

张宇



CLASSIC

考研数学 真题大全解

(试卷分册·数学一)

史上最全
含1987—2015年
全部真题

AUTHENTIC EX-
AMINATION PAPERS
WITH ANSWERS

□ Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



 张宇考研数学真题视频选讲
视频上线日期: 2015年6月19日
注册网站会员可下载本书视频
(使用方法见封三)

刮涂层 查真伪

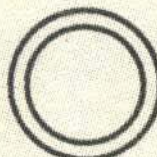
张宇



CLASSIC

考研数学 真题大全解

(试卷分册 · 数学一)

张宇  主编

编委 (按姓氏拼音顺序): 蔡燧林 高昆轮 胡金德 刘国辉 杨洋 亦一 (笔名)

于吉霞 曾凡 (笔名) 张乐 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 试卷分册. 数学一 / 张宇主编. — 北京 : 北京理工大学出版社, 2015. 5

ISBN 978—7—5682—0400—2

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 067140 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / [http://www. bitpress. com. cn](http://www.bitpress.com.cn)

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市文阁印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 5.5

字 数 / 135 千字

版 次 / 2015 年 5 月第 1 版 2015 年 5 月第 1 次印刷

定 价 / 46.00 元(共 2 册)

责任编辑 / 梁铜华

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

目 录

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题.....	1
1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题.....	2
1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题.....	4
1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题.....	5
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题.....	6
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题.....	7
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题.....	9
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	10
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	12
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题	13
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	15
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	16
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	18
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	19
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	21
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	22
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	24
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	25
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	27
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	28
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	30
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	31
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	32
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	34
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	35
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	37
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	38
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题	40
2015 年全国硕士研究生招生考试数学一试题	41

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷 I, II 均为现在的数学一.

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)与两直线

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \\ z=2+t \end{cases}$$

及 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 都平行,且过原点的平面方程为_____.

(2)当 $x=$ _____ 时,函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

(3)由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是_____.

(4)设 L 为取正向的圆 $x^2+y^2=9$,则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值是_____.

(5)已知三维线性空间的一组基为 $\alpha_1=(1,1,0), \alpha_2=(1,0,1), \alpha_3=(0,1,1)$,则向量 $\alpha=(2,0,0)$ 在上述基底下的坐标是_____.

二、(本题满分 8 分)

求正常数 a 与 b ,使等式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 1$ 成立.

三、(本题满分 7 分)

(1)(本题满分 3 分)设 f, g 为连续可微函数, $u=f(x, xy), v=g(x+xy)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

(2)(本题满分 4 分)设矩阵 A 和 B 满足 $AB=A+2B$,其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,求矩阵 B .

四、(本题满分 8 分)

求微分方程 $y''' + 6y'' + (9+a^2)y' = 1$ 的通解,其中常数 $a > 0$.

五、选择题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1)设常数 $k > 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$
(A) 发散. (B) 绝对收敛. (C) 条件收敛. (D) 敛散性与 k 值有关.

(2)设 $f(x)$ 为已知连续函数, $I=t \int_0^t f(tx) dx$,其中 $s > 0, t > 0$,则 I 的值
(A) 依赖于 s 和 t . (B) 依赖于 s, t, x .
(C) 依赖于 t 和 x ,不依赖于 s . (D) 依赖于 s ,不依赖于 t .

(3)设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = -1$,则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a) \neq 0$. (B) $f(x)$ 取得极大值.
(C) $f(x)$ 取得极小值. (D) $f(x)$ 的导数不存在.

(4)设 A 为 n 阶方阵,且 $|A|=a \neq 0$,而 A^* 是 A 的伴随矩阵,则 $|A^*|=$

(A) a . (B) $\frac{1}{a}$. (C) a^{n-1} . (D) a^n .

六、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$ 的收敛域,并求其和函数.

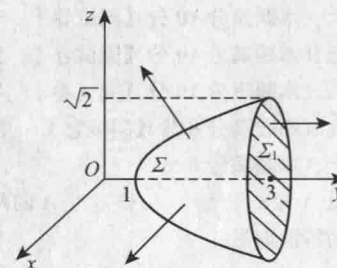
七、(本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x(8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy,$$

其中 Σ 是曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1}, \\ x=0 \end{cases} (1 \leq y \leq 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面,它的法向量

与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$ (如图).



