重点大学自主招生物理培训讲义

hysics

江四喜　编著

中国科学技术大学出版社

重点大学自主招生
物理培训讲义

hysics

江四喜 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书作者是中学物理特级教师，长期在重点中学的一线从事资优学生的物理培训与辅导工作，培养了多名亚洲中学生物理奥赛与国际中学生物理奥赛的金牌得主.本书是作者在进行多年自主招生辅导的基础上，参阅历年各重点大学自主招生的考试内容而编著的一本教学讲义.本书针对自主招生考试的内容，在中学常规教学内容的基础上进行了相应的知识与能力的补充，用相应的例题阐述了知识的应用与解题方法的选择.同时，书中给出了一定数量的训练习题，并提供了参考解答，让学生在自主招生考试的准备过程中，不仅方向明确，还可以巩固学到的知识.

本书可作为广大有志于参加重点大学自主招生的中学生的学习用书，也可作为中学物理教师的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

重点大学自主招生物理培训讲义/江四喜编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015.2
ISBN 978-7-312-03617-0

Ⅰ.重… Ⅱ.江… Ⅲ.中学物理课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 302518 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
印刷 安徽省瑞隆印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 25.75
字数 627 千
版次 2015 年 2 月第 1 版
印次 2015 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—3000 册
定价 50.00 元

序　言

大学的全面扩招，使得读大学有了普惠性，从而导致高考的选拔功能越来越被淡化，也使得高考试题越来越趋于平和，事实上，高考已经在一定程度上模糊了学生之间的差别.然而，高校对优秀学生的青睐并不因为教育部门主观上对学生差别的模糊而淡化，相反，由于大学招生面的扩大，可供选择的学生增多，为了吸引更为优秀的学生，各大学更是想方设法地甄别、选拔优秀的高中毕业生.

自主招生给了各高校更大的招生权力.对于自主招生，虽然原则上提出了要综合考查学生的素质，但在实际操作中，各高校仍然是以文化考试为首选.在理科方面，几乎所有院校都是以数学、物理的文化测试为主，再辅之以面试等，来选拔优秀的学生.所以，对于那些有一定特长而综合实力又略显不足的学生，为了进入自己心仪的大学，好好应对自主招生中相应的文化考试，也就是在展示自己的特长.

有选拔就有应试.研究历年来自主招生的试题特点，对我们应对自主招生考试无疑是有帮助的.纵观近几年各高校自主招生中的物理试题，为了考查学生对知识的掌握程度与能力特征，其所用试题常将大学普通物理、高中奥赛物理和高中课本内容有机融合，其分析推理过程、数学工具运用都与高考试题有较大差别，对学生的选拔达到了知识与能力并举的目的.

多年来，笔者一直承担学校优秀学生应对自主招生考试的辅导与教学工作，时刻关注着各重点大学自主招生考试的内容与走向，编写了一整套适用于自主招生备考学习的讲义与训练试题，合理而有效地进行了教学.本书即是在本人多年自主招生教学的基础上，对在教学中编写的讲义与训练试题进行合理整编而成.

对于本书的特点，作如下的说明：

一、适用对象.由于自主招生是重点大学针对那些有学科特长的学生而进行的，所以，使用本书的前提是你对物理学科高考所要求的常规内容掌握得比较全面，理解得比较透彻.因此，本书适合在重点中学就读、综合成绩排位处于学校前50%，且有志于参加重点大学自主招生测试的同学使用.当然，也适合进行自主招生辅导与教学的教师作为教材或参考书使用.

二、内容定位.自主招生的试题既不能理解为高考的难题，更不能理解为中

学物理的竞赛试题,能在自主招生中产生区分度的试题几乎都是介于高考难题与竞赛难度之间的试题,而这一内容正是参加自主招生考试的学生需要重点学习的内容.

由于自主招生的培训与学习是在常规教学之外进行的,它不是对常规教学的重复,而是对常规教学的提升,所以,本书直接回避了常规教学所要求的基本内容,而是针对自主招生可能涉及的知识内容进行了相应的提升与补充.这些补充内容既有知识方面,也有能力方面.这一编写方式带来的直觉是,本书有很强的针对性,但并不强调知识的系统性.

