高等学校试用教材

数学分析

中册

吉林大学数学系编

高等教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

中册

吉林大学数学系编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据 1977 年 10 月理科数学教材编写大纲讨论会制定的"数学分析教材编写大纲"编写的．可作为综合性大学数学专业和计算数学专业的教材，也可供高等师范院校有关专业使用．

本书比较重视基础理论和分析技巧的讲述，在章节安排上，由浅入深，逐步展开，便于教和学。

全书分上、中、下三册．中册内容包括分析基础（再论极限和连续函数的性质）和级数理论．

高等学校试用教材

数学分析

中 册

吉林大学数学系编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义县印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张6,875 字数142,000

1978年4月第1版 1986年4月第3次印刷

印数430,001—433,620

书号13010.0178 定价0.76

目　　录

第Ⅳ篇 分析基础

本篇的任务，是要解决以前几篇中的遗留问题，对极限理论作进一步的研究，从而为今后的学习打下坚实的基础．由于这一篇主要是作理论上的探讨，所以，虽然几何上的直观仍然是考虑问题时的重要线索，但将要在更大的程度上，强调逻辑推理上的严谨．

第十章 再论极限

在前两篇中，大家已经学习了一元微积分学的基本内容．可以看出，微积分学的基础是极限理论．现在我们要回过头来对这个基础作进一步的讨论．

§1 为什么要重新讨论极限

我们在第三章中，已经学习过极限的概念．为什么现在又要重新讨论极限呢？

极限概念，本是从变量变化趋势的直观形象中抽象出来的．以前为了使它易于接受和理解，并且为了使大家能更快地接触和学习微分学与积分学，我们对极限概念只作了一些粗略的描述．这种描述是以直观和形象的语言为基础的，并没有从数量关系上，给极限概念以严格的定义．由于没有数量的分析和严谨的定义，使我们对一系列的问题，无法作出确切的回答．我们也没有建立过恰当的、可以用来判断一个变量是否有极限的准则．以至象

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 这样一个在微分计算中甚为重要的极限为什么存在，也一直没有给出任何论证. 同样，微积分学基本定理，是以凡连续函数皆可积这一论断为基础的，然而这一论断也是没有证明的. 这样一些遗留问题不解决，所建立起来的理论，基础就不牢固. 我们只要稍作分析，即可看到，过去遗留的所有问题，都直接或间接地和极限概念有关，因而自然而然地导致我们要对极限的问题作进一步的探讨.

微积分学也和其他的数学理论一样，是以实际的物理、几何模型为背景而产生发展起来的，因此它的一些基本概念的形成借助于直观的想象和描述是很自然的事. 但是随着理论的发展，考察的问题越来越复杂和深入，是非、对错的界线越来越细致. 判断一个结论是否成立，经常要作仔细的数量上的分析. 以直观和形象的语言，通过定性的描述而建立起来的极限概念的根本弱点，是它不便于作数量上的分析，所以理论本身的发展，向我们提出了把极限概念加以确切化的要求，这是需要重新讨论极限概念的第二方面的原因，而且是更主要的原因. 我们相信，大家在学完本篇和下一篇的材料后，就会对这点有亲身的体验.

我们学过的极限，有许多种类型：数列极限、函数极限、积分和的极限(定积分)，其中函数极限又分自变量趋于有限值的和自变量趋于无穷的两大类. 如果再详细分下去，还有自变量从定点的某一侧趋于这个点的所谓单边极限和没有这种限制的（双边）极限，$x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数的极限等等，真可以说是五花八门，头绪纷繁. 不过研究其实质，它们在本质上却是相互沟通的. 只要搞清楚了其中的一个，其余也就能触类旁通了. 由于数列极限是在各类极限中最简单的，所以，我们以下将从解剖数列极限的概念入手，在 § 6 中再转向函数极限的讨论，至于积分和的

极限，则将在第十一章 §5 中专门加以研究.