八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微,对于 $[0,1]$ 上的每一个 x ,函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内,且 $f'(x) \neq 1$. 证明:在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x ,使 $f(x)=x$.

九、(本题满分 8 分)

问 a, b 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解?无解?有无穷多解?并求出有无穷多解时的通解.

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

(1)设在一次试验中 A 发生的概率为 p ,现进行 n 次独立试验,则 A 至少发生一次的概率为_____;而事件 A 至多发生一次的概率为_____.

(2)三个箱子,第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球,第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球,第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球. 现随机地取一个箱子,再从这个箱子中取出 1 个球,这个球为白球的概率等于_____. 已知取出的球是白球,此球属于第二个箱子的概率为_____.

(3)已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$. 则 $EX=$ _____, $DX=$ _____.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X, Y 相互独立,其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题共 2 小题, 满分 14 分)

(1)(本题满分 6 分) 计算定积分 $\int_{-2}^2 (|x|+x)e^{-|x|} dx$.

(2)(本题满分 8 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 7 分)

设 $z=f(u, x, y)$, $u=xe^y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

四、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第四题】

五、(本题满分 12 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 10 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 10 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 10 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第九题】

十、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶矩阵, λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值, x_1, x_2 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 试证明 x_1+x_2 不是 A 的特征向量.

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域.

(2) 已知 $f(x)=e^x$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

(3) 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy.$$

二、填空题(本题共 4 小题, 每小题 3 分, 满分 12 分)

(1) 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____.

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定义为 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于_____.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x-1} f(t) dt = x$, 则 $f(7) =$ _____.

(4) 设 4×4 矩阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且已知 $|A| = 4$, $|B| = 1$, 则行列式 $|A+B| =$ _____.

三、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处的微分 dy 是

- (A) 与 Δx 等价的无穷小. (B) 与 Δx 同阶的无穷小.
(C) 比 Δx 低阶的无穷小. (D) 比 Δx 高阶的无穷小.

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解, 且 $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处

- (A) 取得极大值. (B) 取得极小值.
(C) 某邻域内单调增加. (D) 某邻域内单调减少.

(3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0$ 及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则

- (A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$. (B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$.
(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$. (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处

- (A) 条件收敛. (B) 绝对收敛. (C) 发散. (D) 敛散性不能确定.

(5) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充分必要条件是

(A) 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s \neq 0$.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表出.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

四、(本题满分 6 分)

设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 求 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且其图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y = y(x)$.

六、(本题满分 9 分)

设位于点 $(0, 1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k > 0$ 为常数, r 为质点 A 与 M 之间的距离), 质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $B(2, 0)$ 运动到 $O(0, 0)$. 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

七、(本题满分 6 分)

已知 $AP = PB$, 其中

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求 A 及 A^5 .

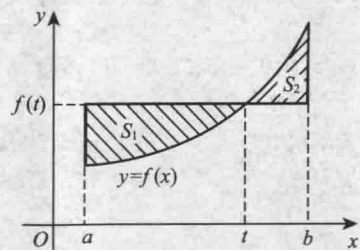
八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似.

(1) 求 x 与 y ; (2) 求一个满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P .

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 内有 $f'(x) > 0$. 证明: 在 (a, b) 内存在唯一的 ξ , 使曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi)$, $x = a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi)$, $x = b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍 (如图).



十、填空题 (本题共 3 小题, 每小题 2 分, 满分 6 分)

(1) 设三次独立试验中, 事件 A 出现的概率相等. 若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$, 则事件 A 在一次试验中出现的概率为_____.

(2) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$ ”的概率为_____.

(3) 设随机变量 X 服从均值为 10, 均方差为 0.02 的正态分布. 已知

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad \Phi(2.5) = 0.9938,$$

则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为_____.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 12 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分)

(1)【同试卷 I 第四题】

(2) 计算二次积分 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$.

(3) 求椭圆面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程, 使 π 过已知直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$.

