中學生文庫

概率趣談

中學生文庫

概率趣談

李　蕾著・商務印書館

中學生文庫
概 率 趣 談
李 薔著

出版者 商務印書館香港分館
香港皇后大道中三十五號
印刷者 商務印書館香港印刷廠
香港九龍炮仗街七十五號

1978年1月初版

《中學生文庫》出版說明

中學階段，是青年長身體、長知識的一個重要時期，在這個時期中打好基礎，無論是繼續深造學問，或者到社會中工作，都很有益處。

爲了幫助青年朋友在德、智、體各方面健康成長，我們編輯這套文庫，作爲中學生的課外讀物。文庫的內容包括語文、歷史、地理、藝術、數學、物理、化學、生物、體育等各方面。

在編寫這套文庫時，我們將注意到兩方面的情况：一方面是結合青年的特點，包括他們的愛好、興趣和接受能力等；另方面是盡量介紹一些新的知識，使之能擴濶視野，提高思想。

爲了把這套《中學生文庫》出版好，希望老師們、同學們和朋友們多給我們提出寶貴意見。

商務印書館編輯部

一九七七年・香港・

前　言

在概率論的發展過程中，有好些問題引起了不斷的議論。其中之一就是：概率論是不是起源於賭博呢？從歷史上的文獻來看，概率的討論的確是從巴斯卡（1623—1662）、費爾馬（1601—1665）和惠根斯（1629—1695）的分賭本問題開始的。於是，有人更誇誇其談，認爲機會遊戲可以出大道理；大有没有賭博就没有概率之勢。然而，賭博並非那個時候才出現，爲什麽概率論却偏産生於那個時候呢？

分析這個問題，不能割斷歷史背景來看。中世紀以後的歐洲，資本主義正處在一個萌芽時期，那時已有大量的徵稅、徵兵、人口統計，許多行業也應用到統計，正是在這樣的情况下，巴斯卡等人的分賭本問題才有現實的意義；在這個基礎上，概率論才能有所發展。事實上，惠根斯在《關於賭博的計算》這本書中也曾說過："在任何場合，我認爲，如果讀者仔細研究對象，就可注意到你所處理的不僅是賭博而已，其中實際上包含着很深刻的理論基礎。"稍後一些的伯努利更明確地指出，以賭博爲例子來叙述概率，僅僅是因爲規定其他的概率往往來得困難些。换句話説，概率問題最初用賭博做代表只是爲了描述的簡單。概率論源於賭博這講法是没有歷史觀點的。

概率是個數學模型，處理自然界中可重覆多次的偶然現象。爲什麼會有偶然性呢？有些人認爲，偶然性是在對某些事物無法預知的情況下出現的；它的出現是無可奈何的。這種看法抹煞了偶然性的客觀存在，是不符合客觀實際的。事物從來就是多樣化的，千差萬别的，在决定事物的多樣化的衆多因素中，有些起着本質的作用，有些則是非本質的。事物的規律是由其本質决定的，但也不排除還有非本質的因素的影響。本質相同的事物還是有差别的。不承認偶然性的存在，實質上就是把主要因素和次要因素等同起來，也就是未能把握着决定事物本質的主要因素，還未能深入認識事物的規律。

然而，在承認偶然性的存在時，也有人把偶然性提高到這樣的一個高度：認爲一切事物都是偶然的，是雜亂無章的，每一件事物都是唯一的，没有任何規律的存在，因此找尋規律是無益的。也有人認爲一切事物的發展都是上天的意旨，命運的安排，人是無能爲力去改變的。有關這些問題的探討，當然不能在這裏詳談。但只要我們重溫人類社會在各個方面所取得的巨大進步，就不難看出，人類逐漸擺脱過去的完全被動狀態，逐步地改造了環境，利用了自然，成爲自然界的主人，這都是人類在歷史的長河中通過個别的偶然性逐步地掌握必然規律的結果。誠然，在無窮的事物中，人類的認識過程只能是逐步加深，不能說對客觀事物的規律已經完全掌握。但人類社會所取得的進步從來就没有離開過人們自己的努力。

從概率論的發展過程看也是如此。在長期的觀察和研究中，人們選取了一些偶然現象，建立了不少數學模型。無論數學手段如何深化，人們始終都沒有忘記要穩穩地抓着現實世界裏的具體偶然現象，它們是模型的根源，而模型是它們的抽象和精化的描述。

就表達方法來說，本書所用的運算手段是屬於初等範疇的，有了中等的數學基礎就可掌握本書的數學內容。偶然事件的數學模型的討論是嚴謹的，作者力圖把現實和理論聯系起來而又不致混淆，有時甚至會給初學者一個故意做作的印象。這是一個新的嘗試。如果讀者能够在閱讀中領會到模型和現實的關係，作者的目的已經部分地達到了。