三、体例设置.全书共有 42 讲,每一讲均设有 5 个小栏目,其中【知识背景】点明这一讲对常规教学所要求的知识背景;【延伸方向】是通过对往年的自主招生试题进行研究、分析,给出与本讲相关的内容在自主招生试题中可能延伸与拓展的方向;【知识扩展】是针对自主招生试题中可能超出常规教学知识范围的内容进行相关的补充,同时对其涉及的方法也作必要的说明,以期读者通过本书的学习能对自主招生试题内容应对自如;【典例精析】是针对补充的内容与方法,精选例题,给出解析,渗透方法,并作精要点评;【针对训练】是为巩固本讲内容而精选出的训练习题,部分练习题选自近年的自主招生试题.此外,在书后还提供了 6 套模拟测试试卷,供读者自我检测.最后,为了便于同学检查学习效果,在书后附有各讲的针对训练与模拟测试试卷的参考解答.

由于自主招生考试并没有确定的考纲,且不同的学校对学生的要求不同,即便是同一高校,不同年份间的试题难度亦有很大的差别,所以,本书并不能十分确定当年的自主招生试题内容在什么范围内,但大体不会超越常规教学与本书所补充的内容范围.

本书是笔者在学校辅导自主招生考试的教学过程中逐步总结形成的,由于自主招生辅导并没有可供借鉴的资料与权威的教材,可以想象,其选题难免片面,问题与疏漏肯定不少,希望使用本书的读者将发现的问题或更好的建议,发送到邮箱(714537035@qq.com),笔者不胜感激.

最后,谢谢您阅读并使用本书.

江四喜

2014 年 11 月于武汉二中

目　　录

第1讲 相对运动

【知识背景】

相对运动是研究复杂运动问题的基础,同时也是研究矢量问题的基础.对这一内容的学习,要求我们知道质点、参照系、坐标系的涵义,对匀变速直线运动有比较深入的研究,对以“小船过河”为代表的运动模型能作详细的分析与计算,能通过不同位移、速度、加速度之间的转换与运算,理解运动中各物理量的矢量特征.同时对矢量的运算及复杂的运动有一个基本的认识.

【延伸方向】

对运动的研究不再局限于同一直线上的运动的合成与分解,参照系的选择也不再以地面参照系为主,物体(质点)间的相对运动非常突出,运动背景显得十分复杂与隐蔽.要求掌握绝对速度、相对速度、牵连速度之间的关系及应用.

以相对运动的问题单独命题的可能性并不太大,但在很多动力学问题,如非惯性系中,能否较好地处理相对运动的问题,又往往是能否正确解题的关键所在.同时,在很多情况下,用好相对运动,能很大程度上简化解题步骤,提高解题速度.

【知识扩展】

1. 运动的合成与分解

一个物体的实际运动往往同时产生几个运动效果,如过河船只的沿河运动和垂直河岸的运动.我们可以看成物体同时参与了几个运动,并把这几个运动叫做实际运动的分运动,而把这个实际运动叫做这几个分运动的合运动.

已知分运动的情况求合运动叫运动的合成.已知合运动的情况求分运动叫运动的分解.求解的内容就是运动学的一些量,如位移、速度、加速度、时间等.

合成与分解具体表现为位移、速度、加速度的合成与分解,这些量都是矢量,运算所遵循的是平行四边形法则.处理合运动和分运动关系时要灵活采用方法,或用作图法,或用解析法,依情况而定.可以借鉴力的合成与分解,具体问题具体分析.

2. 相对运动

我们首先以运动中的速度合成来说明质点相对运动之间的关系.设有两个相对运动的参考系 S 系和 S' 系.既然运动和静止是相对的,设定 S 系为不动的,而 S' 系为运动的.质点 P 相对 S 系的运动称为绝对运动,而相对 S' 系的运动称为相对运动.相应地,P 点相对 S 系的速度称为绝对速度,而相对 S' 系的速度称为相对速度.再引入牵连速度概念,它是运动参

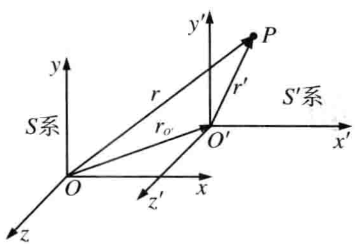


图 1.1

考系 S' 系相对不动参考系 S 系的速度. 质点 P 在不同参考系的位矢关系如图 1.1 所示. 由图中的位矢关系,我们容易得到,在任何时刻绝对速度 $\boldsymbol{v}_{绝对}$ 为相对速度 $\boldsymbol{v}_{相对}$ 与牵连速度 $\boldsymbol{v}_{牵连}$ 之矢量和,即满足

$$\boldsymbol{v}_{绝对} = \boldsymbol{v}_{相对} + \boldsymbol{v}_{牵连}$$

这就是速度合成原则,即 S' 系相对于 S 系运动时,质点相对于 S 系的速度是质点相对于 S' 系的速度与 S' 系相对于 S 系的速度的叠加.