五、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 9 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 9 分)【同试卷 I 第九题】

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- (1) 已知 $f'(3)=2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{2h} =$ _____.
- (2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) =$ _____.
- (3) 设平面曲线 L 为下半圆 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ _____.
- (4) 向量场 $u(x, y, z) = xy^2 i + ye^z j + x \ln(1+z^2) k$ 在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\operatorname{div} u =$ _____.
- (5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则逆矩阵 $(A - 2E)^{-1} =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- (1) 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$
 - (A) 有且仅有水平渐近线.
 - (B) 有且仅有铅直渐近线.
 - (C) 既有水平渐近线, 也有铅直渐近线.
 - (D) 既无水平渐近线, 也无铅直渐近线.
- (2) 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标是
 - (A) $(1, -1, 2)$.
 - (B) $(-1, 1, 2)$.
 - (C) $(1, 1, 2)$.
 - (D) $(-1, -1, 2)$.
- (3) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该非齐次方程的通解是
 - (A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$.
 - (B) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$.
 - (C) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$.
 - (D) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$.
- (4) 设函数 $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty$, 其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, n = 1, 2, 3, \dots$, 则 $S(-\frac{1}{2}) =$
 - (A) $-\frac{1}{2}$.
 - (B) $-\frac{1}{4}$.
 - (C) $\frac{1}{4}$.
 - (D) $\frac{1}{2}$.
- (5) 设 A 是 4 阶矩阵, 且 $|A| = 0$, 则 A 中
 - (A) 必有一列元素全为 0.
 - (B) 必有两列元素对应成比例.
 - (C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.
 - (D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

- (1) 设 $z = f(2x - y) + g(x, xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
- (2) 设曲线积分 $\int_C xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0) = 0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 的值.

- (3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+z) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明: 方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$ 有解, 并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分)

设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值, 证明:

- (1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值;
- (2) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值.

九、(本题满分 9 分)

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 上, 问当 R 取何值时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大?

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

- (1) 已知随机事件 A 的概率 $P(A) = 0.5$, 随机事件 B 的概率 $P(B) = 0.6$ 及条件概率 $P(B|A) = 0.8$, 则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B) =$ _____.
- (2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中, 则它是甲射中的概率为 _____.
- (3) 设随机变量 ξ 在区间 $(1, 6)$ 上服从均匀分布, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是 _____.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从均值为 1, 标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布, 而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度函数.

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)

- (1)【同试卷 I 第四、(1)题】
- (2) 求八分之一的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界曲线的重心, 设曲线的线密度 $\rho = 1$.
- (3) 设空间区域 Ω 由曲面 $z = a^2 - x^2 - y^2$ 与平面 $z = 0$ 围成, 其中 a 为正常数. 记 Ω 表面的外侧为 S , Ω 的体积为 V . 证明:

$$\oint_S x^2 y z^2 dy dz - x y^2 z^2 dz dx + z(1 + x y z) dx dy = V.$$

五、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 9 分)【同试卷 I 第九题】

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线

$$\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$$

垂直的平面方程是_____.

(2)设 a 是非零常数,则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x =$ _____.

(3)设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____.

(4)积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y} dy$ 的值等于_____.

(5)已知向量组 $\alpha_1 = (1,2,3,4), \alpha_2 = (2,3,4,5), \alpha_3 = (3,4,5,6), \alpha_4 = (4,5,6,7)$, 则该向量组的秩是_____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x) = \int_x^{e^x} f(t) dt$, 则 $F'(x)$ 等于

- (A) $-e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$. (B) $-e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.
(C) $e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$. (D) $e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.

(2)已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为

- (A) $n! [f(x)]^{n+1}$. (B) $n! [f(x)]^{n+1}$. (C) $[f(x)]^{2n}$. (D) $n! [f(x)]^{2n}$.

(3)设 a 为常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin na}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
(C) 发散. (D) 敛散性与 a 取值有关.

(4)已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

- (A) 不可导. (B) 可导且 $f'(0) \neq 0$.
(C) 取得极大值. (D) 取得极小值.

(5)已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数,则方程组 $AX=b$ 的通解(一般解)是

- (A) $k_1 \alpha_1 + k_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$. (B) $k_1 \alpha_1 + k_2 (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.
(C) $k_1 \alpha_1 + k_2 (\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$. (D) $k_1 \alpha_1 + k_2 (\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$.

