“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

全国高校测控技术与仪器专业教学指导委员会审编教材

误差理论与数据处理

合肥工业大学　费业泰　主编

第7版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
全国高校测控技术与仪器专业教学指导委员会审编教材

误差理论与数据处理

第7版

主编　费业泰
参编　陈晓怀　秦　岚　宋明顺　许陇云　黄强先
主审　罗南星

机械工业出版社

本书是全国高等学校首本“误差理论与数据处理”课程教材，自1981年出版第1版以来，深受高等学校和科研院所欢迎。

本书讲述科学实验和工程实践中常用的静态测量和动态测量的误差理论与数据处理，内容包括：绪论、误差的基本性质与处理、误差的合成与分配、测量不确定度、线性测量的参数最小二乘法处理、回归分析、动态测试数据处理的基本方法等。第7版教材在保持第6版教材特色的基础上，对部分内容做了修改，以适应更多专业的教学需要，其中主要是删减部分几何量测量实例，补充了电学量等其他物理量测量实例，并删除第6版中线性递推回归和谱估计的基本方法等章节内容。全书各章附有大量习题供选用，书末附录为常用数表。为了便于本课程教学，本书配有《误差理论与数据处理习题集及典型题解》（重庆大学秦岚编著），该书各章内容与本教材内容相对应，可与本教材配套使用。

本书为高等学校测控技术与仪器专业规划教材，也可作为机械类、电气电子类、信息类专业和其他相关专业教材，还可供科研及生产单位的研究设计和计量测试等工程技术人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

误差理论与数据处理/费业泰主编. —7版. —北京：机械工业出版社，2015.5（2015.8重印）

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材　普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-111-49524-6

Ⅰ. ①误…　Ⅱ. ①费…　Ⅲ. ①测量误差－误差理论－高等学校－教材②测量－数据处理－高等学校－教材　Ⅳ. ①O241.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第044937号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：贡克勤　责任编辑：贡克勤　王小东　封面设计：张　静
责任校对：陈　越　责任印制：李　洋
三河市宏达印刷有限公司印刷
2015年8月第7版第2次印刷
184mm×260mm ·13.75印张·334千字
标准书号：ISBN 978-7-111-49524-6
定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010－88379833
读者购书热线：010－88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden－book.com

前　　言

任何科学实验及工程实践都离不开测量及仪器，由于测量与实验结果中存在误差的必然性与普遍性，影响了测量与实验结果的可信赖性，甚至失去其科学价值与实际意义。因此，为了全面认识测量及仪器的各项误差，具有分析误差性质及其产生原因、减小和控制误差及最终结果评定的能力，是非常必要的。在长期大量的实践中，人们越来越认识到误差理论与数据处理在科学技术和工程实践中的重要地位与作用，掌握误差理论与数据处理知识已为广大科技工作者之必需。现在全国各高校相关专业已普遍开设本课程，在2010年举办的、具有测试技术与仪器学科博士学位授权点的30余所高校相关学院负责人参加的论坛会上，与会学者、专家研讨本学科特色时，一致认为误差理论及技术是本学科唯一特有的专业基础课程。在科学研究与工程技术应用方面，从测试技术及仪器系统设计方案的误差分析、误差建模计算、误差分配、误差分离与修正以及最后误差合成与不确定度评定等方面，本课程进行了全面系统的论述，为本学科科技工作者提供了必不可少的重要专业基础理论及技术，而其他学科专业少有专门设立本课程进行全面系统地讲述误差理论知识，而且在科技实际工作中不可避免地涉及误差理论方面的问题，则需应用或参考本学科误差理论全面系统知识的相关内容。此外，本学科专业教学中开设了几门专业课程，讲述具体的测试技术及仪器，但是随着科技发展，不断研制出新的测试技术及仪器，将逐渐取代原有的测试技术及仪器，而误差理论与数据处理论述的基本内容，则是测试科技工作者需要终身常用的专业基础知识，它像数学和物理学一样是科技工作者终身应用的基础知识，必须熟练掌握和灵活运用。由此可知，本学科专业开设误差理论课程具有的独特性和编写出版本教材的必要性及其重要意义。