由速度之间的关联,我们很快可以得到加速度之间的关联:

$$\boldsymbol{a}_{绝对} = \boldsymbol{a}_{相对} + \boldsymbol{a}_{牵连}$$

两点说明:

(1) 只有在 S' 系平动(不转动)的情况下,参考系所有点相对 S 系的速度(牵连速度)才是唯一的;

(2) 这三个速度(位矢、加速度)之间的关系为运动学关系,与 S 系和 S' 系是惯性的参考系还是非惯性的参考系无关.

3. 运动的独立性原理

运动的独立性原理又称运动的叠加性原理,是指一个物体同时参与几种运动,各分运动都可看成是独立进行的、互不影响,物体的合运动则视为几个相互独立分运动叠加的结果. 分运动和合运动之间具有独立性、等时性、矢量性、同体性. 它的下位概念是振动的叠加原理、波的叠加原理、电场强度的叠加原理等等.

叠加分矢量叠加和标量叠加两种,前者遵循矢量的合成法则即平行四边形法则;后者遵循代数运算. 因此在阐述矢量时,不仅强调其既有大小,又有方向,同时要指出,只有严格遵循平行四边形法则的物理量才为矢量.

运动的独立性原理与功的原理、力的独立性原理合称中学物理三大原理,它是运动合成与分解的前提,是解决复杂运动问题的关键点.

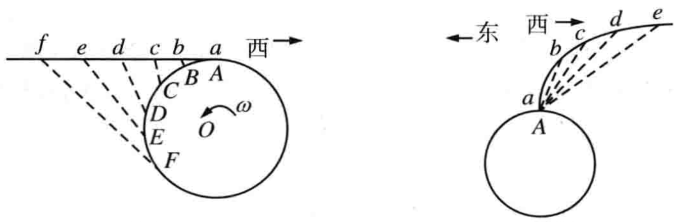
【典例精析】

例 1.1 在地球赤道上的 A 点处静止放置着一个小物体,现在设想地球对小物体的万有引力突然消失,则在数小时内,小物体相对于 A 点处的地面来说,将(　　).

A. 水平向东飞去　　　　B. 原地不动,物体对地面的压力消失

C. 向上并渐偏向西方飞去　　　　D. 向上并渐偏向东方飞去

【解析】 从地球以外的惯性参考系来看,物体沿切线方向向东匀速直线飞去,如图 1.2(a)所示. A 为开始飞出点,B,C,D,…分别为经过 2 小时、4 小时、6 小时……后 A 的位置. b,c,d,…分别为经过 2,4,6,…小时后物体在空间的位置. Bb,Cc,Dd,…为地面观察者观看物体的视线.



(a) (b)

图 1.2

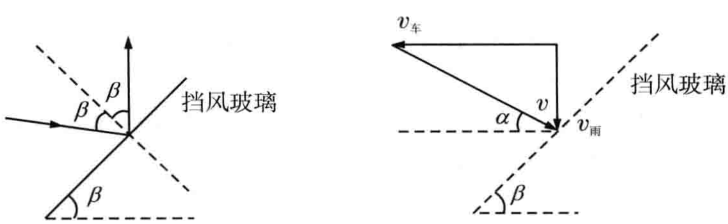
在地面上 A 点的观察者看来，这些视线相对于他的方向和距离如图 1.2(b)所示，将 A，b，c，d，…用光滑的曲线连接起来就是从地球上观察到的物体的运动轨迹 $Abcd$…，即 2 小时后，物体到 b 点处；4 小时后，物体到 c 点处；6 小时后，物体到 d 点处……所以从地球上观察，小物体相对于 A 点处的地面来说，从原地向上升起并渐偏向西方飞去. 故 C 选项正确.

从本例中可以看出，虽然质点的运动是唯一的，但从不同的参考系中去描述，其运动方式并不是一样的. 本题为 2008 年清华大学自主招生试题.