§2 数列极限的 ε-N 定义

按照我们以往的说法，所谓数列$\{y_n\}$当 $n\to\infty$ 时以定数 l 为极限，是指"当 n 无限地增大时，y_n趋于 l". 后面这句话，我们理解为："当 n 充分大时，y_n 与 l 可以任意靠近，要多近就能有多近"；就是说"要 y_n 与 l 多靠近，只需 n 增大到一定程度后，就能多靠近". 或者换个说法："当 n 充分大时，$|y_n-l|$ 可以任意小，要多小就能有多小"；就是说："要$|y_n-l|$多小，只需 n 增大到一定程度后，就能有多小". 数列极限的精确定义，无非就是把这句话说清楚、说确切.

先看几个例子.

例 1 考察数列$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\right\}$:

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots$$

当 $n\to\infty$ 时，它以零为极限. $\left|(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$ 要多小，只需 n 增大到一定程度后，就能有多小.

比方说要想$\left|(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<0.1$，只须 $n>\dfrac{1}{0.1}=10$；要想 $\left|(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<0.01$，只须 $n>\dfrac{1}{0.01}=100$；要想 $\left|(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<0.001$，只须 $n>\dfrac{1}{0.001}=1000$；要想 $\left|(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<0.0003$，只须 $n>\dfrac{1}{0.0003}=3333\dfrac{1}{3}$，也就是只须 $n>3333$. 这是因为 n 是正整数，如果它大于 3333，自

然也大于 $3333\frac{1}{3}$.

假如我们一般地提出一个要求：要想

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon \tag{1}$$

(ε 是任意给定的一个正数)，能不能达到呢？能，只须 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. $\frac{1}{\varepsilon}$不见得恰好是整数. 我们用$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$来代表$\frac{1}{\varepsilon}$这个数的整数部分. 由于比$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$大的正整数 n 显然也比$\frac{1}{\varepsilon}$大，因此，只须$n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，就能使(1)式成立.

总结以上的讨论，我们可以列出如下的一张表：

$\left\|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right\|=\frac{1}{n}<$	0.1	0.01	0.001	0.0003	$\varepsilon>0$
$n>$	10	100	1000	3333	$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

表中第一行表示$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|$“要多小”的要求，是由我们事先提出的，第二行回答为了达到这种要求，n 所须“增大的程度”.

我们看到，“$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$要多小，只须 n 增大到一定程度后，就能有多小”这句话的精确表达应该是：对于任意给定的正数 ε（它标志着“要多小”的要求），总可以找到这样的正整数 N（它标志着 n“增大的程度”），使得当 $n>N$ 时（n 增大到这个程度后），就有

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

（就能达到所提出的那个“要多小”的要求）.

所找到的正整数 N，其大小是依赖于给定的 ε 的. 以上我们

看到，当取 $\varepsilon=0.1$，0.01，0.001，0.0003 时，对应的正整数 $N=10$，100，1000，3333．一般说来，ε 给得越小，对应的正整数 N 就越大．我们常常记 $N=N_\varepsilon$ 以表明 N 对 ε 的依赖性．

上面我们是取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，其实取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 也可以，比 $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 大的任何正整数都可取作 N．这是很明显的，因为既然当 $n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 时(1)式成立，那末，当 $n>\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 时 (1) 式就更成立．可见与给定的正数 ε 对应的正整数 N 并不只一个．所以，重要的问题在于这样的正整数是否确实存在，至于究竟取哪一个，在我们这里是无关紧要的．

例 2 考察数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots$$

当 $n\to\infty$ 时，它以 1 为极限．$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$ 要多小，只须 n 增大到一定程度后，就能有多小．

