针对性强：诠释数学竞赛难点热点问题
权威性高：全国著名奥数专家学者主笔
资料齐全：博采世界各地优秀竞赛试题

浙大优学

高中数学竞赛课程讲座

GAOZHONG SHUXUE JINGSAI KECHENG JIANGZUO

初等数论

《中等数学》编辑部 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛课程讲座

初等数论

《中等数学》编辑部　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛课程讲座．初等数论/《中等数学》编辑部主编．—杭州：浙江大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-308-11816-3

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①中…　Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 159813 号

高中数学竞赛课程讲座·初等数论
《中等数学》编辑部　主编

责任编辑　杨晓鸣　吴慧(特邀)
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州星云光电图文制作工作室
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　9.25
字　　数　186 千
版 印 次　2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-11816-3
定　　价　19.00 元

目 录

一、高斯函数

Gauss 函数基本性质及其应用

李宝毅
（天津师范大学数学科学学院，300387）
孙婷婷
（河北省张家口市宣化第一中学，075100）

Gauss 函数是一个重要的数论函数，在中学数学竞赛中经常出现与$[x]$有关的题目. Gauss 函数的定义——$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数——非常简单. 在解题过程中经常与$[x]$配合使用的是实数 x 的小数部分$\{x\}=x-[x]$.

Gauss 函数的基本性质 $x-1<[x]\leqslant x$（即 $0\leqslant\{x\}<1$）和$[x+n]=[x]+n(n\in\mathbf{Z})$，是使用最频繁的性质. 利用它们和分类讨论法是解决与 Gauss 函数有关的竞赛题的常用手段.

例 1 求所有的非完全平方数 $n(n\in\mathbf{N}_+)$，使得$[\sqrt{n}]^3\mid n^2$. [1]

（第三届北方数学奥林匹克邀请赛）

分析 显然，$[\sqrt{n}]=1$，即 $n=2,3$ 满足条件.

以下设$[\sqrt{n}]\geqslant 2$. 记 $A=[\sqrt{n}]$，n 是非完全平方数.

因此，$A<\sqrt{n}<A+1$，$A^2<n<A^2+2A+1$. 故 $A^2+1\leqslant n\leqslant A^2+2A$. 设 $n=A^2+k(k\in\{1,2,\cdots,2A\})$. 则 $n^2=A^4+2A^2k+k^2$.

由 $A^3\mid n^2$，知 $A^2\mid n^2$，则 $A\mid k$，即 $k=A$ 或 $2A$.

故 $A^3\mid(A^4+2A^2k)\Rightarrow A^3\mid k^2\Rightarrow k=2A$，且 $A\mid 4$.

于是，$n=A^2+2A$. 因此，$A=2$，$n=8$；$A=4$，$n=24$.

综上，$n=2,3,8,24$ 满足条件.

注 对涉及 Gauss 函数的整除问题，必须首先利用数论知识去掉 Gauss 函数的符号，再将问题转化为普通的整除问题.

例 2 设 $n\in\mathbf{N}$，$n>4$. 证明：$(n-1)\left|\left[\dfrac{(n-1)!}{n}\right]\right.$. [2]

（2002，澳大利亚数学奥林匹克）

分析 若 $n>4$ 不是素数，则存在 $p,q\geqslant 2$，使得 $n=pq$.

当 $p<q$ 时，有$(n-1)!=1\times 2\times\cdots\times p\times\cdots\times q\times\cdots\times(n-1)$.

显然，$\dfrac{(n-1)!}{pq}\in\mathbf{N}_+$，且$(n-1)\left|\dfrac{(n-1)!}{pq}\right.$.

当$n=p^2(p\geqslant 3)$时，有$(n-1)!=1\times 2\times\cdots\times p\times\cdots\times 2p\times\cdots\times(n-1)$.

显然，$\dfrac{(n-1)!}{p^2}\in\mathbf{N}_+$，且$(n-1)\left|\dfrac{(n-1)!}{p^2}\right.$.

若n是素数，由威尔逊定理知$(n-1)!\equiv -1(\bmod n)$，即$(n-1)!\equiv(n-1)(\bmod n)$.