例 1.2 两辆汽车的挡风玻璃与水平方向的夹角分别为 $\beta_1 = 30^\circ$，$\beta_2 = 15^\circ$. 冰雹竖直下落，打到玻璃上，两司机都看到冰雹从玻璃上反弹后竖直向上运动，求两车速度之比.

【解析】 注意到题中"冰雹竖直下落"与"看到冰雹从玻璃上反弹后竖直向上运动"，前者是对地的运动，后者是相对于汽车运动.

既然在汽车上看到冰雹反弹后是竖直向上的，若挡风玻璃与水平方向的夹角为 β，由反射定律易知，冰雹入射到挡风玻璃上时，与玻璃法线方向的夹角亦为 β，如图 1.3(a)所示.



(a) (b)

图 1.3

由几何知识易得，此时冰雹入射到挡风玻璃上的速度方向与水平方向的夹角 α 满足

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta$$

若设入射到挡风玻璃上的相对速度为 v，则 v、$v_{雨}$(绝对速度)、$v_{车}$(牵连速度)之间的矢量关系如图 1.3(b)所示，有

$$v_{车} = \frac{v_{雨}}{\tan\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1} = \frac{\cot 30^\circ}{\cot 60^\circ} = 3$$

即车的速度之比为 3∶1.

研究相对运动，必然涉及参照系的选择，这其中涉及的三个速度（绝对速度、相对速度、牵连速度），会因为你选择的参照系不同而有所不同，很多同学往往会纠结于各个速度是对哪一个参照系而言的，望能用心体会.

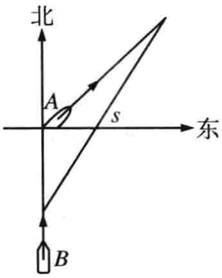


图 1.4

例 1.3 A、B 两船在海上航行，A 船航向东北，船速为 u；B 船航向正北，船速 $v=\sqrt{2}u$. 设正午时，A 船在 B 船正北距离 l 处，如图 1.4 所示，问此后何时两船相距最近？最近距离为多少？

【解析】 解法一 先以海面为参照系，设在午后 t 时两船相距为

$$s=\sqrt{(l-vt)^2+(ut)^2-2(l-vt)ut\cos 135^\circ}$$
$$=\sqrt{l^2-\sqrt{2}lut+u^2t^2}$$

可解得当 $t=l/(\sqrt{2}u)$ 时，s 取极值 $s_{\min}$，且 $s_{\min}=l/\sqrt{2}$. 也就是说，午后 $t=l/(\sqrt{2}u)$ 时，两船距离最近.

解法二 以 B 船为参照系，则 A 船相对于 B 船的速度为

$$v_{AB}=u-v$$

方向指向东南，如图 1.5 所示. 由图显而易见，从 A 船位置沿东南方向取 C 点，使 $AC\perp BC$，则 BC 长度为两船最近距离，有

$$s_{\min}=AC=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{l}{\sqrt{2}}$$

时间应为

$$t=\frac{AC}{v_{AB}}=\frac{l}{\sqrt{2}u}$$

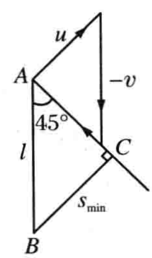


图 1.5

比较上述两种不同的解法可见，解法二以 B 船为参照系，避免了具体计算，所以要简单得多.

不仅在单纯的运动问题中合理地选择参照系会大大简化解题，在动力学问题中，这一特点也极为重要. 我们通过下面的例子可以认识到这一点.

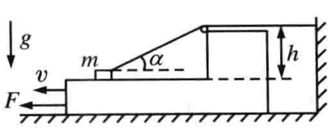


图 1.6

例 1.4 平台上凸起部分是高度为 h 的长方体，上面有质量为 m 的小物块. 在它上面系有不可伸长的轻线，跨过安在凸起部分上的理想滑轮，如图 1.6 所示. 线的另一端系在竖直墙上，使得滑轮和墙之间的这段线是水平的. 平台以速度 v 远离墙壁运动，当物块上的线与水平方向夹角为 α 时，需要多大的拉力 F？力 F 是水平的且位于该图的平面内，物块与平台之间的动摩擦因数为 μ，平台与地面之间没有摩擦，假设物块在平台上运动的过程中，物块不离开平面.

【解析】 先求小物块 m 运动的加速度.