根据现代科技发展需要以及世界有关高校开设相关课程的情况，在认识到掌握误差理论知识重要性的基础上，1978年4月，本教材主编在天津大学主持召开的全国高等学校原精密仪器专业教学指导委员会上提出开设“误差理论与数据处理”这门新课，经会议讨论决定开设此课程，并于1981年编写出版首本教材，由此开创了高等学校“误差理论与数据处理”课程教学史。35年来，在高等学校测控技术与仪器专业教学指导委员会的指导下，本教材已连续6次修订出版，1987年出版第2版、1995年出版第3版、2000年出版第4版、2005年出版第5版、2010年出版第6版，现在出版第7版。各次修订版教材内容不断更新，教材质量不断提高。本教材于1982年获原机械工业部优秀图书奖、1998年获高等学校机电类专业优秀教材奖。自1997年至2014年，本教材连续评为“九五”、“十五”、“十一五”、“十二五”国家级规划教材。本教材一直是出版使用面最广、深受各校师生和科技工作者欢迎的教材，目前有200余所高校使用本教材，发行量大，仅教材第6版出版5年来已9次印刷发行。此外，本书主编所在的合肥工业大学的“误差理论与数据处理”课程被教育部评为国家精品课程，本教材也起着关键作用。

为了适应科学技术的不断发展和各个高等学校测控技术与仪器专业不同专业特色人才培养的需要，根据有关高校教师建议并参考“全国误差与不确定度研究会”多次主办的误差理论及应用教学与学术研讨会与会学者的意见，本教材在第6版基础上再次修订，现出版第7版。为了适应本学科不同特色专业教学需要和不同教学时数限制，此次主要修改内容包

括：删减了部分几何量测量应用实例，增加了电学测量、力学测量以及其他物理量测量应用实例；删除原书第六章第六节线性递推回归和第七章第四节谱估计的基本方法；对第6版各章存在的个别文字叙述不妥之处及出版印刷错误，均逐一进行了修正。

本书第7版仍由第6版原编者负责修订，即主编为费业泰并编写第一、第二、第三章，陈晓怀编写第四章、秦岚编写第五章、宋明顺编写第六章、许陇云编写第七章。另有合肥工业大学黄强先教授参加第7版全书有关修订工作，并负责有关章节应用实例修改补充。此外，为了便于本课程教学，本书编者重庆大学秦岚教授编著了《误差理论与数据处理习题集及典型题解》，机械工业出版社已于2014年出版发行，该书各章内容与本教材内容相对应，可与本教材配套使用。

本书出版35年来，初期版本曾有哈尔滨工业大学丁振良教授、上海理工大学姚景风教授和合肥工业大学邓善熙教授参加了部分编写工作。在各版修订的不同时期，先后有许多学者给予热情支持并提出了宝贵意见，其中除全国著名学者外，还有“全国误差与不确定度研究会”各位理事以及参加12次的误差理论及应用教学与学术研讨会与会学者。主要有：中国计量科学研究院钱钟泰和刘智敏研究员，清华大学严普强、朱鹤年和李岩教授，北京理工大学林洪桦和沙定国教授，燕山大学史锦珊教授，原哈尔滨科技大学王天荣教授，华中科技大学李柱和谢铁邦教授，西安交通大学蒋庄德教授，上海交通大学张鄂、施文康和颜国正教授，华南理工大学刘桂雄教授，四川大学赵世平教授，北京工业大学石照耀教授，北京航空航天大学王中宇教授，北京信息科技大学祝连庆教授，东南大学宋爱国教授，天津大学胡小唐教授和贾果欣副教授，中国计量学院李东升教授，中国科技大学褚家如教授和安徽理工大学杨洪涛教授等多位学者。对他们长期以来给予本书修订的热忱关心、支持与帮助，在此表示衷心感谢！此外，我们还深切怀念原高等学校仪器仪表类专业教学指导委员会（现改为测控技术与仪器专业）主任、本教材前主审天津大学陈林才教授，他生前为本教材初版编写及多次修订再版所做的贡献，我们永远不会忘记！

由于编者水平有限和现代科技的迅速发展，本书第7版存在不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

费业泰

目　　录

第一章　绪　　论

第一节　研究误差的意义

人类为了认识自然与遵循其发展规律用于自然，需要不断地对自然界的各种现象进行测量和研究。由于实验方法和实验设备的不完善，周围环境的影响，以及受人们认识能力所限等，测量和实验所得数据和被测量的真值之间，不可避免地存在着差异，这在数值上即表现为误差。随着科学技术的日益发展和人们认识水平的不断提高，虽可将误差控制得越来越小，但终究不能完全消除它。误差存在的必然性和普遍性，已为大量实践所证明。为了充分认识并进而减小或消除误差，必须对测量过程和科学实验中始终存在着的误差进行研究。

