

乐闻携尔出国系列

图书主编 刘文勇



Learn and Share



- 坚决不信速成
- 深度挖掘考点
- 名师逐步详解
- 稳步提高分数

5天突破 SAT II 数学

马晓菡 编著

Full-spectrum Investigating, Raising, and Examining
— Learn and Share FIRE Study System

 中国人民大学出版社



5天突破SAT II 数学



马晓菡 编著

献给亲爱的蔡壮

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

5 天突破 SAT II 数学/马晓菡编著. —北京: 中国人民大学出版社, 2015.3
ISBN 978-7-300-20965-4

I. ①5… II. ①马… III. ①数学-高等学校-入学考试-美国-自学参考资料 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 047838 号

5 天突破 SAT II 数学

马晓菡 编著

5 Tian Tupo SAT II Shuxue

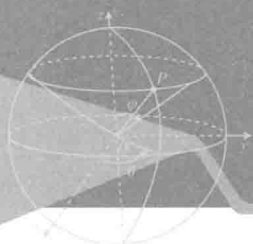
出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511770 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn (中国 1 考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	涿州市星河印刷有限公司		
规 格	185 mm×260 mm 16 开本	版 次	2015 年 6 月第 1 版
印 张	11.75	印 次	2015 年 6 月第 1 次印刷
字 数	248 000	定 价	35.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

乐闻携尔图书编委会

主 编	刘文勇					
副主编	甘 庆					
委 员	石金娥	尹 娜	陈 哲	梁立强	赵 坤	
	陈 睿	刘 妍	马原九子	王 甜	张 薇	
	白宜玄	李 达	王伟男	王雪力	杨允慧	
	张明靓	乔轶维	杜昕洁	孟伟哲	葛思颖	
	王壮一	秦佳丽	罗攀攀	郭迎凯	张静媛	
	赵 蒙	孙思琦	田旭旭	娜 菲	张 芳	
	赵海娟	刘新娟	王丹丹	陈冬月	王青青	
	杨森林	李 蓉	王 聪	王 丽	张 乐	
	司春晖	张 辉	杜学颖	司春晖	高惠丽	
	魏思思	白丹丹	梁玲玲	韩宜君	王国达	
	李继楠	张 钰	刘旭晗	廖槐斌	贾丹凤	
	王 涛	韩立娜	张 瑞	贾静雯	赵文凤	
	闫奉党	鹿广芬	陈 丽	陈秋月	王 蕾	
	彭珠珠	李 娇	王 蕊	孙江容		



推荐序

马晓菡老师的《5天突破 SAT II 数学》一书出版了，值得庆祝一番！

其实，我与马老师一直是通过邮件或电话沟通，从未曾见面：他在中关村，而我和我们出版部门的同事窝在国贸。我想，等拿到样书的那一天，一定要见一见这位有想法、更愿意实践自己想法的老师。这并不多见，因为：

图书出版是一件“慢活儿”。在这个“快”的时代里，已经很少有人愿意做这样“慢”的事情了。“快”时代当然有好处：通讯方便，信息如潮——我们能给素未谋面的老师出版图书，也得感谢这个时代。

但是，快时代更多的是让老派的我跟不上节奏：“微博”、“微信”等交流工具，尽管都在用，却至今心有畏惧。信息传递速度太快，只是五分钟没有回复，就已经显得不礼貌了，总觉得：还没来得及思考，怎么就发送出去了呢？而图书出版则需要一校、二校、三校，少则半年，多则一年，快节奏的人难免不愿意做。

图书出版是一件“穷活儿”。毫无疑问，现在对于出版行业来说，并不是一个好光景。社会对于内容的习惯性不尊重使得大部分出版商都在挣扎——成为一个像鲁迅一样只凭写字就能过上中产生活的人已经越来越不可能了。普通作者一年的稿酬可能不超过1万元——还不如把写书的时间用来干点别的，那可划算多了。若是名人“玩票儿”，那是另当别论了。

图书出版是一件“累活儿”。奥威尔说：“写一本书是一桩消耗精力的苦差事，就像是生一场痛苦的大病一样。你如果不是由于那个无法抗拒或者无法明白的恶魔的驱使，你是绝对不会从事这样的事情……”

这句话真是说到心坎里了：只有真的心中有话要说，不吐不快；只有真的想要给自己所研究的领域，或是所教授的科目留下一点自己痕迹的人，才会愿意吃这么多苦头吧。我想马晓菡老师心中的“恶魔”，就是想在 SAT 数学这个科目之中，留下一点什么。让后面的孩子在学习这个科目时，后面的老师在教授这个科目时，总归有个肩膀可靠。

最后让我做个广告：乐闻携尔的出版部门，不只为本公司的老师服务，也正在为千千万万并不是本公司同事，但是心中有“恶魔”，不吐不快的老师服务。随时联系我：13811062045/liuwenyong@lasedu.com.