目　　錄

第一章　概率的概念

§1.1　偶然性

概率論就是一門研究偶然現象規律性的數學。因此，在正式談到概率前，首先要談談偶然現象本身。

在我們一生中，很少事情和偶然性無關。偶然性是孩子出生的一個重要因素；偶然性出現於我們找尋工作，結識朋友和伴侶的過程中；最後，偶然性把我們送入墳墓。所謂偶然性，我們是指在同樣的一般情況下，多種可能情形也會發生，而我們在事件發生前是不能精確地預知哪些一定會在這次出現，哪些一定不會在這次出現的。舉個例來說，在某一場戰役中，兩陣對壘，對一個軍事家來說，就算他知道了許多敵我雙方的資料，他也不能絕對肯定地預知哪一方一定會在這場戰役中勝利。他所得的資料絕不是完全的資料。他可能有雙方的人力物力的精確資料，他可能清楚雙方的計劃，但他無論如何也不能預知雙方指揮者在作戰時的反應，雙方實際參與作戰的士兵的臨陣表現。沒有這些，軍事家的推測也僅能是推測而已，不能看作百分之一百精確的預言。正是由於這些類似的不定性，偶然事件在人生的過程中起了一定的影響。這些影響是多樣性的，剛才所舉的戰役的例子只是其中一個典型的例子而已。

能不能消除偶然性？看來不能。世間上事物是多樣化的，千差萬别的。它們一定各有各的特殊性。一件事物和其他事物相比，無論在主要方面如何相似，總有些地方是不同的，否則便不成爲“其他”事物了。正因爲如此，在同樣的一般條件下，不同事物有着不同的反應，因而也就出現不同的可能情形。例如：在兩次連續擲同一顆骰子的過程中，一般而言，我們會得出兩個不同的數字。這是因爲這兩次擲骰是不同的過程：擲的手勢不同，骰子在擲下前離枱面（或地面）的高度不同，空氣流動情況不同，骰子下落的位置不同，骰子上的塵土或手汗多少不同等等。由於這些不同，所以在下落過程中，骰子的反應一般來説也就不一定同了。

詩人歌德對像這樣的不定性有很大的感慨：

我自已是不能够和你品衡！
我的力量雖能够把你引來，
而我没有力量能够把你固定。
在那樣幸福的一瞬的時辰，
我感覺着十分微妙，又十分英俊；
你殘酷地把我推墮，殘酷地——
推墮在這不確定的浮沉的人生。
我當得向誰領教？何所遵循？
我當得遵循我前番的猛進？
哦！我們的努力，如同我們的煩悶，
一樣地阻礙着我們生長的前程。

歌德：《浮士德》（郭沫若譯）

這會不會傾向於虛無主義？既然偶然性是不能消除，不能確知哪種可能會出現，那麼，人們可以知些什麼呢？如果是變化無常，不能捉摸，那我就不如來個守株待兔，等待"命運"的安排了。

不對！第一，偶然性是可識的，而且是必要識的。我們生活在社會中，要處理人和人之間的關係，要處理人和自然之間的關係，這當中偶然性是無處不在的。我們的親朋戚友關係就是在偶然中建立起來的。偶然性存在於事物發展過程中。正是由於這個原因，我們要好好的認識它，否則，我們不能掌握好人和人之間的關係，人和自然之間的關係。

事實上，雖然我們不能確知哪一種可能情形一定會發生，但通過仔細的實踐和分析，我們可知哪一種可能情形出現的機會較多。不了解這一點，就不能掌握事物發展的規律，做人做事都很難把握到方向，盲動性大。因此，隨着人類的進步，研究偶然性和它發展的傾向，由古至今都是一個引人注目的課題。在報章上，我們時時見到一些關於將來政治、經濟和軍事發展的各種各樣的分析和預測，其實就是對偶然性規律的一種研究。

第二，偶然性只會在許多個必然過程的交點上出現，因此，它的存在並不影響我們對必然性的研究。的確，偶然性的存在使我們不能確知哪種可能會在這一次出現，但我們决不會認爲這些可能性的出現是没有任何原因的。我們在日常生活中會偶然地遇到許多人，但並不是人人可以交成朋友的。在一次擲一顆普通骰子的過程中，7一定不會出現，而