以平台为参照系（惯性系），则系在竖直墙上的绳在以速度 v 向右拉物块 m，由于物块沿

水面方向做直线运动，因而物块对凸起部分边缘的收绳点（图中滑轮处）的运动可分解为两个分运动：一是指向收绳点的运动，其速度的大小即为收绳的速率 v；二是绕收绳点向下的转动．由速度关联易得物块的速度为

$$u = \frac{v}{\cos\alpha}$$

则物块绕收绳点转动的速度为

$$v' = u\sin\alpha = v\tan\alpha$$

则其向心加速度为

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v'^2\sin\alpha}{h} = \frac{v^2\tan^2\alpha\sin\alpha}{h}$$

a_{n}的方向沿收绳方向，而在该方向上绳保持恒定的速率，故该方向上的加速度即为 a_{n}，由于物块只能在水平面上做直线运动，因此物块的加速度亦在水平方向上，因而可得物块的加速度为

$$a = \frac{a_{\mathrm{n}}}{\cos\alpha} = \frac{v^2\tan^3\alpha}{h}$$

因平台为惯性系，所以，此加速度亦是物块在地面系中的加速度．

回到地面系中，设绳中的拉力为 T，对小物块运用牛顿第二定律，有：

$$T\cos\alpha - \mu N = ma,\quad T\sin\alpha + N - mg = 0$$

对平台与物块整体，有

$$F - T = ma$$

联立上述各式，可解得

$$F = \frac{mv^2\tan^3\alpha + \mu mgh}{h(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} - m\frac{v^2}{h}\tan^3\alpha$$

本题通过转换参照系，将一个不太熟悉的情景转换为大家都熟悉的情景，这样，不仅解题的速度得以提高，其出错率也会大幅下降．

【针对训练】

1.1　在马路旁观察会感觉马路上开行的汽车白天快、夜晚慢，这是因为（　　）．

A. 夜晚看不清马路两旁的参照物（房屋、行道树等）

B. 夜晚看不清车身

C. 白天车速的确较快

D. 夜晚司机比较小心，会降低车速

1.2　每逢佳节的夜晚，一串串烟火凌空爆发，展现出一幅幅色彩艳丽的图像．燃放烟花时往往先看到一个光球迅速“膨胀”，然后“膨胀”渐缓并慢慢散落下来．为什么爆发的烟花呈现球状呢？请对此现象作出分析．

1.3　一只钟，分针长度是时针长度的两倍，求午夜过后几点钟时分针的末端点和时针

的末端点沿两端点的连线方向的分离速度最大？

1.4 如图1.7所示，点 P_1 在时间 $t=0$ 时以速度 v_1 由 A 向 B 匀速运动，同时点 P_2 以速度 v_2 由 B 向 C 匀速运动，$AB=L$，$\angle ABC=\alpha$，求时间 t 为多少时，P_1、P_2 相距最短？最短距离 r 为多少？

1.5 如图1.8所示，一串相同的汽车以等速 v 沿宽度为 c 的直公路行驶，每车宽为 b，头尾间距为 a，则人能以最小速率沿一直线穿过马路所用时间为多少？

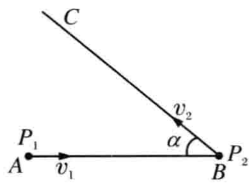


图 1.7

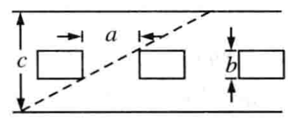


图 1.8

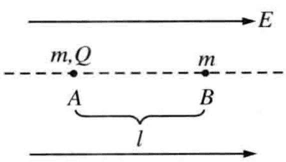


图 1.9

1.6 在惯性系 S 中有匀强电场 E，其方向如图1.9所示．在电场中与 E 平行的一条几何直线（图中虚线）上，有两个静止的小球 A 和 B．两小球的质量均为 m，A 球所带电量为 $Q>0$，B 球不带电．开始时两球相距 l，在电场力的作用下，A 球开始沿直线运动，并与 B 球发生弹性正碰撞，从而使 B 球也参与运动．设在各次碰撞过程中，A、B 球之间并无电量的转移．略去 A、B 间的万有引力，试证 A、B 球相邻两次碰撞之间的时间间隔相同，并求出该时间间隔 T．

第2讲　速 度 关 联

【知识背景】

理解速度、加速度的定义与物理意义，对轻绳、轻杆的模型特性有一定的了解，对运动的合成与分解理解透彻．

【延伸方向】

对速度的求解涉及绳（或杆）约束、点接触、交叉点等多种类型，要求熟练掌握与运用微元法来求解小量之间的关联，能熟练运用速度的合成与分解进行相关的运算．

一般情况下，速度与加速度的关联并不单独成为考题，而是渗透在其他问题之中，但能否迅速而准确地找到物体间的这种关联，往往是正确解题的前提与基础．

【知识扩展】

1. 连接体的运动

中学物理试题中涉及连接物体之间速度、加速度关系的问题，常见有四种情况：

(1) 受杆或绳约束的物体速度；

(2) 接触物体的接触点的速度；

(3) 相交物系的交叉点的速度；

(4) 运动物体上不同质点的速度.