比方说，要想

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<0.1$$

只须 $n+1>\frac{1}{0.1}=10$，即 $n>9$；要想

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<0.01$$

只须 $n+1>\frac{1}{0.01}=100$，即 $n>99$；要想

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<0.005$$

只须 $n+1>\frac{1}{0.005}=200$，即 $n>199$；要想

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<0.0014$$

只须 $n+1>\frac{1}{0.0014}=714\frac{2}{7}$，即 $n>713\frac{2}{7}$，显然也只须

$$n>\left[713\frac{2}{7}\right]=713$$

等等。

一般地说，要想

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

只须 $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$，显然这也只须

$$n>N=\max\left\{1,\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]\right\}$$

综上所述，我们也可以列出如下的一张表：

$\left\|\frac{n}{n+1}-1\right\|=\frac{1}{n+1}<$	0.1	0.01	0.005	0.0014	$\varepsilon>0$
$n>$	9	99	199	713	$N=\max\left\{1,\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]\right\}$

“$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|$要多小，只须 n 增大到一定程度后，就能有多小”这句话现在找到了精确的表达方式：对于任意给定的正数 ε，总可以找到这样的正整数 $N=N_\varepsilon$，使得当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

有了以上两个例子的分析，我们自然会推想到，对于一般的数列$\{y_n\}$，假如 l 是它的极限，那末，所谓“$|y_n-l|$要多小，只须 n 增大到一定程度后，就能有多小”就应该精确地表达成：对于任

意给定的正数 ε，总可以找到这样的正整数 $N=N_\varepsilon$，使得当 $n>N$ 时，有

$$|y_n-l|<\varepsilon$$

我们就以这种表达方式作为数列极限的精确定义：

定义 1 设$\{y_n\}$为一个数列，l 为一个定数. 如果对于任意给定的正数 ε，总可以找到这样的正整数 $N=N_\varepsilon$，使得当 $n>N$ 时，有

$$|y_n-l|<\varepsilon \tag{2}$$

就说数列$\{y_n\}$当 $n\to\infty$ 时以 l 为极限，或者说数列$\{y_n\}$收敛于 l，并且记为

$$\lim_{n\to\infty} y_n=l \quad 或 \quad y_n\to l \quad (n\to\infty)$$

如果数列$\{y_n\}$没有极限，就说它是发散的.

从几何上看，数列$\{y_n\}$对应于数轴上一串点，(2)式表示点 y_n 与点 l 的距离小于 ε. 任意给定了正数 ε，我们可在数轴上作出一个以点 l 为中心而长为 2ε 的开区间 $l-\varepsilon<x<l+\varepsilon$，即$|x-l|<\varepsilon$，通常称为点 l 的 ε-邻域. 当 $n>N$ 时(2)式成立，就表示：下标大于N的那些点 y_n 都将进入点 l 的 ε-邻域内(图 IV-1).

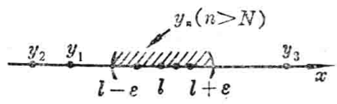

图 IV-1

假如数列$\{y_n\}$是某一个量的一串近似值，l 是这个量的精确值，则$|y_n-l|$表示第 n 个近似值的误差，而当 $n>N$ 时(2)式成立，就表示：算到第N步以后，误差就永远小于 ε 了.

应该看到，上述定义反映了人们通过有限去认识无限的辩证思想. y_n趋近于 l 的过程是一个无限接近的过程，但就这个过程中的每一步讲，接近又都是有限的. $|y_n-l|$趋于零的过程是一个无限变小的过程，但在这个过程中的每一个阶段，其变小的程度又

都是有限的（除非碰巧 $y_n=l$）. 有限与无限就是这样矛盾着. 那种按照静止的、孤立的观点来观察无限变化的过程，用有限简单地代替无限，或者把无限同有限对立起来，好象是互不相容的东西，都是形而上学. 我们又只能通过有限去认识无限.

给定了正数 ε 以后，一切都成了有限的东西，不等式 $|y_n-l|<\varepsilon$ 正表达了 y_n 与 l 之间的这种有限的接近程度. 但 ε 是任意给定的，要多小可以给定为多小. ε 取得越小，一般说，对应的 N 就越大. 这正是通过任取 ε，从有限过渡到无限.