骰子也不會用一角站在枱面（或地面）上。偶然事件的各種可能性是受着一定的條件（可能是隱藏在事物內部的）限制的，它們決不會意外地，變化無常地出現，只有在這種條件限制下，偶然性才採取它這種現在形式，在別種條件下，它就取別一些形式了。要好好地研究偶然性，我們一定要抓着這些必然性。必然性決定了事物發展的根本趨勢，也就支配着偶然性。如果骰子的構造是均勻的，那麼我們就沒有理由以爲 1 的出現機會會大過 6 的出現機會。如果骰子的重心遠離 1 所在的面，那麼 1 出現的機會當然會大過其他數目出現的機會了。

第三，人在偶然性下決不是無所作爲的。當然，人們不能够隨意想幹什麼就幹什麼。我們不能要求擲一顆普通骰子會出現 7 。人們的社會實踐要受到自然規律和社會發展規律的必然限制，這些限制都是通過偶然性落到人們身上。但一旦充分認識這個必然性，就能好好地掌握偶然性。充分認識必然性，就能信心百倍，調動人的力量去利用必然性，促使有利於人類社會的偶然性更有條件地出現。

第四，人的作用是世間一切事物中決定的因素，決不能想像人類對其他事物不起作用。因此人類總是有所作爲的，每個人不是從事這樣的工作，就是從事那樣的工作，而且只有通過這許許多多的人的工作，社會才得以進步。

事實上，無論在偶然性和必然性中，人的力量都是已經充分估計在內的了。人對於偶然性和必然性是有一定的影響的，而只有在充分認識必然性的基礎上，人才能發揮更大的

作用。把人的作用從偶然性和必然性中抽出來孤立看待，是不切實際的。因此，由於偶然性和必然性的存在而認爲人類無需努力這種懶漢思想，是站不住脚的。

總括來說，偶然性存在於事物發展的過程中。它是可認識的。它的出現，不是無緣無故的，它是通過必然的方向表現了自己，因此，要認識偶然性，就必須掌握必然性。掌握好必然性就能抓到事物發展的方向，認識偶然性，克服盲目性。然而，必然性從哪兒可知呢？是從天掉下來的嗎？不是！必然性就是事物發展的規律，我們不可能全部認識所有事物的發展過程，我們只能通過偶然現象去揭露事物發展過程所隱藏的必然規律。因此研究偶然性和研究必然性是不能割裂的。研究偶然性同時也就是研究必然性。

§ 1.2　偶然事件

粗略地說，有兩大類偶然事件：一、那些可以重覆許多許多次的偶然事件；二、少有（或没有）機會重覆的偶然事件。我們這裏着重講的是第一類偶然事件。這一類事件可以舉出許多例子：

1．一間電子廠生產某種元件，假如要生產十萬件，工廠裏就至少要重覆同一生產程序十萬次。無論工人如何小心，機器如何精良，廢品不時也會出現。出現廢品就是這一類的偶然事件。

2．生男或生女。除了一些小數的懷着雙胞胎或多胞胎

的孕婦外，生男或生女對每一個孕婦來說都是偶然的。這事件在世界上大多數的婦女身上重覆。

3. 在軍事上，用某種武器在一定位置把敵機打下也是一件可重覆多次的偶然事件。

所有這些偶然事件，都有一個共同的特徵：雖然我們不能確知這樣的偶然事件一定會在這一次發生與否，但從長遠的觀點看，我們是能够肯定一些東西的。對一個熟練的工廠管理人員來說，他是能由以前的抽樣估計中評估出在當時的生產條件和工人熟練程度下大約每一千件元件中有若干件廢品。就人類大的範圍來說，我們知道男的出生率與女的出生率是大致相等的。對一個有經驗的炮手來說，他是知道在哪個位置和哪個時刻發炮的命中機會最大的。所有這些偶然性，都是由事物本身的必然發展所決定，是要經過長久的觀察才能充分掌握的。

在自然科學上，我們給出一個數值去量度這些偶然性的傾向。這個數值一般稱爲**概率**。對一個自然科學工作者來說，在一定的條件下，某一偶然事件 E 發生的概率 $\frac{p}{q}$（一個真分數），就是這偶然事件 E 出現的傾向的一種量度：在同一條件下重覆很多很多次，大約每 q 次中，E 會出現 p 次，（這句話我們以後要仔細再分析）。

讓我們用一個例子來説明這個概念。對一個病人而言，醫生説這樣的一句話："如果給你做手術，你能够復原而活下去的概率是 0.7。"是什麽意思？很明顯，如果這個病人接受做手術的話，結果只有兩種可能：病人被救活或救不活。那

