普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析

下册

主编◎盛炎平

副主编◎田茹 杨洁

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材

数学分析

下 册

主　编　盛炎平

副主编　田　茹　杨　洁

参　编　苏　农　张丹萍

孙　妍　陈　鑫

雷纪刚　黄静静

机械工业出版社

本书的编写注重数学分析理论、方法和实例的有机结合，力求做到以例示理，以题示法，注重广度和梯度，达到从一题到一类，从一类到一系列的效果. 本书内容选取适当，结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂，便于自学，同时注意吸收当前教材改革中成功的改革举措，使得所编教材更能适合当前教学的需要，适应时代的要求，体现创新的教学理念，有利于提高学生的综合素质和创新能力，成为既适应时代要求、符合改革精神，又继承传统优点的教材. 本书内容包括数项级数、函数列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数定理及其应用、含参量积分、重积分、曲线积分、曲面积分等，各章配有习题，书末附有习题答案.

本书为高等学校数学相关专业的教学用书或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学分析. 下册/盛炎平主编. —北京：机械工业出版社，2015. 6
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-111-50840-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①盛… Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 154656 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：李永联 责任编辑：李永联 王 芳 陈崇昱
版式设计：霍永明 责任校对：佟瑞鑫
封面设计：马精明 责任印制：刘 岚
涿州市京南印刷厂印刷
2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 17. 5 印张 · 337 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-50840-3
定价：35.00 元

前言

众所周知，目前我国的高等教育已从精英化阶段进入了大众化阶段. 为了满足形势变化的需要，我们根据多年的教学改革经验编写了这套数学分析教材. 我们希望做到在新的起点上帮助读者夯实基础，巩固知识，掌握方法，提高能力，开阔视野，融会贯通. 本套教材注重理论、方法和实例的有机结合，力求以例示理，以题示法，同时注重选题的广度与梯度，力求从一题到一类，从一类到一系列，且内容选取适当，结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂.

本套教材的主要特色是，加强了一元微积分学的介绍，注重对读者分析思想和用专门的数学分析语言描述和解决数学问题的能力的培养，并对一元微积分学基本知识进行了概括和总结，指出了自变量趋于无穷大时函数极限与数列极限的联系，归纳总结了函数极限与数列极限的各种类型；强调了费马定理、罗尔定理、拉格朗日定理、柯西定理、泰勒（麦克劳林）公式等微分中值定理的内在关联，并总结归纳了各种微分中值定理所能解决的问题的类型；突出了二、三重积分，曲线积分，曲面积分等各种多元积分与定积分在本质上的联系，淡化了各种多元积分性质的叙述和证明，重点介绍了以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数及其在工程中的应用，而没有专门介绍以 2π 为周期的函数的傅里叶级数（事实上，我们将以 2π 为周期的函数的傅里叶级数当作了以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数的特殊情况）；压缩了含参变量积分、旋度和散度等不经常使用且不要求过多技巧的内容的介绍；弱化了某些定理烦琐的证明过程.

本套教材分上、下两册，上册包含实数的完备性理论和一元函数

微积分学，下册包含多元函数微积分学和级数理论. 各章均配有习题.

本书由盛炎平主编，编写分工如下：下册第 12 章和第 13 章由盛炎平、田茹编写，第 14 章和第 15 章由张丹萍编写，第 16 章由陈鑫编写，第 17 章由杨洁编写，第 18 章由孙妍编写，第 19 章到第 22 章由苏农编写，其中雷纪刚编写了第 19 章的习题. 黄静静负责全书的插图.

本书可作为高等学校数学相关专业的教学用书或教学参考书.

本书的编写得到了“北京市教育教学—人才培养模式创新试验—应用型人才培养模式试点改革”项目（项目号：pxm2013_014224_000076）的资助. 此外，机械工业出版社的编辑们对本书的出版也付出了辛勤的劳动，在此一并表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，错误之处在所难免，恳切希望广大读者批评指正.