(2)设 $z = f(2x-y, y \sin x)$, 其中 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(3)求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ 的通解(一般解).

四、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} yz dz dx + 2 dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $z \geq 0$ 的部分.

六、(本题满分 7 分)

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,在开区间 (a, b) 内可导,且 $f(a) = f(b)$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$.

七、(本题满分 6 分)

设四阶矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且矩阵 A 满足关系式 $A(E - C^{-1}B)^T C^T = E$, 其中 E 为四

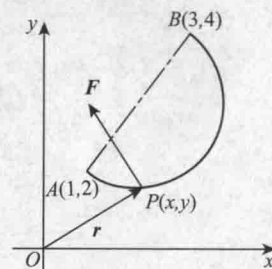
阶单位矩阵, C^{-1} 表示 C 的逆矩阵, C^T 表示 C 的转置矩阵, 将上述关系式化简并求矩阵 A .

八、(本题满分 8 分)

求一个正交变换化二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 成标准形.

九、(本题满分 8 分)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周, 从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 F 作用(如图), F 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离, 其方向垂直于线段 OP , 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 F 对质点 P 所作的功.



十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

(1)已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, 则 X 的概率分

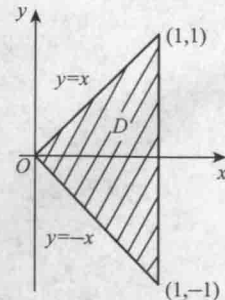
布函数 $F(x) =$ _____.

(2)设随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6. 若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件, 那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B}) =$ _____.

(3)已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布, 且随机变量 $Z = 3X - 2$, 则 $EZ =$ _____.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| < x$ (如图) 内服从均匀分布, 求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z = 2X + 1$ 的方差 DZ .



(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)

(1)【同试卷 I 第四、(1)题】

(2)求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足条件 $y|_{x=e} = 1$ 的特解.

(3)过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线,该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形,求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

五、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第九题】

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $\begin{cases} x=1+t^2, \\ y=\cos t, \end{cases}$ 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

(2)由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz =$ _____.

(3)已知两条直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$, $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$, 则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____.

(4)已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小,则常数 $a =$ _____.

(5)设 4 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的逆矩阵 $A^{-1} =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)曲线 $y = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$

(A)没有渐近线.

(B)仅有水平渐近线.

(C)仅有铅直渐近线.

(D)既有水平渐近线又有铅直渐近线.

(2)若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$, 则 $f(x)$ 等于

(A) $e^x \ln 2$.

(B) $e^{2x} \ln 2$.

(C) $e^x + \ln 2$.

(D) $e^{2x} + \ln 2$.

(3)已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于

(A) 3.

(B) 7.

(C) 8.

(D) 9.

(4)设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$, $(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则

$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$.

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$.

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$.

(D) 0.

(5)设 n 阶方阵 A, B, C 满足关系式 $ABC = E$, 其中 E 是 n 阶单位阵, 则必有

(A) $ACB = E$.

(B) $CBA = E$.

(C) $BAC = E$.

(D) $BCA = E$.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求 $\lim_{x \rightarrow +0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{x}{x}}$.

(2) 设 $\mathbf{n}$ 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\mathbf{n}$ 的方向导数.

(3) 求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 所围成的立体.

四、(本题满分 6 分)

在过点 $O(0, 0)$ 和 $A(\pi, 0)$ 的曲线族 $y = a \sin x (a > 0)$ 中, 求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$ 的值最小.

五、(本题满分 8 分)

将函数 $f(x) = 2 + |x| (-1 \leq x \leq 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内存在一点 c , 使 $f'(c) = 0$.

七、(本题满分 8 分)

已知 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3), \alpha_2 = (1, 1, 3, 5), \alpha_3 = (1, -1, a+2, 1), \alpha_4 = (1, 2, 4, a+8)$ 及 $\beta = (1, 1, b+3, 5)$.

(1) a, b 为何值时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合?

(2) a, b 为何值时, β 有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的唯一的线性表示式? 并写出该表示式.