文 勇

于乐闻携尔建外 SOHO 校区



前言

我常常会被问到这样一个问题，是国内的数学难还是国外的数学难？问这个问题的同学和家长大多有一个困惑，因为经常听说某同学在国内读书时数学学得马马虎虎，到了国外竟成了周围人眼中的数学天才。但是，当我们自己真正进行国际课程学习的时候，发现数学其实并没有传说中那么容易，随随便便就可以得到很好的分数。是什么原因导致了这种偏差呢？这就是我要和大家交流的。国内课程和国际课程，受到历史、文化甚至价值观的影响，在教学内容和思维方式上都有着很大的差异，我们很难简单地比较它们的难易程度。

一方面我很相信的确存在这样的现象，就是国内数学学得平平常常的同学，到了国外的数学课上会表现得很优异，或者，至少不会像在国内学习数学那么困难、吃力了。但是另外一方面我们也要考虑这样几个问题：

第一，他在几年级？十年级之前，中国学生强大的计算能力的确会让他的小伙伴自叹不如，口算能得出的答案，同龄的国外学生大都需要借助计算器，所以初来乍到的中国学生经常会在课堂上表现得很突出。国际课程在十年级之前的内容是打基础，针对所有学生，所以普遍难度不高，但是一旦进入到高年级，要选拔进入大学的学生，难度就会迅速提高。接触过为数不少的小留学生，在初一甚至更早到国外留学，刚开始的时候发现学校的数学都简单到不像话，于是就把数学课丢在一边。到了高年级，忽然有一天，发现老师教的都听不懂了。

第二，他是在什么样的学校？我们必须承认，名牌高中和普通高中的要求还是有很大区别的。即使在名牌高中，情况也不尽相同。曾经有一个在美国名牌高中读书的学生，她的数学能力的确属于中等，不过在学校的数学成绩还是蛮不错的，平时成绩能够拿到A。她告诉我她的学校之所以排名很靠前，学校的体育成绩非常优秀是很重要的一个因素，所以相对来说数学课上的难度并没有那么大，凭着中国学生在小学、初中的扎实基本功和自己的努力能够应付。

第三，他是在学什么样的课程？目前比较主流的国际课程体系有 A level, IB 和 AP。A level 的数学有两门课，一门是 pure mathematics，一门是 further mathematics；IB 课程的数学分为 high level 和 standard level；AP 数学包含 AP calculus 和 AP statistics。国际课程给学生提供了选择的余地，并没有统一的标准去要求所有学生。学生完全可以根据自

己的实际情况去选择数学课的难度，所以如果觉得自己的数学能力欠佳，选择低难度课程，当然更容易有好成绩。

所以，每一个计划或者正在学习国际课程的同学，都应该调整好自己的心态，既不妄自尊大，也没有任何理由骄傲自满。就数学这门学科来说，国内课程和国际课程在知识体系和思维模式上都有很大的区别，我们必须让自己适应这种转变，才能学有所成。

首先，就内容而言，国际课程都是以微积分和统计学为主体（当然一定也包含数学的基础内容，比如函数），总体来说就是更注重实用性和跟大学阶段的衔接；而国内课程，微积分和统计涉及很少。即便是国内课程和国际课程都强调的部分，侧重点也有所不同。所以在准备 SAT II 数学考试时，请你一定按照国际课程的重点来准备，参照本书中列举的知识点，不要用你的高中课本去做备考准备。

其次，在思维模式上有很大的区别。就在 SAT II 数学的考前准备来看，我发现为数不少的学生喜欢把这些题目当成大题一步一步求解，否则整个人就觉得特别不踏实。我想这可能跟我们平时的学习考试习惯是有关系的，我们总是要小心各种题目陷阱，以防掉进去。学习国际课程之后你很容易就会发现，虽然平时的内容难度不低，但是考试却相对容易准备，很有规律可循，这跟我们国内考试的思路正好相反。在准备 SAT II 数学考试时，也请你不要执着于去发现陷阱，不要执着于应用解大题的思路。SAT II 数学考试是考查你对十年级（或者英国的十一年级）知识内容是否熟练掌握，巧妙地得到答案本身就是数学能力的一种体现。