例 3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} p^n=0\quad(0<p<1)$

分析　根据定义 1，就是要证明：对于任意给定的正数 ε，可以找到这样的正整数 $N=N_\varepsilon$，使得当 $n>N$ 时，有

$$|p^n-0|<\varepsilon$$

这样的 N 能不能找到呢？让我们来分析一下. 要想 $|p^n-0|=p^n<\varepsilon$，取一下对数，就得到 $n\ln p<\ln\varepsilon$，因为 $p<1$，所以 $\ln p<0$，因此，$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln p}$. 可见应该取 $N>\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln p}\right]$.

证明　任给正数 ε，取正整数 $N>\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln p}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln p}$，即 $n\ln p<\ln\varepsilon$，从而 $p^n<\varepsilon$，故 $|p^n-0|<\varepsilon$. 按定义 1，这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} p^n=0$.

例 4　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1\quad(a>1)$

分析　要想 $\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|=a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$（注意 $a^{\frac{1}{n}}>1$），即 $a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$，取对数得到 $\dfrac{1}{n}\ln a<\ln(1+\varepsilon)$，即 $n>\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$. 可见应该取

$N>\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$(注意 $\ln a>0$).

证明 任给正数 ε，取正整数 $N>\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $n>\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$，即 $\dfrac{1}{n}\ln a<\ln(1+\varepsilon)$，从而 $a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$，即 $|a^{\frac{1}{n}}-1|<\varepsilon$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$.

例 5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0 \quad (a>0)$

分析 要想 $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|=\dfrac{a^n}{n!}<\varepsilon$，先将 $\dfrac{a^n}{n!}$ 写成

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}$$

我们看到，右端的因子前面的大，后面的小，需要分开考虑. 假如从第 N_1 个因子处分开，则有

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{N_1}}{N_1!}\cdot\overbrace{\frac{a}{N_1+1}\cdot\frac{a}{N_1+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}}^{\text{共 } n-N_1 \text{ 个}}<\frac{a^{N_1}}{N_1!}\left(\frac{a}{N_1+1}\right)^{n-N_1}$$

$$=\frac{(N_1+1)^{N_1}}{N_1!}\left(\frac{a}{N_1+1}\right)^n \tag{3}$$

如果上式最右端小于 ε，$\dfrac{a^n}{n!}$ 就更小于 ε.

怎样才能使 $\dfrac{(N_1+1)^{N_1}}{N_1!}\left(\dfrac{a}{N_1+1}\right)^n<\varepsilon$ 呢？假如 $\dfrac{a}{N_1+1}<1$，则由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{N_1+1}\right)^n=0$ (例 3)，只要 n 充分大，$\left(\dfrac{a}{N_1+1}\right)^n$ 就可任意小. 要想 $\dfrac{a}{N_1+1}<1$，只须 $N_1+1>a$，即 $N_1>a-1$，因为 a 是常数，这是可以办到的.

现在取定一个正整数N_1，使$N_1>a-1$，从而$\frac{a}{N_1+1}<1$. N_1取定后，$\frac{(N_1+1)^{N_1}}{N_1!}$就是一个定数了．要$\frac{(N_1+1)^{N_1}}{N_1!}\left(\frac{a}{N_1+1}\right)^n<\varepsilon$，只须$\left(\frac{a}{N_1+1}\right)^n<\varepsilon\frac{N_1!}{(N_1+1)^{N_1}}$. 因为$\frac{a}{N_1+1}<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{N_1+1}\right)^n=0$，我们确实应该可以找到这样的正整数$N_2$，使得当$n>N_2$时，

$$\left(\frac{a}{N_1+1}\right)^n<\varepsilon\frac{N_1!}{(N_1+1)^{N_1}} \tag{4}$$

证明　对于任意给定的正数ε，我们先取定一个正整数$N_1>a-1$，从而$\frac{a}{N_1+1}<1$，因为a是常数，这是可能的．N_1取定以后，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{N_1+1}\right)^n=0$，可再取正整数$N_2$，使得$n>N_2$时(4)式成立．然后取$N=\max(N_1, N_2)$．当$n>N$时，首先因为$n>N_1$，我们可以得到估计式(3)，从而有