故$\left[\dfrac{(n-1)!}{n}\right]=\dfrac{(n-1)!-(n-1)}{n}=(n-1)\dfrac{(n-2)!-1}{n}$.记$M=(n-1)[(n-2)!-1]$.则$n\mid M,(n-1)\mid M$.

由$(n,n-1)=1$，得$n(n-1)\mid M$.从而，$(n-1)\left|\dfrac{M}{n}\right.$.

例 3 设$n\in\mathbf{N}_+$.证明：$\{n\sqrt{7}\}>\dfrac{11}{20n}$.

分析 记$A_n=[n\sqrt{7}]$，$\alpha_n=\{n\sqrt{7}\}$.则$n\sqrt{7}=A_n+\alpha_n>A_n\Rightarrow 7n^2>A_n^2$，即$7n^2-A_n^2\geqslant 1$.又$x^2\equiv 0,1,2,4(\bmod 7)$，则$7n^2-A_n^2\neq 1,2$.故$7n^2-A_n^2\geqslant 3\Rightarrow(n\sqrt{7}-A_n)(n\sqrt{7}+A_n)\geqslant 3\Rightarrow\alpha_n\geqslant\dfrac{3}{n\sqrt{7}+A_n}>\dfrac{3}{2n\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{14n}>\dfrac{11}{20n}$.

注 在解决与Gauss函数或小数部分$\{x\}$有关的题目过程中，$[x]$与$\{x\}$经常配合使用，相辅相成.

例 4 求$n\in\mathbf{N}_+$，使得$n-[n\{\sqrt{n}\}]=2$.

(2002，保加利亚数学奥林匹克)

分析 设$\sqrt{n}=A+\alpha(A=[\sqrt{n}],\alpha=\{\sqrt{n}\})$.则$n=(A+\alpha)^2$.

当$\alpha=0$时，$n=A^2=2$.此时，A不可能为整数.

当$\alpha\in(0,1)$时，$2=n-[n\{\sqrt{n}\}]=n-[n\sqrt{n}-An]=n+An-[n\sqrt{n}]$，即$(A+1)n=2+[n\sqrt{n}]$.

设$n=(A+1)^2-k$.当$k\geqslant 2$时，

$n\sqrt{n+2}\leqslant n\sqrt{n+k}=(A+1)n=[n\sqrt{n}]+2\leqslant n\sqrt{n}+2$

$\Rightarrow n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\leqslant 2\Rightarrow\dfrac{2n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\leqslant 2\Rightarrow n\leqslant\sqrt{n+2}+\sqrt{n}<2\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow n^2<4n+4\Rightarrow n<5$.

经检验，只有当$n=2$时，原等式成立.当$k=1$时，

$n\sqrt{n+1}=(A+1)n=2+[n\sqrt{n}]<2+n\sqrt{n}\Rightarrow n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<2$

$\Rightarrow n<2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})<4\sqrt{n+1}\Rightarrow n^2<16n+16\Rightarrow A^2+2A=n<17$.

当$A=1,2,3$时，相应的$n=3,8,15$.经检验，$n=8,15$满足原等式.

综上，$n=2,8,15$ 是原方程的解.

注 研究含 Gauss 函数的方程时，因为求解过程一般不是等价变形，所以，验根过程是必需的.

例 5 设 $n\in\mathbf{N}_+$，素数 $p<n$. 证明：$p\left|\left(\mathrm{C}_n^p-\left[\dfrac{n}{p}\right]\right)\right.$.