SAT II 数学考试内容

好了，我们现在就要建立起积极客观的心态，认真研究和准备考试，争取一次达到目标。首先我们来看看 COLLEGE BOARD 给出的纲要（表 1）：

表 1

Content 内容	Approximation of Test 考试比重
number and operations 数和运算 operation 运算, ratio and proportions 比和比例, complex numbers 复数, counting 包含维恩图和排列组合, elementary number and theory 包含基本运算和化简, 比如带有根号的表达式化简, matrices 矩阵, sequences 数列, series 级数, vectors 向量	10%~14% 5~7 题
algebra and functions 代数和函数 expressions 表达式, equations 方程, inequalities 不等式, representation and modeling 数学模型, 比如指数函数的应用, properties of functions (linear, polynomial, rational, exponential, logarithmic, trigonometric, inverse trigonometric, periodic, piecewise, recursive, parametric) 函数的性质, 包含一次函数、多项式函数、有理函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、周期性函数、分段函数、递推函数、参数函数	48%~52% 24~26 题

续前表

Content 内容	Approximation of Test 考试比重
geometry and measurement 几何和测量 coordinate line 坐标线, parabolas 抛物线, circles 圆, ellipses 椭圆, hyperbolas 双曲线, symmetry 对称, transformations 移动, polar coordinates 极坐标 three-dimensional solids 立体图形, surface area and volume (cylinders, cones, pyramid, sphere and prisms) 表面积和体积(圆柱、圆锥、棱锥、球体和棱柱), coordinates in three dimensions 三维坐标 trigonometry 三角 right triangles 直角三角形, identities 恒等式, radian measure 弧度, law of cosines 余弦定理, law of sines 正弦定理, equations 三角函数方程, double angle formulas 倍角公式	28%~32% 14~16 题
data analysis, statistics and probability 数据分析, 统计和概率 mean 平均值, median 中位数, mode 众数, range 极差, interquartile range 四分位距, standard deviation 标准偏差, graphs and plots 图像, least square regression (linear, quadratic, exponential) 最小二乘回归(线性, 二次, 指数), probability 概率	8%~12% 4~6 题

SAT II 内容基本上是国际课程中十年级的程度和难度, 和 Pre-Calculus 课程吻合度最高。所以在十年级学完 Pre-Calculus 之后就参加 SAT II 数学考试为最佳。

SAT II 数学考试分数的计算

SAT II 数学考试总时长为一个小时, 一共 50 道选择题, 每道选择题有五个选项, 全部为单选题。答对一道题得分, 不答不扣分, 答错倒扣分。跟 SAT I 数学部分不同的是, SAT II 数学的题目不会区别难度给分, 每道题目的分值都相同。我们可以根据公式来估算分数, 最后得分 = $800 - 10(44 - \text{卷面成绩})$, 卷面成绩 = 正确的题目个数 - $0.25 \times$ 错误的题目个数。一般来说, 如果卷面成绩在 44 分或者 44 分之上的话, 就可以得到满分 800。所以如果你做了全部的题目, 最多可以错 4~5 个。具体情况要看整套试卷的难度和参加考试的别的小伙伴们成绩来确定; 如果你能保证自己会做的都正确, 那么你可以有 5~6 道题放弃不做。这么看来得满分也不算太难, 因为有一定的容错率。但关键的是, 你是不是可以保证自己会做的题目都能做对。一定记得: SAT II 数学考试考查的是对知识的熟练掌握程度和严谨度! 题目设计不会特意挖空心思考难题怪题。只要安排好复习计划, 避免无谓的失误, 考个理想的分数并不是难事!

SAT II 数学考试计算器的使用

我提倡学生使用图形计算器! 众所周知, 亚洲学生都强于计算, 所以很多同学和家长都有个根深蒂固的观念, 就是能不使用计算器就不使用计算器, 锻炼我们的脑力。我非常同意学生在小学、初中阶段不要过度依赖计算器, 应该有基本的口算心算训练。但是到了高中阶段, 我们更强调的是知识的应用, 所以国际课程的要求之一就是能够熟练使用图形计算器, 让计算器更好地为数学学习服务。

尽管不少国内普高的同学们不使用计算器或者使用简单的科学计算器也能够在 SAT II 数学考试中取得很好的成绩，我还是建议大家购买图形计算器并且学会熟练使用它，这是日后到国外念大学的必经之路。本书中，以 TI-84 为例，列举了一些图形计算器的基本使用方法。由于图形计算器型号众多，在使用上会有很多不同，所以如果你购买了别的型号的计算器，要注意研读说明书。对于 SAT II 数学的备考来说，你主要需要弄懂的是简单运算以及如何画图像，并且通过图像去求最大值、最小值、交点等的基本技巧。