研究误差的意义为

1）正确认识误差的性质，分析误差产生的原因，以消除或减小误差。

2）正确处理测量和实验数据，合理计算所得结果，以便在一定条件下得到更接近于真值的数据。

3）正确组织实验过程，合理设计仪器或选用仪器和测量方法，以便在最经济条件下，得到理想的结果。

第二节　误差的基本概念

一、误差的定义及表示法

所谓误差就是测得值与被测量的真值之间的差，可用下式表示：

$$误差=测得值-真值 \tag{1-1}$$

例如在长度计量测试中，测量某一尺寸的误差公式具体形式为

$$误差=测得尺寸-真实尺寸 \tag{1-2}$$

测量误差可用绝对误差表示，也可用相对误差表示。

（一）绝对误差

某量值的测得值和真值之差为绝对误差，通常简称为误差，即

$$绝对误差=测得值-真值 \tag{1-3}$$

由式（1-3）可知，绝对误差可能是正值或负值。

所谓真值是指在观测一个量时，该量本身所具有的真实大小。量的真值是一个理想的概念，一般是不知道的。但在某些特定情况下，真值又是可知的。例如：三角形三个内角之和为180°；一个整圆周角为360°；按定义规定的国际千克基准的值可认为真值是1kg等。为了使用上的需要，在实际测量中，常用被测的量的实际值来代替真值，而实际值的定义是满

足规定精确度的用来代替真值使用的量值。例如在检定工作中，把高一等级精度的标准所测得的量值称为实际值。如用二等标准活塞压力计测量某压力，测得值为 9000.2N/cm^2，若该压力用高一等级的精确方法测得值为 9000.5N/cm^2，则后者可视为实际值，此时二等标准活塞压力计的测量误差为 −0.3N/cm^2。

在实际工作中，经常使用修正值。为消除系统误差而用代数法加到测量结果上的值称为修正值。将测得值加上修正值后可得近似的真值，即

$$\text{真值} \approx \text{测得值} + \text{修正值} \tag{1-4}$$

由此得

$$\text{修正值} = \text{真值} - \text{测得值} \tag{1-5}$$

修正值与误差值的大小相等而符号相反，测得值加修正值后可以消除该误差的影响。但必须注意，一般情况下难以得到真值，因为修正值本身也有误差，修正后只能得到较测得值更为准确的结果。

（二）相对误差

绝对误差与被测量的真值之比值称为相对误差。因测得值与真值接近，故也可近似用绝对误差与测得值之比值作为相对误差，即

$$\text{相对误差} = \frac{\text{绝对误差}}{\text{真值}} \approx \frac{\text{绝对误差}}{\text{测得值}} \tag{1-6}$$

由于绝对误差可能为正值或负值，因此相对误差也可能为正值或负值。

相对误差是无名数，通常以百分数（%）来表示。例如用水银温度计测得某一温度为 20.3℃，该温度用高一等级的温度计测得值为 20.2℃，因后者精度高，故可认为 20.2℃ 接近真实温度，而水银温度计测量的绝对误差为 0.1℃，其相对误差为

$$\frac{0.1}{20.2} \approx \frac{0.1}{20.3} \approx 0.5\%$$

对于相同的被测量，绝对误差可以评定其测量精度的高低，但对于不同的被测量以及不同的物理量，绝对误差就难以评定其测量精度的高低，而采用相对误差来评定较为确切。

例如用两种方法来测量 $L_1 = 100\text{mm}$ 的尺寸，其测量误差分别为 $\delta_1 = \pm 10\mu\text{m}$，$\delta_2 = \pm 8\mu\text{m}$，根据绝对误差大小，可知后者的测量精度高。但若用第三种方法测量 $L_2 = 80\text{mm}$ 的尺寸，其测量误差为 $\delta_3 = \pm 7\mu\text{m}$，此时用绝对误差就难以评定它与前两种方法精度的高低，必须采用相对误差来评定。

第一种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_1}{L_1} = \pm \frac{10\mu\text{m}}{100\text{mm}} = \pm \frac{10}{100000} = \pm 0.01\%$$

第二种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_2}{L_1} = \pm \frac{8\mu\text{m}}{100\text{mm}} = \pm \frac{8}{100000} = \pm 0.008\%$$

第三种方法的相对误差为

$$\frac{\delta_3}{L_2} = \pm \frac{7\mu\text{m}}{80\text{mm}} = \pm \frac{7}{80000} \approx \pm 0.009\%$$

由此可知，第一种方法精度最低，第二种方法精度最高。

（三）引用误差

所谓引用误差指的是一种简化和实用方便的仪器仪表示值的相对误差，它是以仪器仪表某一刻度点的示值误差为分子，以测量范围上限值或全量程为分母，所得的比值称为引用误差，即

$$\text{引用误差} = \frac{\text{示值误差}}{\text{测量范围上限}} \tag{1-7}$$

例如测量范围上限为 19600N 的工作测力计（拉力表），在标定示值为 14700N 处的实际作用力为 14778. 4N，则此测力计在该刻度点的引用误差为

$$\frac{14700\text{N} - 14778.4\text{N}}{19600\text{N}} = \frac{-78.4}{19600} = -0.4\%$$

