“十三五”普通高等教育本科规划教材

线性代数

张　杰　邢丽君　主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

“十三五”普通高等教育本科规划教材

线性代数

主　编　张　杰　邢丽君
副主编　禹海兰　郭丽杰
编　写　徐　屹　刘洪伟　林　彤
主　审　曲忠宪

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为“十三五”普通高等教育本科规划教材。

全书共7章，包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、线性空间等内容。各章末附有习题，最后还有6个附录，仅供参考。本书概念清楚，重点突出，层次清晰，说理浅显，例题、习题内容丰富，难度适中，适合自学。

本书可作为普通高等教育本科类学校的教材。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/张杰，邢丽君主编. —北京：中国电力出版社，2015.8

“十三五”普通高等教育本科规划教材

ISBN 978-7-5123-8090-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… ②邢… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第169061号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号 100005 http://www.cepp.sgcc.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2015年8月第一版 2015年8月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 12.25印张 293千字

定价 **25.00** 元

前　言

线性代数是讨论矩阵理论、有限维向量空间理论、线性变换理论和有限维线性方程组的一门学科。它是我国高等院校非数学专业的重要基础课，也是我国硕士研究生入学考试统考课程内容之一。

由于线性代数在数学、力学、物理学和工程技术学科中有着广泛的应用，因而在各种代数分支中占据重要地位。在计算机广泛应用的今天，计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术无不以线性代数为其理论和算法基础的一部分。而随着计算机科学的日益发展，非线性问题高精度地线性化与大型线性问题的可计算性正在逐步实现，使用线性观点看待问题，并运用线性代数的语言描述、解决问题，是数学在工程学中最主要的应用之一。同时，线性代数自身所体现的几何观念与代数方法之间的联系，从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等，对于强化人们的数学能力，增强科学思维也是不无裨益的。

本书以线性代数在实际中的应用为出发点和最终目标，将其定位为：

工具书——通过本教材，学生接受基础的线性代数训练，掌握基本的线性代数概念、理论和解题方法。

启发者——通过本教材，将计算方法的相关思想有机地融入教学内容，启发学生思考《线性代数》课程与实际问题的联系以及解决实际问题的方式。

推动力——通过本教材，强化问题推动线性代数教学，并将相关内容纳入数学实验，推动数学建模和动手能力的培养。

本教材在编者多年的教学改革与实践的基础之上编写而成，限于编者水平，教材中疏漏之处在所难免，恳请各位专家、同行以及广大读者批评指正。

编　者

2015 年 8 月

目　录

第1章 行 列 式

行列式实质上是由一些数值排列成的数表按一定的规则计算得到的一个数. 行列式的概念是人们从解线性方程组的需要中建立起来的，它是解决各类代数问题不可缺少的工具，在数学、物理、工程技术等诸多领域中都有广泛的应用. 在本课程中，行列式是研究矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组的一种重要工具.

本章主要介绍行列式的定义、性质、行列式的展开定理、求解线性方程组的 Cramer 法则以及行列式在解析几何等方面的应用 .

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 2 阶、3 阶行列式

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，由消元法求得的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆，引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称为 2 阶行列式，用来表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称 $a_{ij}(i,j = 1,2)$ 为这个行列式的元素 . a_{ij} 的两个下角标 i,j 表示 a_{ij} 所在的行和列的序号，分别称为行标和列标 .

如果把 a_{11},a_{22} 的连线称为主对角线，把 a_{12},a_{21} 的连线称为次（副）对角线，则 2 阶行列式的值等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积，这种算法称为对角线法则.

由 2 阶行列式的定义，二元一次方程组（1.1）的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

由消元法可以得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$$

当 x_1 的系数不为零时，可解得 x_1 的值．为便于记忆，引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，称为3阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

由3阶行列式定义，三元一次方程组（1.2）的解可表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$，其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

1.1.2 排列与逆序数

为了由2阶、3阶行列式的定义引出 n 阶行列式的定义，介绍排列与逆序数的概念．

定义1.1 若把 n 个互异的元素排成一列，称为这 n 个元素的一个全排列（简称排列）．n 个互异元素的排列共有 $n!$ 种．

为了方便，今后把自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 视为 n 个不同元素的代表．用 p_i 表示这 n 个数中的一个元素（$i=1,2,\cdots,n$），且当 $i\neq j$ 时 $p_i\neq p_j$，于是 $p_1p_2\cdots p_n$ 便是 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列．对排列 $p_1p_2\cdots p_n$，我们把排在 p_i 前面且比 p_i 大的数的个数 t_i 称为 p_i 的逆序数，把这个排列中各元素的逆序数之和

$$t_1+t_2+\cdots+t_n$$

称为这个排列的逆序数．排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$．

【例1-1】 求下列排列的逆序数：

(1) 32541；　　　　(2) 42153．

解 （1）在排列32541中：

1）3排在首位，故3的逆序数是0；

2）2的前面比2大的数有一个（3），故2的逆序数是1；

3）5是最大的，故5的逆序数是0；

4）4的前面比4大的数有一个（5），故4的逆序数是1；

5）1的前面比1大的数有四个（3，2，5，4），故1的逆序数是4.