SAT II 数学考试策略

* 按照顺序做题。虽然考试题目并没有严格按照难度来顺序排列，但是一般来说，越是到后面的题目，题干会略长，难度也会略高；而且考试时高度紧张，遇到长题心理上就会比较疲惫，容易焦虑，所以没有必要从后往前做题。

* 跳过没有思路的题目。考试时间有限，如果一道题目你完全没有思路，请不要恋战，直接跳过，去做后面的题目。等你全部完成之后再回来回顾，有的时候换下脑筋，思路就会豁然开朗。

* 放弃复杂计算。如果你遇到一道题目，可以有方法解题但是过于烦琐，不用犹豫，放弃；SAT II 数学考试中每道题目平均用时不到一分半钟，所以一定会有更好的方法。把这道题放到最后再来解决，不值得花费五分钟在一道题目上。

* 简单题目，细心，细心，再细心。我们往往会有一种惯性，遇到简单或者自己有把握的题目，大喜过望，随笔一挥，迅速选出答案。实际上，越是这种题目越是要确保自己的答案百分之一百地正确，不要因为一时激动，马虎出错，这种丢分最可惜。

* 保持平常心。这是一次很重要的考试，需要你认真努力对待，但它不是你人生的全部。

本书的使用方法

《5 天突破 SAT II 数学》包含了 SAT II 数学考试大纲中的所有考点，结合国际课程内容的特点进行了总结归纳。每个知识点后均附有相应的例题帮助学生了解在 SAT II 数学考试中是如何灵活地考查这些知识点的。我认为每一个考生都应该认真地研究例题。当你把知识点和例题都进行了深度理解之后，你会发现，SAT II 数学并不是考查学生做大题的能力。希望大家放弃某些固有的、略显偏颇的思维模式，学会熟练应用知识点，快速、准确、巧妙地找到正确答案，这才是考试中的正解。

本书书名为《5 天突破 SAT II 数学》，并非哗众取宠，刻意制造噱头。我们按照考试大纲把内容分为了五个部分。在大量的教学实践中也发现，相当一部分的同学通过五次课，即十个小时的学习就能把 SAT II 数学内容全部过一遍，再辅以课下的训练，取得一个满意的成绩并非难事。但是因为每个人情况不尽相同，有的同学可以自己准备考试，也有同学只需要一两次课讲解一些未接触过的知识点，还有一些同学需要 20 个课时或者更多的课时来系统地准备考试。因此，希望考生在备考过程中，能够按照自己的具体情况来分步进行学习。熟悉的内容快速读过，注意研读例题；不熟悉的内容要精读，反复练习，总之就是要根据自己的实际水平来查漏补缺。

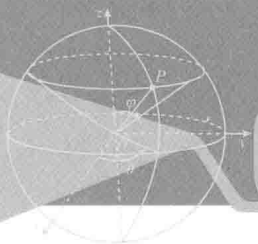
最后要提醒大家注意的就是，当你觉得自己在内容方面已经准备好了之后，请你一定

要给自己留足够的时间来模考。每次一个小时，像真正在考场一样来做题，每次都给自己一个分数。发现、纠正并且及时总结错题，在下次的模考中不要再犯一样的错误。尤其是在考试前一周，请你至少做两套模拟题，以保持自己的考试节奏和状态。

最后，祝大家好运！

马晓菡

2014年11月11日



CONTENTS

目 录

第一天

Day One

第一章	函数的概述	3
Chapter 1	Overview of Function	
	第一节 定义域和值域	3
	domain and range	
	第二节 奇函数和偶函数	7
	odd function and even function	
	第三节 复合函数	11
	composite function	
	第四节 反函数	14
	inverse function	
第二章	一次函数	20
Chapter 2	Linear Function	
	第一节 一次函数的相关公式	20
	formulas in linear function	
	第二节 一次函数不等式	24
	linear inequality	
第三章	二次函数	26
Chapter 3	Quadratic Function	
	第一节 标准式	26
	standard form	
	第二节 顶点式	28
	vertex form	

第三节	因式分解式	29
	factor form	

第四章 高次多项式函数 32

Chapter 4 High-degree Polynomial Function

第一节	变号法则	32
	sign change rule	
第二节	因式定理	33
	factor theorem	
第三节	余数定理	35
	remainder theorem	
第四节	韦达定理	36
	Vieta's theorem	

