普通高等学校省级规划教材

第2版

高等数学（上册）

费为银　王传玉　项立群　万上海　许　峰◎编著

Advanced Mathematics

中国科学技术大学出版社

普通高等学校省级规划教材

第2版

高等数学（上册）

费为银　王传玉　项立群　万上海　许　峰◎编著

Advanced Mathematics

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本《高等数学》分上、下两册出版，上册内容为：函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，向量代数与空间解析几何. 全书结构严谨，内容丰富，语言流畅，适合高等院校“高等数学”课程教学需要，也可供相关自学者、工程技术人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/费为银等编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015. 9
ISBN 978-7-312-03838-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. 费… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 195931 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
网址：http://press. ustc. edu. cn
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 18. 75
字数 488 千
版次 2009 年 9 月第 1 版 2015 年 9 月第 2 版
印次 2015 年 9 月第 8 次印刷
定价 32. 00 元

再版前言

数学是研究客观世界数量关系与空间形式的一门科学.高等数学因为科学技术的发展而有了更加丰富的内涵和外延,它内容丰富,理论严谨,应用广泛,影响深远,是高等学校中最重要的基础课之一.

本书以《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》和教育部非数学专业数学基础课教学指导委员会制定的最新《高等学校工科本科基础课教学要求》(数学部分)为依据,以"必需、够用"为原则确定内容和深度,参考近年《全国硕士研究生入学统一考试大纲》编写而成.

结合长期的教学实践经验,我们努力在本《高等数学》中体现以下特点:

(1) 直观性.对重要概念的引入重视其几何意义与实际背景,基本概念的叙述准确,基本定理的证明简明易懂,基本方法的应用详细易学.

(2) 应用性.注重高等数学的思想和方法在解决实际问题方面的应用,既培养学生抽象思维和逻辑思维能力,更培养学生综合利用所学知识分析和解决问题的能力.

(3) 通俗性.语言简明通俗,叙述详略得当,例题丰富全面,配备大量各种难度与类型的习题,增强可接受性,期望能较好地培养学生的自学能力.

(4) 完整性.注重与中学知识的衔接,增加了极坐标与参数方程的介绍,也注重本课程知识间的前后呼应,使结构更严谨;在深入挖掘传统精髓内容的同时,力争做到与后续课程内容的结合,使内容具有近代数学的气息.

(5) 方便性.优化部分章节的知识点顺序,使内容更紧凑,难点分散,也使教与学双方在使用上更方便,从讲述和训练两个层面体现因材施教的原则.

(6) 文化性.对重要的数学家与数学方法做了简单介绍,提高阅读兴趣的同时,也可对数学文化的传播产生潜移默化的影响.

本书是安徽省高等学校"十一五"省级规划教材,是安徽省精品课程"工科高等数学系列课程"的研究成果,分上、下两册出版.上册第1、2章由费为银、

许峰编写，第 3 章由王传玉编写，第 4、5、6 章由项立群编写，第 7 章由万上海编写；下册第 8 章由周金明编写，第 9、10 章由梁勇编写，第 11 章由王立伟编写，第 12 章由邓寿年编写. 全书由费为银统稿.

本次再版，我们采纳了一些教师的建议，对 2009 年第 1 版《高等数学》进行了重新编写，在内容处理、例题选择、习题设置方面进行了优化，尝试增加了部分实际问题与解答以及一些阅读材料，版式设计也做了进一步优化.

本书参考了众多专家学者编著的微积分教材与大学数学教材，在此谨向他们表示衷心的感谢.

限于编者水平，书中存在不妥之处与错误之处在所难免，欢迎广大专家、同行及读者批评指正.

