各是多少？

练习 30

1. 有三个盒子，一个装着两个红球，一个装着两个白球，还有一个装着一红一白两个球。三个盒子都盖着盖子，盖子上贴着说明盒内装的是什么颜色的球的标签，但全贴错了。你能不能只从一个盒子里摸出一个球，就准确地判断出三个盒子里各装的是什么球？

2. 有红、黄、蓝三个箱子，一个苹果放入其中某个箱子里，并且

(1) 红箱盖上写着：“苹果在这个箱子里。”

(2) 黄箱盖上写着：“苹果不在这箱子里。”

(3) 蓝箱盖上写着：“苹果不在红箱子里。”

已知(1)、(2)、(3)中只有一句是真的，问苹果在哪个箱子里？

3. 甲说：“乙说谎。”乙说：“丙说谎。”丙说：“甲、乙两人都说谎。”问到底谁说谎？

4. 蜘蛛有 8 条腿，蜻蜓有 6 条腿和 2 对翅膀，蝉有 6 条腿和一对翅膀。现有这三种小虫 18 只，共有 118 条腿和 20 对翅膀。问每种小虫各有几只？

5. 已知 A 、 B 、 C 三人中有两种人，一种人只说真话，一种人句句撒谎。一次晚会上， A 说：“ B 、 C 都是撒谎者。” B 坚决否认。 C 说：“ B 确实撒谎。”问 A 、 B 、 C 各是哪种人？