编　者

目 录

前 言

第 12 章　数项级数 …… 1

12.1　级数的收敛与发散 …… 1

12.1.1　收敛与发散的概念 …… 1

12.1.2　收敛级数的性质 …… 3

习题 12.1 …… 4

12.2　同号级数 …… 5

习题 12.2 …… 12

12.3　变号级数 …… 13

习题 12.3 …… 19

12.4　绝对收敛级数的性质 …… 19

习题 12.4 …… 24

第 13 章　函数列与函数项级数 …… 25

13.1　函数级数的收敛域 …… 25

13.2　一致收敛的概念 …… 26

13.3　一致收敛的判别法 …… 30

13.4　函数列的一致收敛 …… 34

13.5　和函数的分析性质 …… 37

习题 13 …… 42

第 14 章　幂级数 …… 44

14.1　幂级数及其性质 …… 44

14.1.1　幂级数及其收敛性 …… 44

14.1.2　幂级数的运算性质及幂级数的和函数 …… 50

习题 14.1 …… 56

14.2　函数展开成幂级数 …… 57

14.2.1 泰勒级数 …… 57
14.2.2 初等函数的幂级数展开 …… 61
习题 14.2 …… 67
14.3 幂级数的应用 …… 67
14.3.1 幂级数在数值计算中的应用 …… 67
14.3.2 复变量的指数函数和欧拉公式 …… 71
习题 14.3 …… 73

第 15 章 傅里叶级数 …… 74

15.1 傅里叶级数及函数展开为傅里叶级数 …… 74
15.1.1 傅里叶级数的引入 …… 74
15.1.2 三角函数系的正交性 …… 76
15.1.3 函数展开成傅里叶级数 …… 77
习题 15.1 …… 90
15.2 复数形式的傅里叶级数与谱分析 …… 92
15.2.1 傅里叶级数的复数形式 …… 92
15.2.2 频谱分析 …… 97
习题 15.2 …… 99

第 16 章 多元函数的极限与连续 …… 100

16.1 平面点集与多元函数 …… 100
16.1.1 平面点集 …… 100
16.1.2 R^2上的完备性定理 …… 103
16.1.3 二元函数 …… 105
16.1.4 n 元函数 …… 106
习题 16.1 …… 107
16.2 二元函数的极限 …… 107
16.2.1 正常极限和非正常极限 …… 107
16.2.2 累次极限 …… 110
习题 16.2 …… 112
16.3 二元函数的连续性 …… 113
16.3.1 二元函数的连续性概念 …… 113
16.3.2 有界闭域上连续函数的性质 …… 115
习题 16.3 …… 117

第 17 章 多元函数微分学 …… 119

17.1 偏导数与全微分 …… 119

17.1.1 偏导数 …… 119
17.1.2 全微分 …… 121
17.1.3 高阶偏导数和高阶全微分 …… 124
17.1.4 全微分在近似计算中的应用 …… 126
习题 17.1 …… 127
17.2 多元复合函数求导数 …… 128
习题 17.2 …… 131
17.3 方向导数与梯度 …… 132
17.3.1 方向导数 …… 132
17.3.2 梯度 …… 134
习题 17.3 …… 134
17.4 泰勒公式与极值 …… 135
17.4.1 二元函数的泰勒公式 …… 135
17.4.2 极值 …… 136
习题 17.4 …… 142

第 18 章 隐函数定理及其应用 …… 144

18.1 隐函数 …… 144
18.1.1 一元隐函数 …… 144
18.1.2 多元隐函数 …… 145
习题 18.1 …… 147
18.2 隐函数组 反函数组与坐标变换 …… 147
18.2.1 隐函数组 …… 147
18.2.2 反函数组与坐标变换 …… 150
习题 18.2 …… 151
18.3 微分学在几何中的应用 …… 152
18.3.1 平面曲线的切线与法线 …… 152
18.3.2 空间曲线的切线与法平面 …… 153
18.3.3 曲面的切平面与法线 …… 155
习题 18.3 …… 156
18.4 条件极值 …… 157
习题 18.4 …… 161