编　者

2015 年 5 月

目录

再版前言 …… i

第1章　函数与极限 1

1.1　函数 …… 1

1.1.1　集合、常量与变量 …… 1

1.1.2　函数的定义 …… 2

1.1.3　函数的几种特性 …… 5

1.1.4　反函数与复合函数 …… 6

1.1.5　基本初等函数 …… 8

1.1.6　初等函数 …… 11

1.1.7　参数方程与极坐标 …… 15

习题1-1 …… 17

1.2　数列极限 …… 18

习题1-2 …… 22

1.3　函数极限 …… 22

习题1-3 …… 28

1.4　无穷小与无穷大 …… 29

1.4.1　无穷小 …… 29

1.4.2　无穷大 …… 29

习题1-4 …… 31

1.5　极限的运算法则 …… 32

习题1-5 …… 36

1.6　极限存在准则　两个重要极限 …… 37

习题1-6 …… 40

1.7　无穷小的比较 …… 41

习题1-7 …… 42

1.8　函数的连续性 …… 43

1.8.1　连续性概念 …… 43

1.8.2　间断点及其分类 …… 45

习题1-8 …… 46

1.9　连续函数的运算与闭区间上连续函数的性质 …… 47

1.9.1　连续函数的运算与初等函数的连续性 …… 47

1.9.2　闭区间上连续函数的性质 …… 48

习题1-9 …… 50

复习题1 …… 52

第2章 导数与微分 55

2.1 导数概念 …… 55
2.1.1 引例 …… 55
2.1.2 导数的定义 …… 56
2.1.3 求导数举例 …… 57
2.1.4 导数的几何意义 …… 59
2.1.5 函数的可导性与连续性的关系 …… 60
习题2-1 …… 61
2.2 函数的求导法则 …… 62
2.2.1 导数的四则运算 …… 62
2.2.2 反函数的导数 …… 64
2.2.3 复合函数的导数 …… 65
2.2.4 常用初等函数的导数公式 …… 67
习题2-2 …… 68
2.3 高阶导数 …… 70
习题2-3 …… 72
2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数相关变化率 …… 73
2.4.1 隐函数的导数 …… 73
2.4.2 由参数方程所确定的函数的导数 …… 75
2.4.3 相关变化率 …… 77
习题2-4 …… 77
2.5 函数的微分及其计算 …… 79
2.5.1 微分的定义 …… 79
2.5.2 微分的几何意义 …… 80
2.5.3 基本初等函数的微分公式与微分运算法则 …… 81
2.5.4 微分在近似计算中的应用 …… 83
习题2-5 …… 85
复习题2 …… 86

第3章 微分中值定理与导数的应用 88

3.1 中值定理 …… 88
3.1.1 罗尔定理 …… 88
3.1.2 拉格朗日中值定理 …… 89
3.1.3 柯西中值定理 …… 91
习题3-1 …… 92
3.2 洛必达法则 …… 93

习题 3－2 …… 95
3.3 泰勒公式 …… 96
习题 3－3 …… 99
3.4 函数单调性与曲线的凹凸性 …… 100
3.4.1 函数单调性的判定法 …… 100
3.4.2 曲线的凹凸与拐点 …… 102
习题 3－4 …… 104
3.5 函数的极值 最大值与最小值 …… 105
3.5.1 函数的极值及其求法 …… 105
3.5.2 最大值最小值问题 …… 107
习题 3－5 …… 110
3.6 函数图形的描绘 …… 111
习题 3－6 …… 115
3.7 曲率 …… 115
3.7.1 弧微分 …… 115
3.7.2 曲率及其计算公式 …… 116
3.7.3 曲率圆与曲率半径 …… 118
习题 3－7 …… 118
复习题 3 …… 119

第 4 章 不定积分 …… 122

4.1 不定积分的概念与性质 …… 122
4.1.1 原函数与不定积分的概念 …… 122
4.1.2 基本积分公式 …… 124
4.1.3 不定积分的性质 …… 125
习题 4－1 …… 127
4.2 换元积分法 …… 128
4.2.1 第一类换元法 …… 128
4.2.2 第二类换元法 …… 132
习题 4－2 …… 135
4.3 分部积分法 …… 136
习题 4－3 …… 140
4.4 几种特殊类型函数的积分 …… 141
4.4.1 有理函数的积分 …… 141
4.4.2 三角函数有理式的积分 …… 143
4.4.3 简单无理函数的积分 …… 144
习题 4－4 …… 145
4.5 积分表的使用 …… 146