具体分析这四种问题遵循的普遍规律以及各自特殊规律如下：

(1) 所研究的杆或绳等都具有刚体的力学性质，杆不可伸长或缩短，绳不可伸长.受杆或绳约束的物系各点速度的相关特征是：它们在同一时刻沿杆或沿绳方向必具有相同的分速度.注意：对绳而言，这一结论的前提是绳不能跨越动滑轮.

(2) 接触物体接触点速度的特征.由刚体的力学性质及“接触”的约束可知，沿接触面法线方向，接触双方必须具有相同的法向分速度，否则将分离或形变，违反接触或刚体的限制.至于沿接触面的切向，接触双方是否有相同的分速度，则取决于该方向上双方有无相对滑动.若无相对滑动，则接触双方将具有完全相同的速度.因此，接触物体接触点速度的相关特征是：沿接触面的法向分速度必定相同，沿接触面的切向分速度在无相对滑动时相同.

(3) 相交物系交叉点速度的特征.线状相交物系交叉点的速度是相交双方沿对方切向运动分速度的矢量和.

(4) 若物体可视为刚体，则物体运动中其上任意两点之间距离不变.若物体沿一个平面运动，则各点速度为同一平面内，但是互相不平行，各点运动可以看作是绕垂直该平面某一轴(瞬时转动轴)的转动以及该轴平行此平面以某一速度平动之合运动.

(5) 在没有转动和动滑轮的前提下，在绳上沿绳的方向上，各点的加速度相等(杆亦有类似的性质).

2. 微元法

在学习物理的过程中，我们不可避免地要遇到微元法.所谓“微元”，是指我们选取的研究对象所包含的质量、电量、长度、面积、体积、时间、空间、角度、功、能量等可能为连续分布或变化的物理量无限逼近零值但又不为零值的情形，即我们通常所说的无穷小量.这一方法被广泛地用于物理与数学问题的分析，是研究物理学与数学的基本方法之一.

微元法是中学物理中最为常用的方法之一，它是一种从局部到整体的思维方法，其应用的具体功能表现在如下两个方面：

(1) 化变量为常量.在研究物理问题时，常需建立相关物理量间的关系.对于研究的过程或者状态的整体来说，某些物理量各个局部的值并不是相同的，我们在这种情况下并不好直接建立有关物理量间的关系，但我们如果将这一过程或整体分割为无数个微元部分，由于所取的微元很小，内部各部分间的差别也很小，其变化也得不到体现，这样就可以忽略其内部各部分间的差别，而认为描述它的物理量是定值，由此可用确定值的形式来建立相关量间的关系，找到适合于全过程的或者是整体的结论，然后再依次来解决问题.譬如，在变速直线

运动中,为了描述某一时刻的速度,选取一个极短的时间间隔 $\Delta t(=t_2-t_1)\to 0$,在 Δt 的时间内,物体的位移 Δx 同样也是小量,即 $\Delta x\to 0$,在这里,由于 Δt 与 Δx 均趋于零,物体速度的变化也就无法体现,于是,在 Δt 时间内(也是 Δx 的位移内)物体的平均速度与 t_1时刻的速度差别无法体现,即这段时间内的平均速度即为 t_1时刻的即时速度,即 $v=\Delta x/\Delta t$.再如,在求滑动摩擦力大小恒定而物体做曲线运动时,摩擦力做功的问题,我们可以将物体运动的轨迹做微元处理,将轨迹分割为 $n\to\infty$ 段,这样,每一段的长度 Δx 自然满足 $\Delta x\to 0$,在这样的一小段内,轨迹的弯曲自然可以不加考虑,物体在每一小段的运动也就可以视为直线运动,这样就达到了"化曲为直"的目的,求得摩擦力在每一小段时所做的功,然后进行累加,易得摩擦力在全程所做的功.