在仪器全量程范围内有多个刻度点，每个刻度都有相应的引用误差，其中绝对值最大的引用误差称为仪器的最大引用误差。

例 某台标称示值范围为 0 ~ 150V 的电压表（即满量程为 150V），在示值为 100V 处，用标准电压表检定得到的电压表实际示值为 99. 4V，求使用该电压表在测得示值为 100V 时的绝对误差、相对误差和引用误差？

由式（1-3）、式（1-6）和式（1-7），可得该电压表在 100V 处的

$$\text{绝对误差} = 100\text{V} - 99.4\text{V} = 0.6\text{V}$$

$$\text{相对误差} = \frac{0.6\text{V}}{99.4\text{V}} \times 100\% \approx \frac{0.6\text{V}}{100\text{V}} \times 100\% = 0.6\%$$

$$\text{引用误差} = \frac{100\text{V} - 99.4\text{V}}{150\text{V}} \times 100\% = 0.4\%$$

二、误差来源

在测量过程中，误差产生的原因可归纳为以下几个方面：

（一）测量装置误差

1. 标准量具误差

以固定形式复现标准量值的器具，如氪 86 灯管、标准量块、标准线纹尺、标准电池、标准电阻、标准砝码等，它们本身体现的量值，不可避免地都含有误差。

2. 仪器误差

凡用来直接或间接将被测量和已知量进行比较的器具设备，称为仪器或仪表，如阿贝比较仪、天平等比较仪器，压力表、温度计等指示仪表，它们本身都具有误差。

3. 附件误差

仪器的附件及附属工具，如测长仪的标准环规，千分尺的调整量棒等的误差，也会引起测量误差。

（二）环境误差

由于各种环境因素与规定的标准状态不一致而引起的测量装置和被测量本身的变化所造成的误差，如温度、湿度、气压（引起空气各部分的扰动）、振动（外界条件及测量人员引起的振动）、照明（引起视差）、重力加速度、电磁场等所引起的误差。通常仪器仪表在规

定的正常工作条件所具有的误差称为基本误差，而超出此条件时所增加的误差称为附加误差。

（三）方法误差

由于测量方法不完善所引起的误差，如采用近似的测量方法而造成的误差。例如用钢卷尺测量大轴的圆周长 s，再通过计算求出大轴的直径 $d = s/\pi$，因近似数 π 取值的不同，将会引起误差。

（四）人员误差

由于测量者受分辨能力的限制，因工作疲劳引起的视觉器官的生理变化，固有习惯引起的读数误差，以及精神上的因素产生的一时疏忽等所引起的误差。

总之，在计算测量结果的精度时，对上述 4 个方面的误差来源，必须进行全面的分析，力求不遗漏、不重复，特别要注意对误差影响较大的那些因素。

三、误差分类

按照误差的特点与性质，误差可分为系统误差、随机误差和粗大误差三类。

（一）系统误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号保持不变，或在条件改变时，按一定规律变化的误差称为系统误差。例如标准量值的不准确、仪器刻度的不准确而引起的误差。

系统误差又可按下列方法分类：

1. 按对误差掌握的程度分

已定系统误差，是指误差绝对值和符号已经确定的系统误差。

未定系统误差，是指误差绝对值和符号未能确定的系统误差，但通常可估计出误差范围。

2. 按误差出现规律分

不变系统误差，是指误差绝对值和符号固定的系统误差。

变化系统误差，是指误差绝对值和符号变化的系统误差。按其变化规律，又可分为线性系统误差、周期性系统误差和复杂规律系统误差等。

（二）随机误差

在同一测量条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号以不可预定方式变化的误差称为随机误差。例如仪器仪表中传动部件的间隙和摩擦、连接件的弹性变形等引起的示值不稳定。

（三）粗大误差

超出在规定条件下预期的误差称为粗大误差，或称“寄生误差”。此误差值较大，明显歪曲测量结果，如测量时对错了标志、读错或记错了数、使用有缺陷的仪器以及在测量时因操作不细心而引起的过失性误差等。

上面虽将误差分为三类，但必须注意各类误差之间在一定条件下可以相互转化。对某项具体误差，在此条件下为系统误差，而在另一条件下可为随机误差，反之亦然。如按一定基本尺寸制造的量块，存在着制造误差，对某一块量块的制造误差是确定数值，可认为是系统误差，但对一批量块而言，制造误差是变化的，又成为随机误差。在使用某一量块时，没有