习题 4-5 …… 147
复习题 4 …… 152

第 5 章 定积分 154

5.1 定积分的概念与性质 …… 154
5.1.1 引例 …… 154
5.1.2 定积分定义 …… 156
5.1.3 定积分的几何意义 …… 157
5.1.4 定积分的性质 …… 158
习题 5-1 …… 160
5.2 微积分基本公式 …… 162
5.2.1 变上限积分及其导数 …… 162
5.2.2 牛顿—莱布尼兹公式 …… 164
习题 5-2 …… 166
5.3 定积分的换元法和分部积分法 …… 169
5.3.1 定积分的换元法 …… 169
5.3.2 定积分的分部积分法 …… 172
习题 5-3 …… 173
5.4 反常积分 …… 175
5.4.1 无穷限反常积分 …… 175
5.4.2 无界函数的反常积分 …… 176
习题 5-4 …… 178
5.5 反常积分的审敛法 Γ 函数 …… 178
5.5.1 无穷限反常积分的审敛法 …… 178
5.5.2 无界函数反常积分的审敛法 …… 180
5.5.3 Γ 函数 …… 181
习题 5-5 …… 182
复习题 5 …… 185

第 6 章 定积分的应用 188

6.1 定积分的元素法 …… 188
6.2 定积分在几何学上的应用 …… 189
6.2.1 平面图形的面积 …… 189
6.2.2 体积 …… 193
6.2.3 平面曲线的弧长 …… 196
习题 6-2 …… 199
6.3 定积分在物理学上的应用 …… 200
6.3.1 变力沿直线所做的功 …… 200

6.3.2 水压力 …… 202
6.3.3 引力 …… 203
习题 6-3 …… 204
复习题 6 …… 208

第 7 章 向量代数与空间解析几何 210

7.1 向量及其线性运算 …… 210
7.1.1 空间直角坐标系 …… 210
7.1.2 向量的线性运算 …… 212
7.1.3 向量的坐标、向量的模与方向余弦 …… 214
习题 7-1 …… 218
7.2 向量的乘积 …… 219
7.2.1 两向量的数量积 …… 219
7.2.2 两向量的向量积 …… 220
7.2.3 向量的混合积 …… 222
习题 7-2 …… 223
7.3 空间中的平面和直线 …… 224
7.3.1 空间中的平面 …… 224
7.3.2 空间中的直线 …… 228
习题 7-3 …… 231
7.4 空间中的曲面和曲线 …… 232
7.4.1 几种常见的空间曲面 …… 232
7.4.2 空间曲线 …… 238
习题 7-4 …… 240
复习题 7 …… 242

习题解答与提示 …… 243
附录 1 二阶和三阶行列式简介 …… 275
附录 2 常用积分表 …… 280
参考文献 …… 287

LESSON 01

第1章 函数与极限

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，也是高等数学的主要研究对象．本章将在中学数学的基础上，进一步阐明函数的一般定义、函数的简单性质以及与函数概念有关的一些基本知识，进而引入极限这一重要概念，它将贯穿高等数学的始终．本章是微积分的基础．

1.1 函 数

1.1.1 集合、常量与变量

1．集合

所谓**集合**或**集**就是指一些特定事物的全体，其中各个事物称为这个集的**元素**．我们常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集中的元素．如果 a 是集 A 的元素，则称 a **属于** A，记作 $a\in A$，反之就称 a **不属于** A，记作 $a\notin A$．

例如含元素 a,b,c 的集合可表示为 $\{a,b,c\}$；$\{0,1,2,3\}$ 也可表示为 $\{n \mid n$ 是整数，$0\leqslant n\leqslant 3\}$．

全体自然数组成的集 $\{0,1,2,3,\cdots\}$ 称为**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$．

全体整数组成的集 $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$ 称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$．

全体有理数组成的集 $\{p/q \mid p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}$，且 $q\neq0\}$ 称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$．

全体实数组成的集称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$．

如果集 A 的元素只有有限个，则称 A 为**有限集**；不含任何元素的集称为**空集**，记作 $\varnothing$；一个非空集，如果不是有限集，就称为**无限集**．

如果集 A 中的元素都是集 B 中的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，读作 B **包含** A 或 A **包含于** B．规定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集．如果集 A 与集 B 中的元素相同，即 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$．

本课程是在实数范围内研究函数，经常用到实数集 $\mathbf{R}$ 的两类特殊子集——区间与邻域．

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，我们把 $\mathbf{R}$ 的两个子集 $\{x \mid a<x<b\}$ 和 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 分别称为以 a,b 为端点的**开区间**和**闭区间**，并分别记作 (a,b) 和 $[a,b]$．从几何上看，开区间

(a,b)表示数轴上以 a,b 为端点的线段上点的全体，而闭区间$[a,b]$则表示数轴上以 a,b 为端点且包括 a,b 两端点的线段上点的全体.如图 1-1 所示.