(2003，克罗地亚数学奥林匹克)

分析 本题的关键是如何将$\left[\dfrac{n}{p}\right]$恰当地表示出来. 在连续 p 个整数 $n,n-1,\cdots,n-p+1$ 中存在唯一的整数(记为 m) 能被 p 整除，显然，$\left[\dfrac{n}{p}\right]=\dfrac{m}{p}$. 则

$$k=\mathrm{C}_n^p-\left[\frac{n}{p}\right]=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}-\frac{m}{p}$$

$$=\frac{m}{p!}\left[\frac{1}{m}n(n-1)\cdots(n-p+1)-(p-1)!\right].$$

注意到，$n,n-1,\cdots,n-p+1$ 除以 p 的余数是 $1,2,\cdots,p-1,0$ 的一个重新排列，$\{n,n-1,\cdots,n-p+1\}\backslash\{m\}$ 除以 p 的余数是 $1,2,\cdots,p-1$ 的一个重新排列，于是，

$$\frac{1}{m}n(n-1)\cdots(n-p+1)\equiv(p-1)!\pmod p,$$

$$(p-1)!k=\frac{m}{p}\left[\frac{1}{m}n(n-1)\cdots(n-p+1)-(p-1)!\right]\equiv0\pmod p,$$

其中，$\dfrac{m}{p}$ 是整数，故 $p\mid k$.

例 6 设 k,l 是给定的两个正整数. 证明：有无穷多个正整数 $n>k$，使得 C_n^k 与 l 互素.[3]

(2009，全国高中数学联赛)

分析 本题是一道典型的数论中的存在性问题.

证明：利用 Gauss 函数有关的一个常见公式：$n!$ 的算术分解式中素数 p 的指数为 $V_p(n!)=\sum\limits_{\alpha=1}^{+\infty}\left[\dfrac{n}{p^\alpha}\right]$. 设正整数 l 的算术分解式为 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_j^{\alpha_j}$.

则 C_n^k 与 l 互素 $\Leftrightarrow V_{p_i}(\mathrm{C}_n^k)=0\,(1\leqslant i\leqslant j)\Leftrightarrow V_{p_i}(n!)=V_{p_i}(k!)+V_{p_i}((n-k)!)$ $\Leftrightarrow\sum\limits_{\alpha=1}^{+\infty}\left[\dfrac{n}{p_i^\alpha}\right]=\sum\limits_{\alpha=1}^{+\infty}\left[\dfrac{k}{p_i^\alpha}\right]+\sum\limits_{\alpha=1}^{+\infty}\left[\dfrac{n-k}{p_i^\alpha}\right]$. 利用 Gauss 函数的性质$[x+y]=[x]+[y]+0$ 或 1，可得$\left[\dfrac{n}{p_i^\alpha}\right]=\left[\dfrac{k}{p_i^\alpha}\right]+\left[\dfrac{n-k}{p_i^\alpha}\right]$，即在 p_i 进制下 k 与 $n-k$ 的加法运算中不进位.

下面构造满足此条件的 n. 设 q_i 为 k 在 p_i 进制下的位数，令 $Q=\max\{q_i\mid1\leqslant i\leqslant j\}$，$n=k+l^{Q+b}\,(b\in\mathbf{N}_+)$. 由 $p_i^{Q+1}\mid l^{Q+b}$，即 l^{Q+b} 在 p_i 进制下后 $Q+1$ 位数字均为 0，知 $k+l^{Q+b}$ 在 p_i 进制下加法运算中不进位，故 $\mathrm{C}_{k+l^{Q+b}}^k$ 与 l 互素，其中，$b\in\mathbf{N}_+$ 有无穷多个.

例 7 设 $n\in\mathbf{N}_+$. 证明：$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left[\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=n$.

分析 本题比较经典，具有多种证明方法.

证法 1 数学归纳法.

当 $n=1$ 时，等式显然成立. 假设当 $n=m$ 时，等式成立. 则当 $n=m+1$ 时，设 $m+1=2^{\alpha}(2\beta+1)$. 故 $\left[\dfrac{m+1+2^{\alpha}}{2^{\alpha+1}}\right]=\dfrac{2^{\alpha}(2\beta+2)}{2^{\alpha+1}}=\beta+1=\left[\dfrac{m+2^{\alpha}}{2^{\alpha+1}}\right]+1$. 而当 $k\neq\alpha$ 时，$\dfrac{m+1+2^k}{2^{k+1}}$ 不是整数. 从而，$\left[\dfrac{m+1+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\dfrac{m+2^k}{2^{k+1}}\right]$.