八、(本题满分 6 分)

设 A 是 n 阶正定阵, E 是 n 阶单位阵, 证明 $A + E$ 的行列式大于 1.

九、(本题满分 8 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分)

(1) 设随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____.

(2) 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比. 则原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为 _____.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求 $Z = X + 2Y$ 的分布函数.

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】 二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分)

(1) 求 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}}$.

(2) 计算 $I = \iint_S -y dz dx + (z+1) dx dy$, 其中 S 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

(3)【同试卷 I 第四题】

五、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第五题】 六、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第七题】 八、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第九题】

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名 _____ 分数 _____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos xy = 0$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

(2) 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\text{grad } u|_M =$ _____.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1+x^2, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x = \pi$ 处收敛于 _____.

(4) 微分方程 $y' + y \tan x = \cos x$ 的通解为 $y =$ _____.

(5) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则矩阵 A 的秩 $r(A) =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2. (B) 等于 0. (C) 为 ∞ . (D) 不存在但不为 ∞ .

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)$ (常数 $\alpha > 0$)

(A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 敛散性与 α 有关.

(3) 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线

(A) 只有 1 条. (B) 只有 2 条. (C) 至少有 3 条. (D) 不存在.

(4) 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(5) 要使 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $AX=0$ 的解, 只要系数矩阵 A 为

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

三、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$.

(2) 设 $z=f(e^x \sin y, x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解.

五、(本题满分 8 分)

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dx dy,$$

其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

六、(本题满分 7 分)

设 $f''(x)<0, f(0)=0$, 证明: 对任何 $x_1>0, x_2>0$, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

七、(本题满分 8 分)

在变力 $F=y\mathbf{i}+zx\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ 的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi, \eta, \zeta)$, 问 ξ, η, ζ 取何值时, 力 F 所作的功 W 最大? 并求出 W 的最大值.

八、(本题满分 7 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问:

(1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表出? 证明你的结论.

(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 证明你的结论.

九、(本题满分 7 分)

设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$, 对应的特征向量依次为 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, 又向量

$$\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(1) 将 β 用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表出;

(2) 求 $A^n\beta$ (n 为自然数).

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分)

(1) 已知

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6},$$

则事件 A, B, C 全不发生的概率为_____.

(2) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 则 $E(X+e^{-2X})=_____$.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立, X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, Y 服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布, 求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度

(计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示, 其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分)

(1)【同试卷 I 第三、(1)题】

(2)【同试卷 I 第三、(2)题】

(3) 设 A, B 为 3 阶矩阵, I 为三阶单位阵, 满足 $AB+I=A^2+B$, 又知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B .

四、(本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分)

(1)【同试卷 I 第四、(1)题】

(2) 求 $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)dt$, 其中 $f(t)$ 为已知的连续函数.

(3) 计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1dy\int_y^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$.

五、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第九题】

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- (1) 函数 $F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt (x > 0)$ 的单调减少区间为_____.
- (2) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为_____.
- (3) 设函数 $f(x) = \pi x + x^2 (-\pi < x < \pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则其中系数 b_3 的值为_____.
- (4) 设数量场 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$ _____.
- (5) 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零, 且 A 的秩为 $n-1$, 则线性方程组 $AX=0$ 的通解为_____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- (1) 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt, g(x) = x^3 + x^4$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的
(A) 等价无穷小. (B) 同阶但非等价的无穷小.
(C) 高阶无穷小. (D) 低阶无穷小.
- (2) 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为
(A) $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$. (B) $4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$.
(C) $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta} d\theta$. (D) $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^2 d\theta$.
- (3) 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为
(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.
- (4) 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 等于
(A) $\frac{e^{-x} - e^x}{2}$. (B) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. (C) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$. (D) $1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- (5) 已知 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, P 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $PQ = O$, 则
(A) $t=6$ 时 P 的秩必为 1. (B) $t=6$ 时 P 的秩必为 2.

(C) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 1.

(D) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 2.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

- (1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.
- (2) 求 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.
- (3) 求微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足初值条件 $y(1) = 1$ 的特解.

四、(本题满分 6 分)

计算 $\oiint_{\Sigma} 2xz dydz + yz dzdx - z^2 dxdy$, 其中 Σ 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围立体的表面外侧.