检定出该量块的尺寸偏差，而按基本尺寸使用，则制造误差属随机误差；若检定出量块的尺寸偏差，按实际尺寸使用，则制造误差属系统误差。掌握误差转化的特点，可将系统误差转化为随机误差，用数据统计处理方法减小误差的影响；或将随机误差转化为系统误差，用修正方法减小其影响。

总之，系统误差和随机误差之间并不存在绝对的界限。随着对误差性质认识的深化和测试技术的发展，有可能把过去作为随机误差的某些误差分离出来作为系统误差处理，或把某些系统误差当作随机误差来处理。

第三节　精　　度

反映测量结果与真值接近程度的量，通常称为精度㊀，它与误差的大小相对应，因此可用误差大小来表示精度的高低，误差小则精度高，误差大则精度低。

精度可分为

1）准确度：它反映测量结果中系统误差的影响程度。

2）精密度：它反映测量结果中随机误差的影响程度。

3）精确度：它反映测量结果中系统误差和随机误差综合的影响程度，其定量特征可用测量的不确定度（或极限误差）来表示。

精度在数量上有时可用相对误差来表示，如相对误差为 0.01%，可笼统说其精度为 10^{-4}，若纯属随机误差引起，则说其精密度为 10^{-4}，若是由系统误差与随机误差共同引起，则说其精确度为 10^{-4}。

对于具体的测量，精密度高的准确度不一定高，准确度高的精密度也不一定高，但精确度高，则精密度与准确度都高。

如图 1-1 所示的打靶结果，子弹落在靶心周围有三种情况，图 1-1a 的系统误差小而随机误差大，即准确度高而精密度低；图 1-1b 的系统误差大而随机误差小，即准确度低而精密度高；图 1-1c 的系统误差与随机误差都小，即精确度高，我们希望得到精确度高的结果。

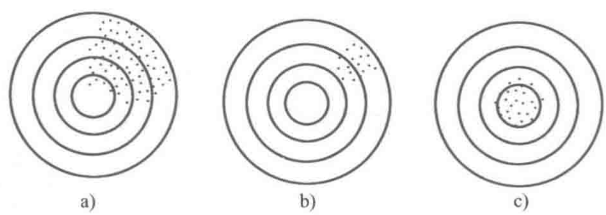

图　1-1

误差来源、分类和精度评定的系统图见图 1-2。

㊀ 本书应用广泛，为科研与工程技术众多领域学者所使用，有关误差的某些名词术语及定义与有的行业技术规范会存在一定差别，考虑到在相关行业技术规范中亦已明确指出，其规范只对其本身具有一定约束力，而对行业其他方面和相关科技领域中的使用也是推荐性的，同时又充分考虑到我国其他众多工程科技领域使用名词术语的传统习惯现状，故本版教材对名词术语暂不全面修改，仍保留广泛使用的“精度”一词及其内涵等。在教学时，若涉及某个具体行业领域有不同的相关名词术语及定义，可作适当补充说明。