麼，0.7 這個數字意味着什麼呢？

它意味着——如果許多類似的病人也要接受同樣的手術，那麼大概每一百個中有七十個復原而活下去。做手術的病人愈多，這個比數就愈接近每一百個有七十個。

因此，概率這個概念只適用於衆多而同類的偶然現象，絕不是個別的偶然現象。我們說這病人的復原概率是 0.7，意思就是：這病人只能作爲衆多同樣的病人中的一分子；他們在做過手術後，大約一百個中有七十個復原。所以，即使這個病人在手術後死了，這個提法也不能算錯。

§1.3 實驗

上節提到，一件事重覆的試驗在同樣的已知條件下進行多次，由於長期觀察，會發現到試驗中某一偶然事件 E 的出現規律是穩定的。如果以 n 表示在 m 次重覆試驗中偶然事件 E 的發生次數，則 $\frac{n}{m}$ 這個比在 m 充分大時對大多數這樣系列的觀察保持幾乎固定的數值，而 m 愈大，則觀察到的偏差就愈小。這種穩定性，在古代早已有人注意到了。後來，特別在十七和十八世紀，一系列人口統計研究的著作出現了，它們分別提到男女嬰出生比率的穩定性，在某個年齡限度中居民的死亡率，某個民族的人民的身材、胸寬、足掌長短等問題。

在拉普拉斯的《論概率的哲學論文》中，提到一個很有意思的例子：他對倫敦、彼得堡、柏林和全法國所研究的統

計資料，給出了幾乎完全一致的男嬰出生數與全體出生數的比值，所有這些比值在十年間總擺動於同一數字 $\frac{22}{43}$ 左右。

穩定比值這一事實，有大量實驗資料來證明。在這裏我們列舉一組用計算機做的擲錢幣模擬實驗。這一組實驗共有十二個：頭三個每次都是擲錢幣 10 次，出現正面 (H) 與投擲次數的比例，稱爲**相對頻數**，分別是 0.8，0.4，0.6。跟着兩個實驗每次都擲 50 次，相對頻數分別是 0.46，0.44。跟着是擲 100 次，1000 次，5,000 次，10,000 次，50,000 次，100,000 次，1,000,000 次，出現的相對頻數分別是 0.49，0.493，0.5012，0.4940，0.5005，0.50034，0.500114。

討論

1. 由實驗可知，相對頻數在重覆試驗的次數增多時穩定起來。正面 (H) 出現的必然傾向是通過多次的偶然出現表現出來的。

2. 相對頻數並不是唯一的。不同的實驗，甚至是同一實驗在不同時間下，會得出不同的然而相差不太遠的相對頻數。有沒有一個固定的、眞正的相對頻數？這個問題是難以回答的，因爲我們不能做無限次實驗。因此，即使在各個相對頻數中有一個是“眞正”的，我們也無從知道哪一個就是。

一個類似的例子是很有啓發性的。我們拿起一把游標尺或用其他更精密的儀器去量一件物體的長度，無論如何，我們也不能得出一個“固定的，眞正的”長度。由於量度儀器的準確度有限，有人爲的誤差，而最後有着物理學上的“測不準原理”的限制，這樣的“固定的，眞正的”長度是不可求的。

那麽，我們就不能量度長度麽？不是！通常我們量它幾次，求它們的平均數，得個近似值，最後加上量度所允許的最大誤差上去。這是在自然科學上的通用手法。

但如果在處理自然科學上處處都用上這個手法時，那麽它所需的數學手段就變得很複雜了。因爲每次也要考慮誤差的因素。爲了簡化起見，人們往往要建立一個“近似的”數學模型，這個模型要在“主要”方面和現實世界相近，但要簡化點，略去一些次要的問題。就剛才所談那個量度的例子來說，人們通常建立這樣的一個數學模型：一段綫段，它的長度是固定而可精確地知的。這個模型和現實所要量的物件長度的關係在於：數學模型中可精確地知的長度就是所要量的物件長度的一個近似值。實際要量的長度是不能確知的，但數學模型中的長度是精確的，雖然這精確僅是實際長度的一個近似。

對於偶然事件的相對頻率，我們也作出類似的處理。

§1.4 數學模型

考慮一個真正的擲錢幣過程。結果可以是正面，反面，溜走了，或者用它的邊站起來，既不是正面也不是反面。後兩者的結果都是很少發生的。擲的手勢也有多種，其中可以包括把錢幣平放。在一般的情况下，我們只考慮這樣的擲錢幣過程：一，只有正面和反面是可能結果，其它的都不是；二，擲的手勢要一律，使得正反兩面都有同等的機會出現。這兩種情形組成一個理想化的擲錢幣過程。

這類理想化的過程在數學上一般用一些符號和數字表達