五、(本题满分 6 分)

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$ 的和.

六、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

- (1) 设在 $[0, +\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f'(x) \geq k > 0, f(0) < 0$. 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点.
- (2) 设 $b > a > e$, 证明 $a^b > b^a$.

七、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$, 通过正交变换化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

八、(本题满分 6 分)

设 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times n$ 矩阵, 其中 $n < m, E$ 是 n 阶单位矩阵. 若 $AB = E$, 证明 B 的列向量组线性无关.

九、(本题满分 6 分)

设物体 A 从点 $(0, 1)$ 出发, 以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动. 物体 B 从点 $(-1, 0)$ 与 A 同时出发, 其速度大小为 $2v$, 方向始终指向 A . 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程, 并写出初值条件.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

- (1) 一批产品有 10 个正品和 2 个次品, 任意抽取两次, 每次抽一个, 抽出后不再放回, 则第二次抽出的是次品的概率为_____.
- (2) 设随机变量 X 服从 $(0, 2)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0, 4)$ 内的概率密度函数 $f_Y(y) =$ _____.

十一、(本题满分 7 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$.

- (1) 求 X 的数学期望 EX 和方差 DX ;
- (2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?
- (3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 为什么?

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)

- (1) 设 $z = x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$, f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
- (2) 【同试卷 I 第四题】

(3) 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 与 } \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P .

五、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 10 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第九题】

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 曲面 $z = e^x + 2xy = 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面方程为_____.

(3) 设 $u = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 在点 $(2, \frac{1}{\pi})$ 处的值为_____.

(4) 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 已知 $\alpha = (1, 2, 3), \beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, 设 $A = \alpha^T \beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$, 则有

(A) $N < P < M$. (B) $M < P < N$. (C) $N < M < P$. (D) $P < M < N$.

(2) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点连续的

(A) 充分条件而非必要条件. (B) 必要条件而非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

(3) 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$

(A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 敛散性与 λ 有关.

(4) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x})} = 2$, 其中 $a^2 + c^2 \neq 0$, 则必有

(A) $b = 4d$. (B) $b = -4d$. (C) $a = 4c$. (D) $a = -4c$.

(5) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性无关.
(B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
(C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
(D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = \cos t^2, \\ y = t \cos t^2 - \int_1^t \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos u du, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ 在 $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的值.

(2) 将函数 $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x$ 展开成 x 的幂级数.

(3) 求 $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x}$.

四、(本题满分 6 分)

计算曲面积分 $\iint_S \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z = R$,

$z = -R (R > 0)$ 所围成立体表面 (如图) 的外侧.

五、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 且

$$[xy(x+y) - f(x)y]dx + [f'(x) + x^2y]dy = 0$$

为一全微分方程, 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

六、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 绝对收敛.}$$

七、(本题满分 6 分)

已知点 A 与点 B 的直角坐标分别为 $(1, 0, 0)$ 与 $(0, 1, 1)$, 线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S , 求由 S 及两平面 $z = 0, z = 1$ 所围成的立体体积 (如图).

八、(本题满分 8 分)

设四元齐次线性方程组 (I) 为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$ 又已知某齐次线性方程组 (II) 的通解为

$$k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1).$$

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解. 若没有, 则说明理由.

九、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶非零方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵. 当 $A^* = A^T$ 时, 证明 $|A| \neq 0$.

十、填空题 (本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分)

(1) 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$, 且 $P(A) = p$, 则 $P(B) =$ _____.

(2) 设相互独立的两个随机变量 X 与 Y 具有同一分布律, 且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, 则随机变量 $Z = \max\{X,$

$Y\}$ 的分布律为 _____.