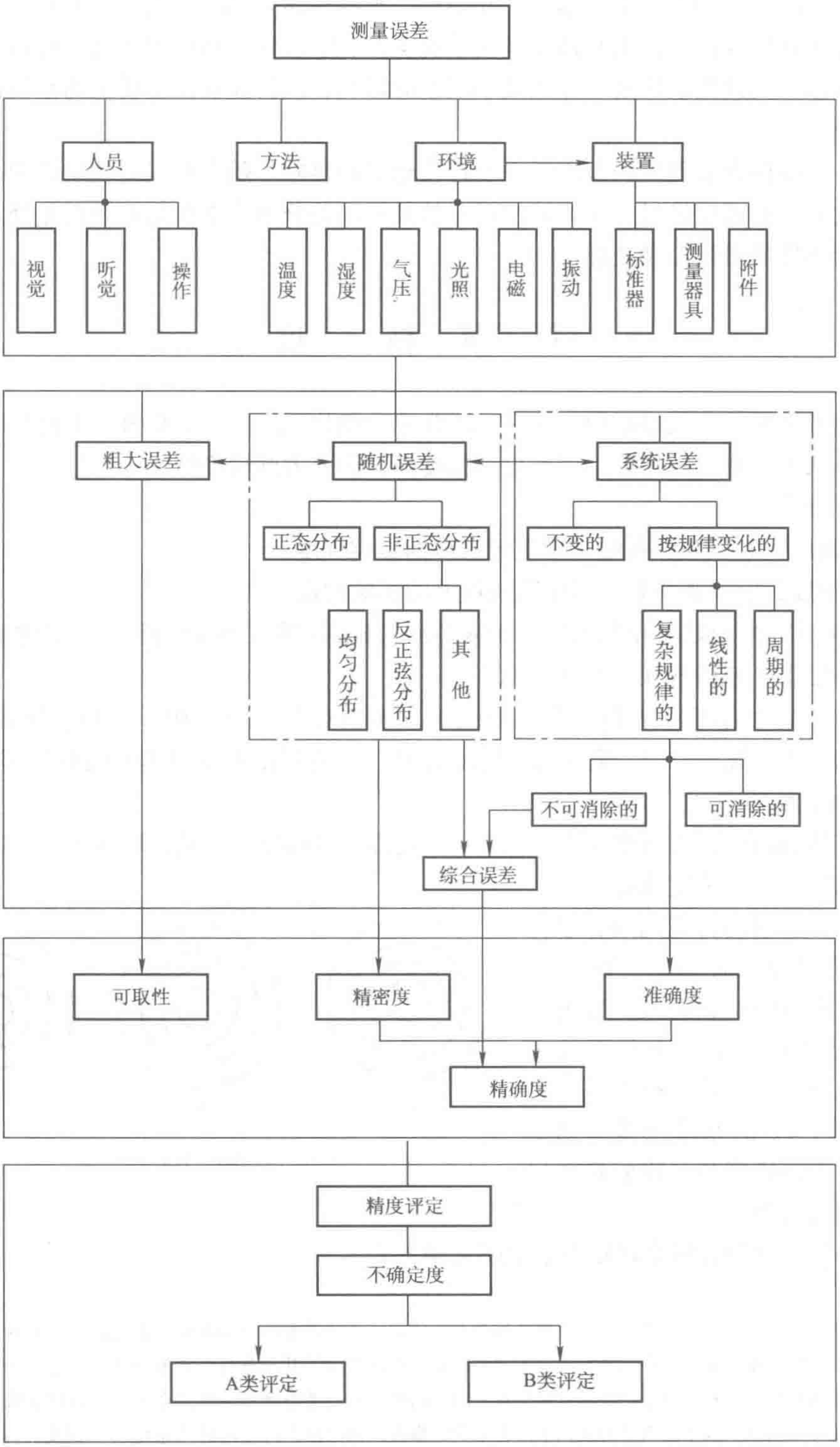
测量误差
人员
方法
环境
装置
视觉
听觉
操作
温度
湿度
气压
光照
电磁
振动
标准器
测量器具
附件
粗大误差
随机误差
系统误差
正态分布
非正态分布
不变的
按规律变化的
均匀分布
反正弦分布
其他
复杂规律的
线性的
周期的
不可消除的
可消除的
综合误差
可取性
精密度
准确度
精确度
精度评定
不确定度
A类评定
B类评定

图 1-2

第四节 有效数字与数据运算

在测量结果和数据运算中，确定用几位数字来表示测量或数据运算的结果，是一个十分重要的问题。测量结果既然包含有误差，说明它是一个近似数，其精度有一定限度，在记录测量结果的数据位数或进行数据运算时的取值多少时，皆应以测量所能达到的精度为依据。如果认为，不论测量结果的精度如何，在一个数值中小数点后面的位数越多，这个数值就越精确；或者在数据运算中，保留的位数越多，精度就越高，这种认识都是片面的。若将不必要的数字写出来，既费时间，又无意义。一方面是因为小数点的位置决定不了精度，它仅与所采用的单位有关，如35.6mm和0.0356m的精度完全相同，而小数点位置则不同。另一方面，测量结果的精度与所用测量方法及仪器有关，在记录或数据运算时，所取的数据位数，其精度不能超过测量所能达到的精度；反之，若低于测量精度，也是不正确的，因为它将损失精度。此外，在求解方程组时，若系数为近似值，其取值多少对方程组的解有很大影响。例如，下面的方程组（a）和（b）及其对应解为

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-1.0001y=0 \end{cases} \quad \text{对应解为} \begin{Bmatrix} x=10001 \\ y=10000 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-0.9999y=0 \end{cases} \quad \text{对应解为} \begin{Bmatrix} x=-9999 \\ y=-10000 \end{Bmatrix} \tag{b}$$

两个方程组仅有一个系数相差万分之二，但所得结果差异极大，由此也可看出研究有效数字和数据运算规则的重要性。

一、有效数字

含有误差的任何近似数，如果其绝对误差界是最末位数的半个单位，那么从这个近似数左方起的第一个非零的数字，称为第一位有效数字。从第一位有效数字起到最末一位数字止的所有数字，不论是零或非零的数字，都叫有效数字。若具有 n 个有效数字，就说是 n 位有效位数。例如取 $\pi=3.14$，第一位有效数字为3，共有3位有效位数；又如0.0027，第一位有效数字为2，共有两位有效位数；而0.00270，则为3位有效位数。