图 1-1

类似称$[a,b)$和$(a,b]$为半开半闭区间.此外还有无限区间，例如，$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$，$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x||x|<+\infty\}$.

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$.设 δ 是一正数，则称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}$$

其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

如果再把这个邻域的中心 a 点去掉，称它为 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|\ 0<|x-a|<\delta\}$$

2.常量与变量

自然界的现象无一不在变化之中，我们在考察某个自然现象、社会经济现象或生产过程时，常常会遇到一些不同的量，如长度、面积、体积、时间、速度、温度等.我们遇到的量一般可以分为两种：一种是在过程进行中一直保持不变，这种量称为**常量**；另一种是在过程中不断变化，这种量称为**变量**.例如，一个物体做匀速直线运动，则速度是常量，而时间与位移都是变量.又如，一块金属圆板，由于热胀冷缩，在受热的过程中它的半径与面积在不断变大，冷却时又不断变小.因此，这圆板的半径与面积都是变量.但在整个过程中，面积与半径的平方之比，即圆周率 π 始终不变，是一个常量.

通常用字母 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示常量，用字母 $x,y,z,t,u,v,\cdots$表示变量.

1.1.2 函数的定义

在具体研究某一自然现象或实际问题的过程中，我们还会发现问题中的变量并不是独立变化的，它们之间往往存在着相互依赖关系.

例 1 自由落体问题.

一个自由落体，从开始下落时算起经过的时间设为 t(s)，在这段时间中落体下落的距离设为 s(m).只考虑重力对落体的作用，而忽略空气阻力等其他外力的影响，由物理学知识知道 s 与 t 相依关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定，其中 g 为重力加速度(在地面附近它近似于常数，通常取 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$).

如果落体从开始下落到着地所需的时间为 T，则变量 t 的变化范围(或称变域)为 $0\leqslant t\leqslant T$.当 t 在变域内任取一值时，可求出 s 的对应值.

例 2 图 1-2 是气温自动记录仪描出的某一天的温度变化曲线，它给出了时间 t 与

气温 T 之间的依赖关系.

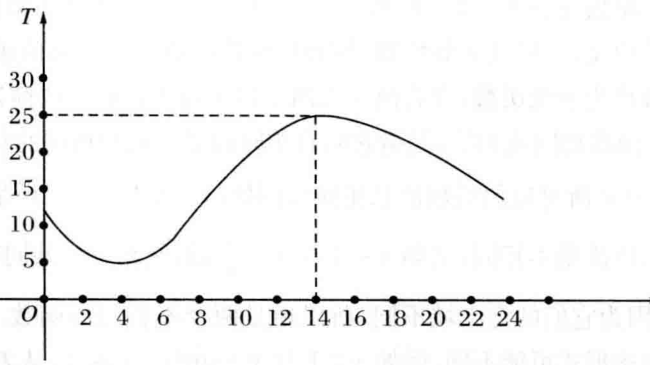

图 1-2

时间 t(小时)的变域是 $0\leqslant t\leqslant 24$,当 t 在这范围内任取一值时,根据图 1-2 中的曲线可找出气温的对应值.例如 $t=14$ 时,$T=25$ ℃,为一天中的最高温度.

以上的两个例子所描述的问题虽不相同,但却有共同的特征:它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系,当一个变量在它的变域中任取定一值时,另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之对应.把这种确定的依赖关系抽象出来,就是函数的概念.