于是，这个排列的逆序数为

$$\tau(32541)=0+1+0+1+4=6$$

(2) 同理 $\tau(42153)=0+1+2+0+2=5$.

通常把逆序数是奇数的排列称为奇排列，逆序数是偶数的排列称为偶排列.

如 32541 是偶排列，42153 是奇排列. 排列 $123\cdots n$ 的逆序数是 0，故它是偶排列，称此排列为标准排列（或自然排列）.

1.1.3 n 阶行列式的定义

由 3 阶行列式的定义可以看出：

(1) 3 阶行列式的每一项都是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积；

(2) 当每项中各元素的行标都取标准排列时，其列标都是 1，2，3 的一个排列，且每一个排列都对应 3 阶行列式的一项，所以 3 阶行列式共有 3! 项；

(3) 对于形如 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的项，其正负符号与它的列标的排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数间有以下关系：当 $\tau(p_1p_2p_3)$ 为奇数时，该项取负号；当 $\tau(p_1p_2p_3)$ 为偶数时，该项取正号.

将其推广可得出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和，各项的符号：当该项各元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列，则取正号；若对应的列标构成的排列是奇排列，则该项取负号. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中“$\sum$”表示对 $p_1p_2\cdots p_n$ 的所有排列取和. 也可把行列式简记为 $\Delta(a_{ij})$. 有时也将 n 阶行列式记为 D_n.

当 $n=2,3$ 时，就是前面定义的 2、3 阶行列式，当 $n=1$ 时，规定一阶行列式 $|a|=a$.

【例 1-2】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 这是一个 4 阶行列式，在展开式中应有 $4!=24$ 项. 但在每项 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 中，只要有一个元素等于零，该项就是零，所以只需计算不含零元素的项.

由于第一行中除 a_{11} 外其他元素都是零，所以 D 中除

$$(-1)^{\tau(1p_2p_3p_4)}a_{11}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} \tag{1.3}$$

外，其他项都是零. 又由于第二行中除 a_{21}, a_{22} 外其他元素都是零，而在 (1.3) 项中，不能

取 $p_2=1$，这是由于 a_{11} 与 a_{21} 是同列元素，所以 D 中不等于零的项只能是

$$(-1)^{\tau(12p_3p_4)}a_{11}a_{22}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

如此继续下去，可知 D 中不等于零的项只能是

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

由定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

推广到 n 阶行列式，有 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

这种主对角线（从左上角到右下角这条线）以上（下）的元素都是 0 的行列式，称为下（上）三角行列式.

同理，可求得上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地

$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n$. 称该行列式为对角行列式.

1.2 行列式的性质

因为 n 阶行列式共有 $n!$ 项，故用定义计算高阶行列式计算量较大. 本节将介绍行列式的性质，并利用行列式的性质计算行列式. 为进一步研究 n 阶行列式的性质，先讨论对换的概念.

1.2.1 对换

定义 1.3 在一个排列中，将某两个数的位置对调（其他数不动）的变动称为一个对换. 两个相邻数的对换称为相邻对换.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然 $a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 a,b 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$，把它做 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性不同.

推论 1.1 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1 可知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列，因此推论 1.1 成立.

1.2.2 *n* 阶行列式的性质

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ & & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式. 有时也将 D^{T} 写为 D'.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等.

证 设 D^{T} 的 i 行 j 列元素为 $b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$b_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

由行列式定义有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n} \end{aligned}$$

其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 将乘积项 $a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$ 中元素的次序调整，得到乘积项 $a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$. 这相当于在各元素的第一个下标组成的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经过若干次对换变成自然排列的同时，其第二个下标组成的自然排列变成新的排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 根据定理 1.1 的推论可知，$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$. 故有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}=D. \end{aligned}$$

由此性质可知，在行列式中，行与列具有相同的地位，因此凡是有关行的性质对列也同

样成立.

性质 1.2 互换行列式的任意两行（列），行列式改变符号.