(2) 显现隐性特征.物理问题的求解,要依据与此物理问题相关的一些物理条件,这当中有些条件往往未明显地直接给出,需要经过解题者对题目所给的一些明显的条件进行仔细分析,使一些隐含条件凸现出来,如何凸现这些隐含条件,往往是解决问题的关键所在,而对隐含的条件进行微元分析是凸现隐含条件的有效方法之一.譬如,可以通过对小量之间的关联,进而讨论宏观量之间的关联.速度的关联即是这方面的典型代表.

【典例精析】

例 2.1 如图 2.1 所示,岸高为 h,人用绳经滑轮拉船靠岸,若当绳与水平方向夹角为 θ 时,收绳速率为 v,试求:

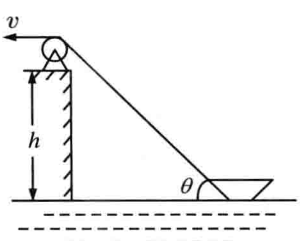


图 2.1

(1) 该位置船的速率 u 为多大?

(2) 该位置船的加速度 a 为多大?

【解析】 (1) 由于小船沿水面方向做直线运动,因而小船对岸边的收绳点(图 2.1 中滑轮处)的运动可分解为两个分运动:一是指向收绳点的运动,其速度的大小即为收绳的速率 v;二是绕收绳点向下的转动.因此,小船的速度 u 的分解如图 2.2 所示,图中 θ 为绳与水面的夹角.由图可得

$$u=\frac{v}{\cos\theta}$$

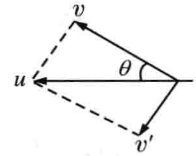


图 2.2

(2) 图中的速度 v'为小船绕收绳点转动的速度,因而所对应的向心加速度的大小为

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v'^2}{h/\sin\theta}=\frac{v^2\sin^3\theta}{h\cos^2\theta}$$

a_{n}的方向沿收绳方向,而在该方向上绳保持恒定的速率,故该方向上的加速度即为 a_{n}.与速度一样,由于小船在水面上做直线运动,因此小船的加速度亦在水平方向上,因而,加速度的分解图像与速度分解图像类似,由此可得小船的加速度为

$$a=\frac{a_{\mathrm{n}}}{\cos\theta}=\frac{v^2}{h}\tan^3\theta$$

在高中阶段,本题应是必做题之一.对本题的解答一般采用上述的矢量分解方法求解.

但本题亦可采用微元的方法达到目的，虽然计算过程略显得复杂一些，但同样是高中阶段应该掌握的方法，下面我们给出用微元法求解小船速率的方法.

该船在 θ 角位置时经 Δt 时间左行 Δx 距离，如图2.3右下角所示的小量直角三角形. 显然绳长缩短量 Δl 与 Δx 间有如下小量关联：

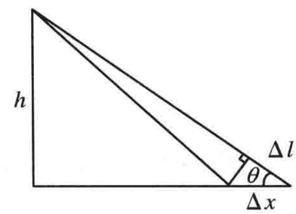


图2.3

$$\Delta l = \Delta x\cos\theta$$

两边同时除以 Δt，即得

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\cos\theta = v_{船}\cos\theta$$

因此，船的速率为

$$v_{船} = \frac{v}{\cos\theta}$$

本题较为常见的错误是将船速度作为收绳速度的分速度，将 v 在水平与竖直方向上进行分解，从而得到 $v_{船} = v\cos\theta$ 的错误结论. 错误的原因是将小船沿绳的方向上的速度与绳对船的拉力进行类比，根据拉力具有水平分量与竖直分量的特征，将速度也作类似的分解，而不明白在此处船的实际速度是沿水平方向的，所以，船沿绳方向的速度只是船速的一个分量.