十一、(本题满分 6 分)

已知随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 并且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1, 3^2)$ 和 $N(0, 4^2)$, X 与 Y 的相关系数

$$\rho_{XY} = -\frac{1}{2}, \text{ 设 } Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}.$$

(1) 求 Z 的数学期望 EZ 和方差 DZ ;

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ} ;

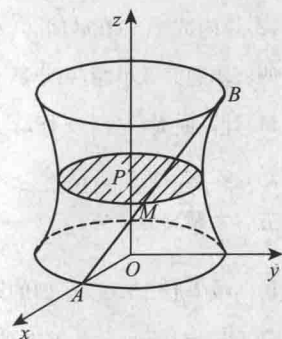
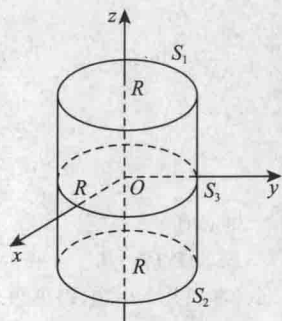
(3) 问 X 与 Z 是否相互独立? 为什么?

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】



四、(本题共 2 小题, 每小题 6 分, 满分 12 分)

(1) 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

(2)【同试卷 I 第四题】

五、(本题满分 9 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题共 2 小题, 满分 14 分)

(1) (本题满分 6 分) 设 A 是 n 阶方阵, $2, 4, \dots, 2n$ 是 A 的 n 个特征值, E 是 n 阶单位阵. 计算行列式 $|A - 3E|$ 的值.

(2) (本题满分 8 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第九题】

1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ _____.

(2) $\frac{d}{dx} \int_x^0 x \cos t^2 dt =$ _____.

(3) 设 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) =$ _____.

(4) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R =$ _____.

(5) 设 3 阶方阵 A, B 满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix},$$

则 $B =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设有直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 L

- (A) 平行于 π . (B) 在 π 上. (C) 垂直于 π . (D) 与 π 斜交.

(2) 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是

- (A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$. (B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$.
(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$. (D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$.

(3) 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

- (A) 充分必要条件. (B) 充分条件但非必要条件.
(C) 必要条件但非充分条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

(4) 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则级数

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散.

- (C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

(5) 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则必有

- (A) $AP_1P_2 = B$. (B) $AP_2P_1 = B$. (C) $P_1P_2A = B$. (D) $P_2P_1A = B$.

三、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1) 设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$.

四、(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)

(1) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分.

(2) 将 $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

五、(本题满分 7 分)

设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内, L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交, 交点记为 A . 已知 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$, 且 L 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 求 L 的方程.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $Q(x, y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分 $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关, 并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy,$$

求 $Q(x, y)$.

七、(本题满分 8 分)

函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数, 并且 $g''(x) \neq 0$, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 试证:

(1) 在开区间 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$;

(2) 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

八、(本题满分 7 分)

设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求 A .

九、(本题满分 6 分)

设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $AA^T = E$ (E 是 n 阶单位矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵), $|A| < 0$, 求 $|A + E|$.

十、(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次命中目标的概率为 0.4, 则 $E(X^2) =$ _____.

(2) 设 X 和 Y 为两个随机变量, 且

$$P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}, P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7},$$

则 $P\{\max\{X, Y\} \geq 0\} =$.

十一、(本题满分 6 分)

设 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ 求 $Y = e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题 (试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分)

(1)【同试卷 I 第三、(1)题】

(2) 求曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2$ 平行于平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程.

(3) 计算二重积分 $\iint_D x^2 y dx dy$, 其中 D 是由双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 及直线 $y = 0, y = 1$ 所围成的平面区域.

四、(本题满分 12 分)【同试卷 I 第四题】

五、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题共 2 小题, 每小题 7 分, 满分 14 分)

(1) 设 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + ax_3 - ax_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3, \end{cases}$ 问 a 为何值时方程组有解, 并在有解时求出方程组的通解.

(2)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第九题】

1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名 _____ 分数 _____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a =$.

(2) 设一平面经过原点及 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 则此平面方程为 .

(3) 微分方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x$ 的通解为 .

(4) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数为 .

(5) 设 A 是 4×3 矩阵, 且 A 的秩 $r(A) = 2$, 而 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $r(AB) =$.

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 已知 $\frac{(x+ay)dx + ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 a 等于

(A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

(2) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(3) 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常数 $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n}$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 敛散性与 λ 有关.

(4) 设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0) = 0, f'(0) \neq 0, F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(5) 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$. (B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$.
(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$. (D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$.

三、(本题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分)

(1) 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 的全长, 其中 $a > 0$ 是常数.