第 19 章 含参变量积分 …… 162

19.1 定限含参变量常义积分 …… 162
习题 19.1 …… 165

19.2　变限含参量积分 …… 166
习题 19.2 …… 167
19.3　含参变量广义积分 …… 168
19.3.1　含参变量广义积分的一致收敛性 …… 168
19.3.2　含参变量广义积分的性质 …… 170
19.3.3　欧拉积分简介 …… 171
习题 19.3 …… 173

第 20 章　重积分 …… 175

20.1　二重积分 …… 175
20.1.1　二重积分的概念 …… 175
20.1.2　可积性定理及可积函数类 …… 176
20.1.3　二重积分的性质 …… 177
20.1.4　二重积分在直角坐标系下的计算 …… 178
20.1.5　二重积分的变量替换 …… 183
习题 20.1 …… 189
20.2　三重积分 …… 192
20.2.1　三重积分的概念 …… 192
20.2.2　三重积分在直角坐标系下的计算 …… 193
20.2.3　三重积分的换元公式 …… 195
习题 20.2 …… 199
20.3　重积分的应用 …… 200
20.3.1　曲面的面积 …… 200
20.3.2　重心 …… 202
20.3.3　转动惯量 …… 203
20.3.4　引力 …… 205
习题 20.3 …… 206

第 21 章　曲线积分 …… 207

21.1　第一型曲线积分（对弧长的曲线积分） …… 207
21.1.1　具有质量分布的曲线构件的质量问题 …… 207
21.1.2　第一型曲线积分的定义 …… 207
21.1.3　第一型曲线积分的性质 …… 208
21.1.4　第一型曲线积分的计算 …… 209
习题 21.1 …… 210
21.2　第二型曲线积分（对坐标的曲线积分） …… 211

21.2.1 力场对物体所做的功 …… 211
21.2.2 第二型曲线积分的概念及性质 …… 212
21.2.3 第二型曲线积分的计算 …… 213
21.2.4 两类曲线积分的关系 …… 216
习题 21.2 …… 217
21.3 格林公式及其应用 …… 218
21.3.1 连通区域与区域边界曲线的定向 …… 218
21.3.2 格林公式 …… 218
21.3.3 平面曲线积分与路径无关的条件 …… 223
习题 21.3 …… 227

第 22 章 曲面积分 …… 229

22.1 第一型（对面积的）曲面积分 …… 229
22.1.1 第一型曲面积分的概念和性质 …… 229
22.1.2 第一型曲面积分的计算 …… 230
习题 22.1 …… 232
22.2 第二型（对坐标的）曲面积分 …… 233
22.2.1 曲面的定向（侧）与投影 …… 233
22.2.2 第二型曲面积分的概念及性质 …… 234
22.2.3 两类曲面积分之间的关系 …… 236
22.2.4 第二型曲面积分的计算 …… 237
习题 22.2 …… 239
22.3 高斯公式 …… 240
22.3.1 向量场的通量及散度 …… 240
22.3.2 高斯公式定义 …… 241
22.3.3 第二型曲面积分与曲面无关的条件 …… 243
习题 22.3 …… 244
22.4 斯托克斯公式 …… 245

习题答案 …… 250

参考文献 …… 268

第12章 数项级数

12.1 级数的收敛与发散

初等数学知识告诉我们，有限个实数相加，其和一定存在，而无限个实数相加会出现什么样的结果呢？

例如：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$

$1+2+3+\cdots+n+\cdots$.

可见，对于“无限和”是要给予研究的.

12.1.1 收敛与发散的概念

定义 12.1 设有数列$\{u_n\}$，即

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots \tag{12-1}$$

将数列（12-1）的项依次用加号连接起来，则

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \text{ 或 } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \tag{12-2}$$

称为数项级数，简称级数，其中u_n称为级数（12-2）的通项或一般项.

级数（12-2）是一个未知的新概念，但这个新概念也不是孤立的，它与我们已知的有限个数的和联系着. 不难想到借助极限这个工具来实现从有限到无限的转化.