若近似数的右边带有若干个零的数字，通常把这个近似数写成 $a\times10^n$ 形式，而 $1\leqslant a<10$。利用这种写法，可从 a 含有几个有效数字来确定近似数的有效位数。如 2.400×10^3 表示4位有效位数；2.40×10^3 和 2.4×10^3，分别表示3位和两位有效位数。

在测量结果中，最末一位有效数字取到哪一位，是由测量精度来决定的，即最末一位有效数字应与测量精度是同一量级的。例如用千分尺测量时，其测量精度只能达到0.01mm，若测出长度 $l=20.531\text{mm}$，显然小数点后第二位数字已不可靠，而第三位数字更不可靠，此时只应保留小数点后第二位数字，即写成 $l=20.53\text{mm}$，为4位有效位数。由此可知，测量结果应保留的位数原则是：其最末一位数字是不可靠的，而倒数第二位数字应是可靠的。测量误差一般取1～2位有效数字，因此上述用千分尺测量结果可表示为 $l=(20.53\pm0.01)\text{mm}$。

在进行比较重要的测量时，测量结果和测量误差可比上述原则再多取一位数字作为参考，如测量结果可表示为 15.214 ± 0.042。因此，凡遇有这种形式表示的测量结果，其可靠数字为倒数第三位数字，不可靠数字为倒数第二位数字，而最后一位数字则为参考数字。

二、数字舍入规则

对于位数很多的近似数，当有效位数确定后，其后面多余的数字应予舍去，而保留的有效数字最末一位数字应按下面的舍入规则进行凑整：

1）若舍去部分的数值，大于保留部分的末位的半个单位，则末位加1 。

2）若舍去部分的数值，小于保留部分的末位的半个单位，则末位不变。

3）若舍去部分的数值，等于保留部分的末位的半个单位，则末位凑成偶数，即当末位为偶数时则末位不变，当末位为奇数时则末位加1。

例如，按上述舍入规则，将下面各个数据保留4位有效数字进行凑整：

原有数据	舍入后数据
3.14159	3.142
2.71729	2.717
4.51050	4.510
3.21550	3.216
6.378501	6.379
7.691499	7.691
5.43460	5.435

由于数字舍入而引起的误差称为舍入误差，按上述规则进行数字舍入，其舍入误差皆不超过保留数字最末位的半个单位。必须指出，这种舍入规则的第三条明确规定，被舍去的数字不是见5就入，从而使舍入误差成为随机误差，在大量运算时，其舍入误差的均值趋于零。这就避免了过去所采用的四舍五入规则时，由于舍入误差的累积而产生系统误差。

三、数据运算规则

在近似数运算中，为了保证最后结果有尽可能高的精度，所有参与运算的数据，在有效数字后可多保留一位数字作为参考数字，或称为安全数字。

1）在近似数加减运算时，各运算数据以小数位数最少的数据位数为准，其余各数据可多取一位小数，但最后结果应与小数位数最少的数据小数位相同。

例如，求 $2643.0+987.7+4.187+0.2354=?$

$$2643.0+987.7+4.187+0.2354\approx 2643.0+987.7+4.19+0.24$$
$$=3635.13\approx 3635.1$$

2）在近似数乘除运算时，各运算数据以有效位数最少的数据位数为准，其余各数据要比有效位数最少的数据位数多取一位数字，而最后结果应与有效位数最少的数据位数相同。

例如，求 $15.13\times 4.12=?$

$$15.13\times 4.12=62.3356\approx 62.3$$

3）在近似数平方或开方运算时，平方相当于乘法运算，开方是平方的逆运算，故可按乘除运算处理。

4）在对数运算时，n 位有效数字的数据应该用 n 位对数表，或用（$n+1$）位对数表，以免损失精度。

5）三角函数运算中，所取函数值的位数应随角度误差的减小而增多，其对应关系如下表所示。

角度误差（″）	10	1	0.1	0.01
函数值位数	5	6	7	8

以上所述的运算规则，都是一些常见的最简单情况，但实际问题的数据运算皆较复杂，往往一个问题要包括几种不同的简单运算，对中间的运算结果所保留的数据位数可比简单运算结果多取一位数字。