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{a^n}{n!}<\frac{(N_1+1)^{N_1}}{N_1!}\left(\frac{a}{N_1+1}\right)^n \tag{5}$$

其次，因为$n>N_2$，故(4)式成立，于是

$$\frac{(N_1+1)^{N_1}}{N_1!}\left(\frac{a}{N_1+1}\right)^n<\varepsilon \tag{6}$$

联合(5)，(6)就得到结论：当$n>N$时，有

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$$

这就证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

习　题

1. 根据定义1证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100}{n!}=0$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=0$

并填下表:

$\|y_n-l\|<$	0.1	0.01	0.001	ε
$n>$				

2. 下述几种说法与极限定义是否等价,并说明理由:

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 N, 当 $n\geqslant N$ 时, 有 $|y_n-l|\leqslant\varepsilon$。

(2) 存在自然数 N, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 当 $n\geqslant N$ 时, 有 $|y_n-l|<\varepsilon$.

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在实数 A, 当 $n\geqslant A$ 时, 有 $|y_n-l|<\varepsilon$.

(4) 对于 $0<\varepsilon<1$, 存在自然数 N, 当 $n>N$ 时, $|y_n-l|<\varepsilon$.

(5) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 有自然数 N, 当 $n>N$ 时, $|y_n-l|<K\cdot\varepsilon$, 其中 K 是与 ε 无关的常数.

(6) 对于任意正整数 m, 都有正整数 N, 使 $n\geqslant N$ 时, $|y_n-l|<\dfrac{1}{m}$.

3. 直接从定义 1 出发, 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}=0$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3q^n=0$ $(|q|<1)$

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|A|$.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足下面的条件:

$$|x_{n+1}|\leqslant K|x_n| \quad n=1, 2, \cdots$$

其中 $0<K<1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

6. 给出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 的精确定义, 并分别举例说明之.

§3　数列极限的一些基本性质的证明

下面我们要根据上述数列极限的定义，证明一系列命题．其中许多是在第三章§3中已经见过的，但是当时没有给出证明．

命题1　任何收敛数列（即有极限的数列）的极限都是唯一的．即如果 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$，则 $A=B$．

证明　用反证法．假定 $A\neq B$，不妨设 $A<B$．令 $\varepsilon_0=\dfrac{B-A}{2}$，则 $\varepsilon_0>0$．由于 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$．所以有 N_1 和 N_2，使 $n>N_1$ 时，

$$|y_n-A|<\varepsilon_0=\frac{B-A}{2} \tag{1}$$

$n>N_2$ 时，

$$|y_n-B|<\varepsilon_0=\frac{B-A}{2} \tag{2}$$

于是若取 $n_0>\max\{N_1,N_2\}$，则从(1)，(2)两式，得到

$$\frac{A+B}{2}=B-\frac{B-A}{2}<y_{n_0}<A+\frac{B-A}{2}=\frac{A+B}{2}$$

这是矛盾的．可见必须 $A=B$．

命题2　任何收敛数列都是有界的．

所谓数列 $\{y_n\}$ 有界，是指存在常数 m 和 M，使得对一切 n 都有 $m\leqslant y_n\leqslant M$．这样的 M 和 m 分别称为数列 $\{y_n\}$ 的上界和下界．显然，有界数列的上界和下界都不是唯一的．另外，数列 $\{y_n\}$ 有界的一个充要条件是：有常数 K，使 $|y_n|\leqslant K$　$(n=1,2,3,\cdots)$．

下面证明命题2．设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=l$．根据极限的定义，对于 $\varepsilon_0=1$，应有 N，使当 $n>N$ 时，$|y_n-l|<\varepsilon_0=1$，亦即

$$l-1<y_n<l+1$$