定义 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集,f 是一个对应法则.如果对于 D 中的每一个 x,按照对应法则 f,总有唯一的实数 y 与之对应,则称 f 为定义在D 上的**函数**.集 D 称为函数 f 的**定义域**,与 D 中 x 相对应的 y 称为f 在 x 的**函数值**,记作 $y=f(x)$.全体函数值的集 $W=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数$f$ 的**值域**.如果把 x,y 分别看作D,W 中的变量,则称 x 为**自变量**,y 为**因变量**.

关于函数概念,我们做以下几点说明:

(1) 函数 f 与函数值$f(x)$是两个截然不同的概念.前者是确定自变量 x 与因变量 y 之间数值对应关系的一个法则,后者表示函数 f 在x 的值.但是,经常我们说 $f(x)$是一个函数,这要理解为 x 是变量.

(2) 表示一个函数,除了给出对应法则外,还应标明它的定义域,这是函数的两大要素.如果提出一个函数,它的对应法则由数学式子给出,且未标明定义域时,其含义是它的定义域就是使得这个式子有意义的自变量 x 全体之集,这样的定义域称为**自然定义域**,可以省略不写.在实际问题中,函数的定义域往往要受到具体条件的限制.我们把由实际问题所确定的函数定义域称为**实际定义域**.

(3) 根据函数的定义,对于定义域中的任一 x 值,函数 $y=f(x)$仅有一个确定的值与之对应.如果在函数定义中,允许同一个 x 值,可以有几个甚至无穷多个确定的 y 值与之相对应,这样的函数称为**多值函数**.而相应地把仅有一个确定值与之对应的函数称为**单值函数**.例如,函数 $y=2x+1$ 是一个单值函数,而函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 则是多(双)值函数.

在一定条件下,多值函数可以分裂为若干个**单值支**.例如,双值函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$就可以分成两个单值支:$y=\sqrt{1-x^2}$和 $y=-\sqrt{1-x^2}$,从而把对多值函数的讨论转化为讨论它的各个单值支.今后凡未做特别说明时,所论函数都是指单值函数.我们把只含一个自变量的函数称为**一元函数**,含有两个或两个以上自变量的函数称为**多元函数**.

(4) 两个函数相同或相等,是指它们有相同的定义域和相同的对应法则(即在相同的定义域中,每个 x 所对应的函数值总相同).例如,$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$是不相同的两个函数,因为它们的对应法则不相同.又如 $y=1$ 与 $y=\frac{x}{x}$,虽然在它们共同有定义的范围内对应法则相同,但因为它们的定义域不同,所以也是两个不相同的函数.两个相同的函数,其对应法则的表达形式可能不同.例如 $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$,从表面形式上看不相同,但却是同一个函数.

(5) 最早给"函数(function)"下定义并使用符号"$f(x)$"的是欧拉(Euler,1707~1783,瑞士人,伟大的数学家之一,《欧拉全集》多达七十余卷),另外用 sin,cos 等表示三角函数,用 e 表示自然对数的底,用 $\sum$ 表示求和,用 i 表示虚数等,也都是欧拉提出并推广的,欧拉还把 0,1,e,π,i 这五个重要常数统一在一个令人叫绝的关系式中,即 $e^{\pi i}+1=0$."函数"这一中文译名由清朝数学翻译家李善兰给出.

函数的表示法就是用来确定函数的对应法则的方法.从上面所举的例子,我们看到:例 1 中函数的对应法则是用一个公式或者解析式来表示,这种表示法称为**解析法**;例 2 中函数的对应法则是通过坐标平面上的一段曲线来表示,这种表示法称为**图像法**.还有函数的对应法则用一张表格来表示,这种表示法称为**表格法**.

一般地,我们可以把函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 看作一个有序数对的集:

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

集 C 中的每一个元素在坐标平面上表示一个点,从而点集 C 就描出这个函数的**图形**(或**图像**).

以上表示函数的三种方法各有其特点,表格法可以直接查用;图像法来得直观;而解析法形式简明,便于做理论研究和数学计算."高等数学"课程偏重理论研究和数学计算,因此解析式理所当然成为我们今后表示函数的主要形式.

一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式来表示,通常称这种形式的函数为**分段函数**.例如,**符号函数**:

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

和**取整函数**:

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

都是分段函数.它们的图形分别如图 1-3 和图 1-4 所示.