级数（12-2）的前n项的和，记为

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$$

称它为级数（12-2）的n项部分和. 显然，级数（12-2）对应着一个部分和数列$\{S_n\}$.

定义 12.2 若级数（12-2）的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = S$，则称级数（12-2）收敛，$S$ 是级数（12-2）的和．若 $\{S_n\}$ 是发散数列，则称级数（12-2）发散．

由此可见，级数的敛散性是借助于它的部分和数列的敛散性定义的．反之，数列的敛散性也可归结为级数的敛散性，事实上，设数列为 $\{S_n\}$，可得到

$$a_1 = S_1,\ a_2 = S_2 - S_1,\ \cdots,\ a_n = S_n - S_{n-1},\ n = 2,\ 3,\ \cdots$$

显然，$S_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，即数列 $\{S_n\}$ 的敛散性可归结为级数 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 的敛散性．

因此，研究收敛级数及其和是通过研究收敛数列及其极限来实现的．同时，级数是有限和的推广，这种新形式不是收敛数列及其极限的简单重复，它在处理不同形式的极限中具有更大的作用，并提供了新的工具．

例 12.1 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \tag{12-3}$$

的敛散性，其中 $a \neq 0$，q 是公比．

解 当 $q \neq 1$ 时，几何级数的部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

（i）当 $|q| < 1$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

此时级数（12-3）收敛，其和为 $\frac{a}{1-q}$.

（ii）当 $|q| > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$，级数（12-3）发散．

当 $q = 1$ 时，$S_n = na$，级数发散．

当 $q = -1$ 时，$S_{2k} = 0$，$S_{2k+1} = a$，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，级数发散．

总之，当 $|q| < 1$ 时，级数（12-3）收敛；当 $|q| \geqslant 1$ 时，级数（12-3）发散．

例 12.2 证明级数 $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$ 收敛，并求和．

证明 由于 $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$，因此，级数的部分和为

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$，所以，级数收敛，其和是1.

例 12.3 证明：调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是发散的.

证明 设调和级数的部分和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，已知数列 $\{S_n\}$ 是发散的，从而调和级数是发散的.

12.1.2 收敛级数的性质

基于级数与数列的关系，可以得出下面的定理.

定理 12.1（柯西收敛准则） 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^*$，$\forall n>N$，$\exists p\in\mathbf{N}^*$，有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

当 $p=1$ 时，即得到如下的推论.

推论 12.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

在例 12.3 中，$u_n=\frac{1}{n}\to0\,(n\to+\infty)$，但调和级数是发散的，因而推论 12.1 是级数收敛的必要条件. 由此可知，若级数的通项 u_n 不趋于 0，该级数必发散.

例 12.4 判断级数 $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$ 的敛散性.

解 级数的通项 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\neq0$，所以该级数发散.

依据定理 12.1 还可以得到如下推论.

推论 12.2 若添加、去掉或改变级数的有限项，不改变级数的敛散性.

根据数列极限运算定理，可得级数的运算定理.

定理 12.2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，其和是 S，则级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}cu_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收敛，其和是 cS，其中 c 是常数.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}cu_n$ 的部分和分别为 S_n 和 σ_n，有

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n$$

已知 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$，因此有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to+\infty} cS_n = cS$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} cu_n$ 收敛，其和是 cS.

定理 12.2 说明收敛级数满足数（非零常数）的分配律．类似地，可证明如下定理．

定理 12.3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛，其和分别是 S 和 σ，则级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n)$$

也收敛，其和是 $S \pm \sigma$.

利用收敛数列子数列的收敛性，还可得到收敛级数满足结合律．

定理 12.4 在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变其和．即若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛，其和是 S，则新级数

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \cdots + u_{n_2}) + (u_{n_{k-1}+1} + u_{n_{k-1}+2} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$$

也收敛，其和为 S.