故 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left[\dfrac{m+1+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left[\dfrac{m+2^k}{2^{k+1}}\right]+1=m+1$. 于是，等式成立.

综上，对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，原等式成立.

证法 2 利用集合的性质.

设 $A_k=\left[\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$，则 $A_k\leqslant\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}<A_k+1$，即 $2^k(2A_k-1)\leqslant n<2^k(2A_k+1)$，其中，$A_k$ 表示集合 $X_k=\{(2\alpha-1)2^k\mid\alpha\in\mathbf{N}_+\}$ 中不超过 n 的元素个数. 显然，集合 $X_0,X_1,\cdots$ 两两相交为空，且 $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}X_k$ 为正整数集. 因此，

$$n=|\{1,2,\cdots,n\}|=\left|\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}X_k\right)\cap\{1,2,\cdots,n\}\right|=\left|\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X_k\cap\{1,2,\cdots,n\})\right|=\sum_{k=0}^{+\infty}A_k.$$

注 证法 2 将 Gauss 函数的求和问题等价转化为集合的计数问题，这种思想在下面例题中得到了充分的应用. 根据具体情形构造辅助集合是这种思想应用的关键.

例 8 设 $k\in\{1,2,3,4,5\}$，$m\in\mathbf{N}_+$，记 $f(m,k)=\sum\limits_{i=1}^{5}\left[m\sqrt{\dfrac{k+1}{i+1}}\right]$. 则对于任意的正整数 n，存在唯一一组 (m,k)，使得 $f(m,k)=n$.[4]

(2007，全国高中数学联赛)

分析 记 $a_1=\left[\sqrt{\dfrac{k+1}{2}}m\right]$. 则 $a_1\leqslant\sqrt{\dfrac{k+1}{2}}m<a_1+1$，即 $\sqrt{2}a_1\leqslant\sqrt{k+1}m<\sqrt{2}(a_1+1)$. 设集合 $A_1=\{\sqrt{2}n\mid n\in\mathbf{N}_+\}$，$B_1=A_1\cap[0,\sqrt{k+1}m]$. 显然，$a_1=|B_1|$. 同理，可设 $A_i=\{\sqrt{i+1}n\mid n\in\mathbf{N}_+\}$，$B_i=A_i\cap[0,\sqrt{k+1}m]$，$a_i=|B_i|$ $(i=2,3,4,5)$. 显然，$f(m,k)=\sum\limits_{i=1}^{5}a_i$. 易证，集合 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 两两不相交(当 $i\neq j$ 时，$\sqrt{i+1}n_1=\sqrt{j+1}n_2$ 等价于 $\dfrac{n_1}{n_2}=\sqrt{\dfrac{j+1}{i+1}}$，不可能).

记 $A=\{\sqrt{i+1}n\mid n\in\mathbf{N}_+,i=1,2,3,4,5\}$. 则 $f(m,k)=\sum\limits_{i=1}^{5}|A_i\cap[0,\sqrt{k+1}m]|$

$=|A\cap[0,\sqrt{k+1}m]|$.

故 $f(m,k)$ 为集合 A 中不超过 $\sqrt{k+1}m$ 的元素的个数，即集合 A 的元素按递增排序后 $\sqrt{k+1}m$ 所对应的序号. 对任意的正整数 n，递增排序后 A 中第 n 个元素为 $\sqrt{k+1}m$，则 $f(m,k)=n$.

显然，数组 (m,k) 存在且唯一.

例 9　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\in(1,2)$，且 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{n}{a_n}$.

证明：至多存在一对正整数 $(i,j)(i<j)$，使得 $a_i+a_j\in\mathbf{Z}$.[5]

（第 35 届俄罗斯数学奥林匹克（十一年级））

分析　此数列的递归关系不是常见的线性递归关系，并且初值不确定，可以采用试验的方法，观察数列 $\{a_n\}$ 的特性.