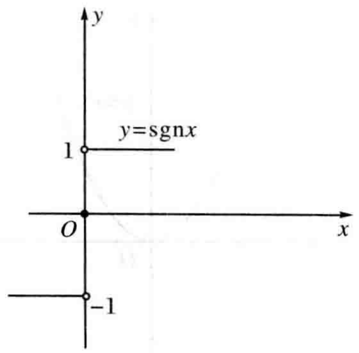

图 1-3

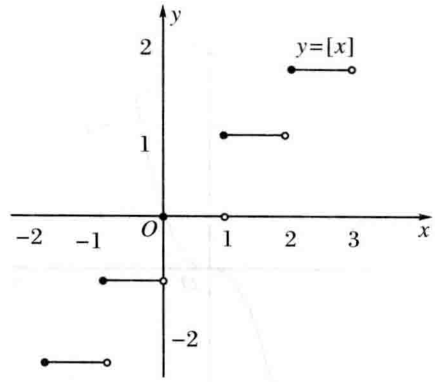

图 1-4

1.1.3 函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在集 D 上有定义,若存在常数 K_1(或 K_2),使对一切 $x\in D$,有 $f(x)\leqslant K_1$(或 $f(x)\geqslant K_2$),则称 $f(x)$ 在 D 上**有上界(或有下界)**.若存在正数 M,使对一切 $x\in D$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**.如果这样的 M 不存在,就称 $f(x)$ 在 D 上**无界**,即对任给的正数 M,总存在 $x_1\in D$,使 $|f(x_1)|>M$.

容易证明,函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是它在 D 上既有上界又有下界.

函数的有界性与集 D 有关.例如,$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界,因为存在 $M=1$,使对一切 $x\in[1,+\infty)$ 有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.但它在 $(0,1)$ 内却是无界的,因为对任给的正数 $M>1$,总存在 $x_1=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$,使 $|f(x_1)|=\left|\dfrac{1}{x_1}\right|=2M>M$.

一个函数如果在其定义域上有界,就称它为**有界函数**.有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.例如,$y=\sin x$ 是有界函数,因为在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内,$|\sin x|\leqslant 1$.又从图 1-5 不难看出,函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内仅有下界,它们都是**无界函数**.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在集 D 上有定义,如果对 D 中任意两个数 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在集 D 上**单调增加(或单调减少)**,简称**单增(或单减)**.若当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在集 D 上**严格单增(或严格单减)**.

单增和单减的函数统称为**单调函数**,严格单增和严格单减的函数统称为**严格单调函数**.例如,函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单增的,而函数 $g(x)=x^2$ 在区间

$(-\infty,0]$上严格单减,在区间$[0,+\infty)$上严格单增,但在整个区间内却不是单调的(图1-5).

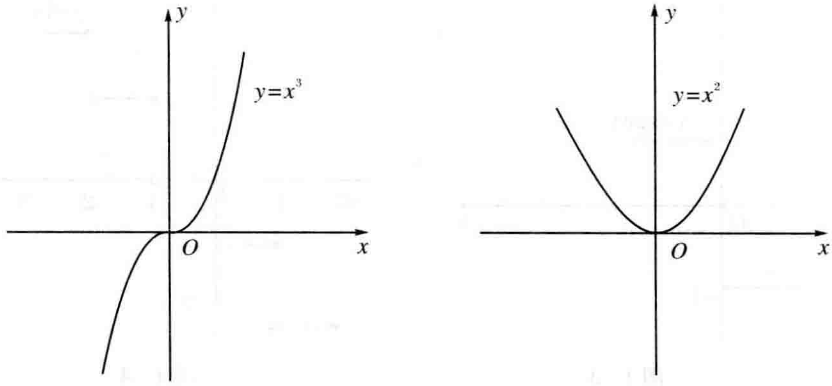

图1-5

3.奇偶性

设 $y=f(x)$, $x\in D$,其中 D 关于原点对称,即当 $x\in D$ 时,有 $-x\in D$.如果对任意 $x\in D$,总有 $f(-x)=-f(x)$ (或 $f(-x)=f(x)$),则称 $f(x)$为**奇函数**(或**偶函数**).