第二天

Day Two

第五章 三角函数 43

Chapter 5 Trigonometric Functions

第一节	定义	43
	definition	
第二节	特殊角的值	45
	values of specific angles	
第三节	三角函数恒等式	47
	trigonometric identities	
第四节	三角函数的图像	50
	graphs of trigonometric functions	
第五节	三角函数的应用	54
	application of trigonometry	
第六节	反三角函数	57
	inverse trigonometry	

第六章 指数函数 59

Chapter 6 Exponential Function

第一节	定义和图像	59
	definition and graph	

第二节	指数法则	61
	laws of exponents	
第三节	指数方程	62
	exponential equations	
第四节	指数方程的应用	64
	application of exponential function	
第七章	对数函数	65
Chapter 7	Logarithmic Function	
第一节	定义和图像	65
	definition and graphs	
第二节	对数法则	66
	laws of logarithm	
第八章	有理函数和极限	69
Chapter 8	Rational Function and Limits	
第一节	极限	69
	limit	
第二节	渐近线	71
	asymptotes	
第三节	函数的连续性	74
	continuity of function	
第九章	其他常见函数	76
Chapter 9	Other Common Functions	
第一节	绝对值函数	76
	modulus function	
第二节	参数方程	79
	parametric equations	
第三节	取整函数	80
	greatest integer function	
第四节	分段函数	81
	piecewise function	

第三天

Day Three

第十章	复数	85
Chapter 10	Complex Number	
	第一节 复数的定义	85
	definition of complex number	
	第二节 复数运算	87
	complex number operation	
	第三节 阿甘特图	89
	Argand diagram	
第十一章	数列和级数	92
Chapter 11	Sequences and Series	
	第一节 递推公式	92
	recursive formula	
	第二节 等差数列	93
	arithmetic sequence	
	第三节 等比数列	95
	geometric sequence	
第十二章	矩阵	99
Chapter 12	Matrix	
	第一节 矩阵简介	99
	introduction of matrix	
	第二节 矩阵的加减法	99
	addition and subtraction of matrices	
	第三节 矩阵的乘法	100
	multiplication of matrices	
	第四节 逆矩阵	104
	inverse matrix	
第十三章	向量	105
Chapter 13	Vector	
	第一节 向量的大小	105
	magnitude of vector	

第二节	单位向量	106
	unit vector	
第三节	平行向量	106
	parallel vectors	
第四节	垂直向量	108
	perpendicular vectors	

第四天

Day Four

第十四章	圆锥曲线	111
Chapter 14	Conic Sections	
第一节	定义	111
	definition	
第二节	圆	112
	circle	
第三节	椭圆	115
	ellipse	
第四节	双曲线	119
	hyperbola	
第五节	抛物线	121
	parabola	
第十五章	三维坐标	124
Chapter 15	Coordinates in 3—D	
第十六章	极坐标	127
Chapter 16	Polar Coordinates	
第十七章	表面积和体积	131
Chapter 17	Surface Area and Volume	
第十八章	图像的变换	134
Chapter 18	Transformation of Graphs	

第五天

Day Five

第十九章	相关和回归	141
Chapter 19	Correlation and Regression	
第一节	相关	141
	correlation	
第二节	回归	142
	regression	
第二十章	统计	146
Chapter 20	Statistics	
第一节	数据的集中趋势	146
	central tendency of data	
第二节	数据的分布	149
	spread of data	
第三节	排列和组合	151
	permutation and combination	
第二十一章	概率	156
Chapter 21	Probability	
第一节	定义	156
	definition	
第二节	维恩图	156
	Venn diagram	
第三节	条件概率	158
	conditional probability	
第四节	相互独立事件	159
	independent events	
第五节	互斥事件	160
	mutually exclusive events	
附录一	公式汇总 (Summary of formulas)	162
附录二	词汇 (Vocabulary)	165

SAT

Day One

第一天

根据COLLEGE BOARD给出的考试大纲，整个函数部分在SAT II 数学考试中占到48%~52%的比重，是我们准备SAT II 考试的重点。我们主要是从三个方面来准备这个部分：一是总结函数的知识点；二是要熟练使用图形计算器，提高解题效率；三是在掌握知识点的基础上找到最佳途径解决问题。

由于函数部分的内容比较多，我们把它分为两天来学习。同学们也可以根据自己的情况自由来安排。第一天的内容主要包含函数的概述，一次函数，二次函数以及高次多项式函数。下面我们来一一讲解。