由于 $a_1\in(1,2)$，最容易想到的初值为 $a_1=\dfrac{3}{2}=1\dfrac{1}{2}$，直接计算可得

$a_2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{6}=2\dfrac{1}{6}$，$a_3=\dfrac{13}{6}+\dfrac{12}{13}=\dfrac{241}{78}=3\dfrac{7}{78}$，……

容易发现 $[a_n]=n$，且 $\{a_n\}=[a_n]-n$ 严格单调下降.

为保险起见，可分别取 $a_1=\dfrac{4}{3}=1\dfrac{1}{3}$ 和 $a_1=\dfrac{5}{3}=1\dfrac{2}{3}$ 进行试验，上述结果均成立.

猜测：$a_n=n+b_n$，$0<b_n<1$，且 b_n 严格单调下降.

猜测的证明比较简单. 记 $b_n=a_n-n$. 则

$$b_{n+1}=a_{n+1}-(n+1)=a_n+\frac{n}{a_n}-n-1=b_n+\frac{n}{b_n+n}-1$$

$$=b_n-\frac{b_n}{b_n+n}=b_n\left(1-\frac{1}{b_n+n}\right).$$

用数学归纳法易证：$0<b_n<1$，且 b_n 严格单调下降.

利用猜测可以将原命题等价转换为：至多存在一对正整数 (i,j)，使得 $b_i+b_j=1$，$b_1\in(0,1)$. 若 $b_1\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 b_i+b_j 不可能为整数，即不存在一对正整数 (i,j)，使得 $b_i+b_j=1$；若 $b_1>\dfrac{1}{2}$，则 $b_2=b_1\left(1-\dfrac{1}{b_1+1}\right)=\dfrac{b_1^2}{b_1+1}=\dfrac{1}{b_1^{-1}+b_1^{-2}}<\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$；若 $b_i+b_j=1$，则必有 $i=1$，$b_j=1-b_1$.

故至多存在一个 j 满足条件.

注　一般情形下，与数列有关的数学竞赛题，可以通过简单的数学试验发现一些规律（辅助命题的作用类似于几何中的辅助线），这些规律将直接或间接地有助于问题的解决.

例 10　定义数列 $\{a_n\}$：$a_1=2\,008$，$a_{n+1}=n\left[\dfrac{a_n}{n}\right]+n$.

证明：数列$\{a_n\}$存在一个由无穷多项组成的等差子数列$\{a_{n_k}\}$和一个由无穷多项组成的等比子数列$\{a_{n_l}\}$.

分析 数列$\{a_n\}$的初值$a_1=2\,008$过大，不便于数学试验，此题可能与2 008无关，因此，选择一个适宜的初值进行试验，例如，$a_1=9$. 容易计算：

$a_2=10, a_3=12, a_4=15, a_5=16, a_6=20, a_7=24, a_8=28, a_9=32, \cdots\cdots$

观察到：当n充分大时，$a_n=4(n-1)$. 结合递归关系$a_{n+1}=n\left[\dfrac{a_n}{n}\right]+n$的特点，可以引入辅助数列$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{n}=\left[\dfrac{a_n}{n}\right]+1\in\mathbf{N}_+$. 则$b_{n+1}=\left[\dfrac{a_{n+1}}{n+1}\right]+1=\left[\dfrac{nb_n}{n+1}\right]+1=\left[b_n+\dfrac{-b_n}{n+1}\right]+1=b_n+\left[\dfrac{-b_n}{n+1}\right]+1\leqslant b_n$,

即$\{b_n\}$是一个单调下降的正整数数列.

因此，存在$M\in\mathbf{N}_+$，当$n\geqslant M$时，$b_n=$常数$k\in\mathbf{N}_+$，即$n\geqslant M$时，$a_{n+1}=kn$. 从而，$\{a_{n+1}=kn \mid n\geqslant M\}$是等差子数列. 于是，$\{a_{n_i+1}=kM^i \mid n_i=M^i, i=1,2,\cdots\}$是等比子数列.

练习题

1. 解方程：$[3x]+[5x]=2\,011$.

(**提示**：记$A=[x]$，$\alpha=\{x\}$. 则$x=A+\alpha$. 原方程等价于$8A+[3\alpha]+[5\alpha]=2\,011$. 因此，$A=251$，$[3\alpha]+[5\alpha]=3$. 故$\alpha\in[0.4,0.6)$).