例如,$f(x)=x^3$ 是奇函数,$g(x)=x^2$ 是偶函数.又如三角函数中,正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数,余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数,而 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数.在坐标平面上,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

4.周期性

设函数 $y=f(x)$, $x\in D$,若存在常数 $l\neq 0$,使对任意 $x\in D$,总有 $x+l\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$,则称 $f(x)$为**周期函数**,l 称为$f(x)$的一个**周期**.

显然,若 l 为$f(x)$的一个周期,则 $kl(k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$也都是它的周期.所以一个周期函数一定有无穷多个周期.通常所说周期函数的周期是指**最小正周期**.例如,函数 $y=x-[x]$是周期为1的周期函数.又如三角函数中,$\sin x$ 和 $\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数,$\tan x$ 和 $\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

但并非任何周期函数都有最小正周期.例如,常量函数 $f(x)=C$ 是周期函数,任何实数都是它的周期,因而不存在最小正周期.

周期函数的图形在每个区间$[x+kl,x+(k+1)l]$上都是一样的,其中 k 为任意整数,x 为x 轴上任意一点.

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 W.若对 W 中每一值y_0,D 中必有一个值 x_0,使 $f(x_0)=y_0$,则令 x_0 与 y_0 相对应,便可在 W上确定一个函数,称此函数为函数 $y=f(x)$的**反函数**,记作 $x=f^{-1}(y)$, $y\in W$.相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$来说,原来的函数 $y=f(x)$称为**直接函数**.

由定义可知,反函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域和值域分别是它的直接函数 $y=f(x)$的值

域和定义域.因此也可以说两者互为反函数,几何上它们表示同一条曲线.例如,函数 $y=x^3$ 的反函数是 $x=\sqrt[3]{y}$.

我们所说的函数总是指单值函数,在这个意义上,并不是任何一个函数都有反函数的.例如,$y=x^2$ 就没有(单值)反函数,因为对值域$[0,+\infty)$上任一正数 y,在其定义域$(-\infty,+\infty)$内有两个互为相反数的 x 值与之对应.但如果把 x 限制在$[0,+\infty)$上取值,则有反函数 $x=\sqrt{y}$,即 $x=\sqrt{y}$是函数$y=x^2$,$x\in[0,+\infty)$的反函数,称它为 $y=x^2$ 的一个单值支,另一个单值支为 $x=-\sqrt{y}$(图 1-6).

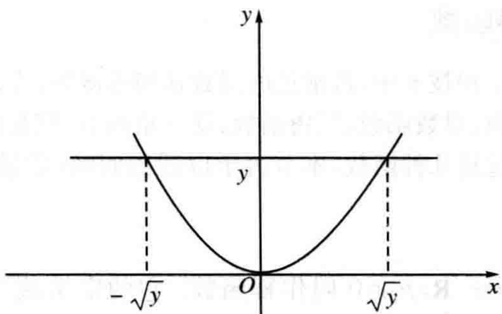

图 1-6

从图 1-6 得到启示,若函数的图形与任一平行于 x 轴的直线至多有一个交点,则它有(单值的)反函数.严格单调函数就具有这种特性.

习惯上,我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,于是 $y=f(x)$,$x\in D$ 的反函数可改写为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in W$$

容易知道,在同一坐标平面内,$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线 $y=x$ 对称的(图 1-7).利用这个性质,由 $y=f(x)$的图形容易作出它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形.

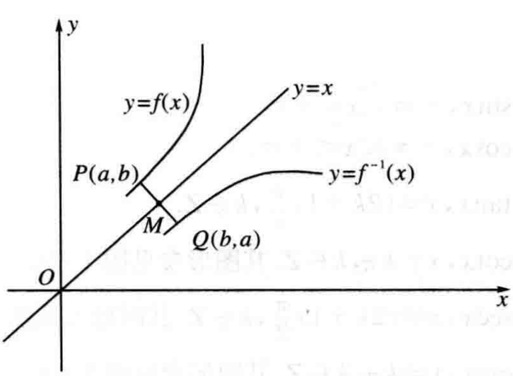

图 1-7