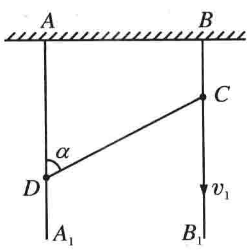


图2.4

例2.2　如图2.4所示，AA_1 和 BB_1 是两根光滑的细直杆，并固定于天花板上，绳的一端拴在 B 点，另一端拴在套于 AA_1 杆上的珠子 D 上，另有一珠子 C 穿过绳及杆 BB_1 以速度 v_1 匀速下落，而珠子 D 以一定速度沿杆上升. 当图中角度为 α 时，珠子 D 上升的速度 v_2 多大？

【解析】　如图2.5所示，设由题图的状态再经历一段极短的时间 Δt，珠子 C 下滑距离 $CC' = v_1\Delta t$，而到达 C' 点，珠子 D 则对应地上升至 D' 点，由于时间 $\Delta t\to 0$，故可将这一段时间内珠子 D 的移动速度也视为匀速的，用 v 表示，则 $DD' = v\Delta t$，由于绳不可伸长，故应有

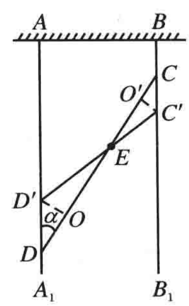


图2.5

$$CC' + C'D' = CD$$

令 $C'D'$ 与 CD 的交点为 E，在 CD 上分别截取 $OE = ED'$，$O'E = EC'$，则又有

$$CC' = CD - C'D' = CD - OO'$$

于是有

$$CC' = CO' + OD$$

由于 $\Delta t\to 0$，则 $C'O'$ 与 OD' 均趋于零，则两等腰三角形（$\triangle EOD'$ 与 $\triangle EC'O'$）的底角均趋于 $\pi/2$，故 $\triangle DOD'$ 与 $\triangle CC'O'$ 均可视为直角三角形，则有

$$CO' = CC'\cos\alpha,\quad OD = DD'\cos\alpha$$

综合前述的式子，有

$$CC' = CC'\cos\alpha + DD'\cos\alpha \quad 即 \quad v_1\Delta t = v_1\Delta t\cos\alpha + v\Delta t\cos\alpha$$

故得珠子 D 沿杆上升的速度为

$$v = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}v_1$$

其实，在寻找运动关联的问题中，不论是运用合成与分解的方法还是运用微元法，其核心依据都运用了“绳长是一个定值”这一特性.

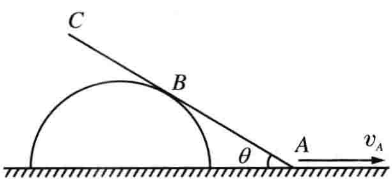


图 2.6

例 2.3 如图 2.6 所示，细杆 ABC 靠在固定的半圆环上，两者处于同一竖直平面内，杆上 B 恰好落在圆环上，圆环的半径为 R. 已知 A 端沿半圆直径方向移动的速度大小为 v_A，求当杆与水平线的交角为 θ 时：

(1) 杆的角速度 ω；

(2) 杆上与半圆相切的点 B 的速度和杆与圆柱接触点 B' 的速度大小.

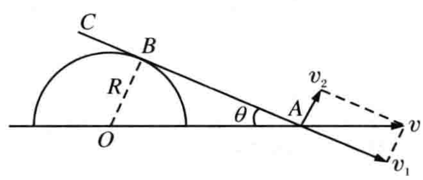


图 2.7

【解析】 由于半圆静止，杆上 B 点的速度的法向分量为零，故杆上 B 点速度必沿杆. 现将杆上 A 点的速度 v 分解成沿杆方向的分量 v_1 和垂直于杆方向的分量 v_2，如图 2.7 所示，对于杆 ABC 而言，杆上所有点的速度在沿杆的方向上的速度均为 v_1，由于 B 点速度的法向分量为零，则 v_2 是 A 绕 B 的转动速度.

(1) 由上述分析知

$$v_2 = v\sin\theta \quad 且 \quad v_2 = \omega AB$$

又 $AB = R\cot\theta$，所以有

$$\omega = \frac{v\sin^2\theta}{R\cos\theta}$$

(2) 由分析已知，杆上与半圆环相切的点 B 的速度为

$$v_B = v_1 = v\cos\theta$$

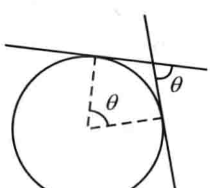


图 2.8

杆与圆环的交点 B' 沿圆周运动. 杆转过的角度与圆环半径转过的角度相同(如图 2.8 所示)，所以杆的转动角速度与 B' 点的角速度相同，所以 B' 点的速度为

$$v_{B'} = \omega R = v\tan\theta\sin\theta$$

解答本题应注意到两点：一是杆上的 B 点在其法向上的速度必须为零(想一想，如果不为零会是什么结果)；二是圆环与杆的接触点 B' 与杆上的 B 点虽为同一位置，但两者之间有相对滑动，故两者的速度并不相同.