习　题

1-1　研究误差的意义是什么？简述误差理论的主要内容。

1-2　试述测量误差的定义及分类，不同种类误差的特点是什么？

1-3　试述误差的绝对值与绝对误差有何异同，并举例说明。

1-4　什么叫测量误差？什么叫修正值？含有误差的测得值经修正后，能否获得被测量的真值？

1-5　测得某三角块的三个角度之和为180°00′02″，试求测量的绝对误差和相对误差。

1-6　在万能测长仪上，测量某一被测件的长度为50mm，已知其最大绝对误差为1μm，试问该被测件的真实长度为多少？

1-7　用二等标准活塞压力计测量某压力得100.2Pa，该压力用更准确的办法测得为100.5Pa，问二等标准活塞压力计测量值的误差为多少？

1-8　在测量某一长度时，读数值为2.31m，其最大绝对误差为20μm，试求其最大相对误差。

1-9　使用凯特摆时，g 由公式 $g=4\pi^2(h_1+h_2)/T^2$ 给定。今测出长度 (h_1+h_2) 为 (1.04230 ± 0.00005)m，振动时间 T 为 (2.0480 ± 0.0005)s。试求 g 及其最大相对误差。如果 (h_1+h_2) 测出为 (1.04220 ± 0.0005)m，为了使 g 的误差能小于 $0.001\mathrm{m/s^2}$，T 的测量必须精确到多少？

1-10　检定2.5级（即引用误差为2.5%）的全量程为100V的电压表，发现50V刻度点的示值误差2V为最大误差，问该电压表是否合格？

1-11　为什么在使用微安表等各种电表时，总希望指针在全量程的2/3范围内使用？

1-12　用两种方法分别测量 $L_1=50$mm，$L_2=80$mm。测得值各为50.004mm、80.006mm。试评定两种方法测量精度的高低。

1-13　多级弹道火箭的射程为10000km时，其射击偏离预定点不超过0.1km；在射击场中，优秀射手能在距离50m远处准确地射中直径为2cm的靶心，试评述哪一个射击精度高。

1-14　若用两种测量方法测量某零件的长度 $L_1=110$mm，其测量误差分别为±11μm和±9μm；而用第三种测量方法测量另一零件的长度 $L_2=150$mm，其测量误差为±12μm，试比较三种测量方法精度的高低。

1-15　某量值 y 由被测量 x 表示为 $y=4x-\dfrac{2}{x}$，若 x 的相对误差为1%时，求 y 的相对误差为多少？

1-16　如何根据测量误差的特点来减小或消除测量误差？

1-17　什么是有效数字及数字舍入有哪些规则？

1-18　根据数据运算规则，分别计算下式结果：

（1）$3151.0+65.8+7.326+0.4162+152.28=?$

（2）$28.13\times0.037\times1.473=?$

1-19　在测量实践中有效数字的作用以及它与测量精度的关系如何？试举例说明。

第二章　误差的基本性质与处理

任何测量总是不可避免地存在误差，为了提高测量精度，必须尽可能消除或减小误差，因此有必要对各种误差的性质、出现规律、产生原因、发现与消除或减小它们的主要方法以及测量结果的评定等方面，作进一步的分析。

第一节　随机误差

一、随机误差的产生原因

当对同一量值进行多次等精度的重复测量时，得到一系列不同的测量值（常称为测量列），每个测量值都含有误差，这些误差的出现又没有确定的规律，即前一个误差出现后，不能预定下一个误差的大小和方向，但就误差的总体而言，却具有统计规律性。

随机误差是由很多暂时未能掌握或不便掌握的微小因素所构成，主要有以下几方面：

（1）测量装置方面的因素

零部件配合的不稳定性、零部件的变形、零件表面油膜不均匀、摩擦等。

（2）环境方面的因素

温度的微小波动、湿度与气压的微量变化、光照强度变化、灰尘以及电磁场变化等。

（3）人员方面的因素

瞄准、读数的不稳定等。

二、正态分布

若测量列中不包含系统误差和粗大误差，则该测量列中的随机误差一般具有以下几个特征：

1）绝对值相等的正误差与负误差出现的次数相等，这称为误差的对称性。

2）绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的次数多，这称为误差的单峰性。

3）在一定的测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定界限，这称为误差的有界性。

4）随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值趋向于零，这称为误差的抵偿性。

最后一个特征可由第一特征推导出来，因为绝对值相等的正误差和负误差之和可以互相抵消。对于有限次测量，随机误差的算术平均值是一个有限小的量，而当测量次数无限增大时，它趋向于零。

服从正态分布的随机误差均具有以上4个特征。由于多数随机误差都服从正态分布，因而正态分布在误差理论中占有十分重要的地位。

设被测量的真值为 L_0，一系列测得值为 l_i，则测量列中的随机误差 δ_i 为

$$\delta_i = l_i - L_0 \tag{2-1}$$

式中，$i=1, 2, \cdots, n$。

正态分布的分布密度 $f(\delta)$ 与分布函数 $F(\delta)$ 为

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\delta^2/(2\sigma^2)} \tag{2-2}$$