证 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中，D_1 是交换 D 的 i,j 两行得到的. 令 $b_{ik}=a_{jk}(k=1,2,\cdots,n)$，$b_{jk}=a_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

由定理 1.1 可知

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}=-(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}$$

故 $$D_1=-\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

推论 1.2 若行列式 D 中有两行（列）元素相同，则此行列式等于 0.

证 把元素相同的两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 1.3 若行列式中某行（列）元素有公因数 k，则 k 可以提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由行列式定义

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= k\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

推论 1.3 若行列式中有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式等于 0.

【例 1-3】 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$，求 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -6a_{21} & -3a_{22} & -3a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -6a_{21} & -3a_{22} & -3a_{23} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -3a_{21} & -3a_{22} & -3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= 2\times(-3)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -12.$$

性质 1.4 若行列式的某一行（列）元素都是两数之和，例如第 i 行的元素都是两数之和：
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
则 D 等于以下两个行列式之和
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.5 把行列式的某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，行列式的值不变.

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用这些性质可以简化行列式的计算，为清楚起见，交换行列式 i,j 两行（列），记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$；行列式第 i 行（列）乘以 k，记为 $kr_i(kc_i)$；以数 k 乘行列式第 i 行（列）加到第 j 行（列）上，记为 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

【例 1-4】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \end{vmatrix}$.

解

$$D\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+r_1}}\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&2&-1\\0&0&2&-4\\0&1&-2&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_2}\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\0&-1&2&-1\\0&0&2&-4\\0&0&0&4\end{vmatrix}=1\times(-1)\times2\times4=-8$$

【例 1-5】 证明

$$\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}=0.$$

证

$$\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}\xlongequal[c_2-c_1]{\substack{c_4-c_3\\ c_3-c_2}}\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2a+3&2a+5\\b^2&2b+1&2b+3&2b+5\\c^2&2c+1&2c+3&2c+5\\d^2&2d+1&2d+3&2d+5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3}\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2&2\\b^2&2b+1&2&2\\c^2&2c+1&2&2\\d^2&2d+1&2&2\end{vmatrix}=0$$

【例 1-6】 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\ & & &\vdots& \\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}.$$

解

$$D_n\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&a&a&\cdots&a\\x+(n-1)a&x&a&\cdots&a\\ & & &\vdots& \\x+(n-1)a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$=\!=\!=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&x&a&\cdots&a\\ & & &\vdots& \\1&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_n-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \cdots}}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&x-a&0&\cdots&0\\ & & &\vdots& \\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=\!=\!=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

【例 1-7】 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \\ n & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}.$$

解 $$D_n \xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & \\ n & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

1.3 行列式展开定理

一般来说，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便，为此，引入行列式的余子式和代数余子式的概念 .

1.3.1 行列式按一行（列）展开定理

定义 1.4 在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，且其余元素仍按原相对位置排列所得的 $n-1$ 阶行列式 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式，并称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式 .

例如 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 中，元素 $a_{23}=2$ 的余子式及代数余子式分别为

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

引理 1 如果 n 阶行列式 D 中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都是零，那么行列式 D 等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积，即

$$D = a_{ij}A_{ij}$$

证 先证 a_{ij} 位于第 n 行第 n 列的情形，此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

由于只有 $p_n = n$ 时，a_{np_n} 才可能不为 0，于是

$$D = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_{n-1} n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1,p_{n-1}} a_{nn}$$

$$= a_{nn} \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_{n-1} n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{n-1,p_{n-1}}$$
$$= a_{nn} M_{nn} = a_{nn} A_{nn}$$

再证一般情形，此时

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n-i)+(n-j)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ & & & \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}$$

$$= a_{ij}\left[(-1)^{(n-i)+(n-j)} M_{ij}\right] = a_{ij}\left[(-1)^{i+j} M_{ij}\right] = a_{ij} A_{ij}$$

定理 1.2 行列式等于它的任一行（列）的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, i = 1,2,\cdots,n;$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, j = 1,2,\cdots,n.$$

证 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1,2,\cdots,n;$$

同理，可证

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

推论 1.4 行列式任一行（列）的所有元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零．即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n;$$
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n.$$

证　把行列式 D 按第 j 行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在上式中把 a_{jk} 换成 $a_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$，可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $i\neq j$ 时，上式右端行列式中有两行元素对应相同，故此行列式为零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j$$

同理按列展开，可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j$$

综合定理 1.2 及推论 1.4，有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j;\end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j;\end{cases}$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j, \\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$

【例 1-8】　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

解　$D\xlongequal[c_1-2c_3]{c_4+c_3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & -3 & -6 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & 1 \\ 7 & -5 & -6 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -16 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & -6 \end{vmatrix}=-16\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}=-16.$$

【例 1-9】　计算行列式