需要指出的是，加括号后构成的级数收敛，但原级数不一定收敛．

例如：$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛于 0，但原级数 $1-1+1-1+\cdots$ 却是发散的．

习题12.1

1. 求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(1+n)}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\dfrac{n\pi}{6}$　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

2. 设 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，$n=1, 2, \cdots$，若已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ 也收敛.

3. 证明：若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{2k}$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛．

4. 证明：若 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = a > 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散．

5. 判断下列级数的敛散性：

(1) $-\dfrac{2}{5} + \dfrac{2^2}{5^2} - \dfrac{2^3}{5^3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{2^n}{5^n} + \cdots$

（2）$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$

（3）$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$

（4）$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{3n^n}{(1+n)^n}+\frac{1}{3^n}\right]$

6. 利用柯西准则判定下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

（2）$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$

（3）$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$

12.2　同号级数

定义 12.3　若 $u_n\geqslant 0(u_n<0$, $n=1, 2, \cdots$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 是正（负）项级数.

正项级数与负项级数统称为同号级数. 将负项级数每项乘以 -1, 负项级数就变成了正项级数. 根据定理 12.2, 负项级数与正项级数具有相同的敛散性. 于是, 讨论负项级数的敛散性可以归结为讨论正项级数的敛散性. 因此, 下面只讨论正项级数的敛散性及其敛散性的判别方法.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 是正项级数, 则此级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加, 即

$$S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots$$

根据“单调有界原理”, 有判别正项级数收敛性的定理如下.

定理 12.5　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛⇔它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

例 12.5　试证明正项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

是收敛的.

证明　$S_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

即部分和数列$\{S_n\}$有上界，则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$收敛．

根据定理 12.5，可得到关于正项级数的一个基本判别法．

定理 12.6（比较判别法） 有两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$，且$\exists N\in\mathbf{N}^*$，$\forall n>N$，有

$$u_n\leqslant cv_n$$

其中，c是正常数．

（1）若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$也收敛；

（2）若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$也发散．

证明 根据定理 12.1 的推论 12.2，改变级数前面有限个项并不改变级数的敛散性．因此，不妨设$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有

$$u_n\leqslant cv_n$$

设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$的$n$项部分和分别是$A_n$与$B_n$，由上述不等式，有

$$A_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant cv_1+cv_2+\cdots+cv_n=c(v_1+v_2+\cdots+v_n)=cB_n$$

（1）若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$收敛，根据定理 12.5，数列$\{B_n\}$有上界，从而数列$\{A_n\}$也有上界，再根据定理 12.5，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$收敛．

（2）若级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$发散，根据定理 12.5，数列$\{A_n\}$无上界，从而数列$\{B_n\}$也无上界，再根据定理 12.5，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$发散．

例 12.6 讨论正项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的敛散性，其中p是任意实数．此级数称为**广义调和级数**，或 **p 级数**．

解 广义调和级数的敛散性与数p有关，下面分三种情况讨论．

（ⅰ）当$p=1$时，广义调和级数就是调和级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$，已知调和级数发散，即广义调和级数发散．

（ⅱ）当$p<1$时，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有

$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$$

已知调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，根据定理 12.6，广义调和级数也发散.

（ⅲ）当 $p>1$ 时，利用数学归纳法，容易证明：$\forall n\geqslant 2$，有

$$\frac{1}{n^p}<\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

于是，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，有

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\\&\leqslant 1+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1^{p-1}}-\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right)+\cdots+\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]\\&=1+\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{1^{p-1}}-\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]\\&=1+\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

即广义调和级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，从而广义调和级数收敛.

综上所述，广义调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p\leqslant 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

例 12.7 判别下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$；(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

解 (1) $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{\sqrt{n(n^2+0)}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

已知广义调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\left(p=\frac{3}{2}>1\right)$ 收敛，根据定理 12.6，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 也收敛.

(2) $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$

已知广义调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，根据定理 12.6，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 也发散.

根据定理 12.6 有下面的推论.

推论 12.3 有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n\,(v_n\neq 0)$，且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=k\ (0\leqslant k<+\infty)$$