2. 设$a_1=2\,007$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{1+a_n}$. 求$[a_{1\,000}]$.

(第三届北方数学奥林匹克邀请赛)

(**提示**：注意到$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{1+a_n}=a_n-1+\dfrac{1}{1+a_n}=a_{n-1}-2+\dfrac{1}{1+a_n}+\dfrac{1}{1+a_{n-1}}=a_{n-2}-3+\dfrac{1}{1+a_n}+\dfrac{1}{1+a_{n-1}}+\dfrac{1}{1+a_{n-2}}=\cdots$.)

3. 求所有的正整数对$(n,A)(n>1)$，使得$n\left|\left[\dfrac{n^2}{A}+1\right]\right.$.

(**提示**：分$A=n$，$n<A<n^2$和$A>n^2$三种情形分别进行讨论.

$n^2=A\left[\dfrac{n^2}{A}\right]+A\left\{\dfrac{n^2}{A}\right\}=A\left(\left[\dfrac{n^2}{A}\right]+1\right)-\left(A-A\left\{\dfrac{n^2}{A}\right\}\right)$.

故由条件$n\left|\left[\dfrac{n^2}{A}+1\right]\right.$可推得$n\left|\left(A-A\left\{\dfrac{n^2}{A}\right\}\right)\right.$. 因此，$0<A<n$不可能成立.)

4. 设x为大于1的非整实数. 证明：$\dfrac{x+\{x\}}{[x]}+\dfrac{x+[x]}{\{x\}}-\dfrac{[x]}{x+\{x\}}-\dfrac{\{x\}}{x+[x]}>\dfrac{9}{2}$.

(2007，地中海地区数学竞赛)

(**提示**:记 $A=[x]$,$\alpha=\{x\}$. 则 $x=A+\alpha$. 代入直接整理即可.)

5. 求$[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2\,012}]$的个位数字、十位数字和百位数字.

(**提示**:注意到$[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2\,012}]=[(5+2\sqrt{6})^{1\,006}]=(5+2\sqrt{6})^{1\,006}+(5-2\sqrt{6})^{1\,006}-1$. 利用二项式定理展开后分别计算其除以 8,125 的余数.)

6. 设 $n\in\mathbf{N}_+$,记 $f(n)=[2^n\sqrt{2\,008}]+[2^n\sqrt{2\,009}]$. 则集合 $Y=\{f(n)\mid n\in\mathbf{N}_+\}$ 中有无穷多个奇数和无穷多个偶数.

(2008,女子数学奥林匹克)

(**提示**:$[2^n\sqrt{2\,008}]$ 的奇偶性与 $\sqrt{2\,008}$ 在二进制下小数点后第 n 位数字有关.)

参考文献

[1] 第三届北方数学奥林匹克邀请赛[J]. 中等数学,2008(3).

[2] 2002 澳大利亚数学奥林匹克[J]. 中等数学,2004(增刊).

[3] 2009 年全国高中数学联赛[J]. 中等数学,2009(12).

[4] 2007 年全国高中数学联赛[J]. 中等数学,2007(12).

[5] 第 35 届俄罗斯数学奥林匹克(十一年级)[J]. 中等数学,2010(1).

二、整数基本性质

(一)算术基本定理及其应用

李　涛

(广州大学数学与信息科学学院 2010 级博士生,510006)

1　基础知识

1.1　算术基本定理

每个大于 1 的正整数均可分解成有限个素数的积.若不计素因子在乘积中的次序,则其分解方式是唯一的,即 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中,$p_k$ 为素数,$\alpha_i\in\mathbf{N}_+\ (i=1,2,\cdots,k)$.

1.2　正整数 n 的正约数的个数及正约数的和

记 $r(n)$ 是 n 的正约数的个数,$\delta(n)$ 是 n 的正约数之和,且 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则

$$r(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1),$$

$$\delta(n)=(1+p_1+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(1+p_k+\cdots+p_k^{\alpha_k})$$

$$=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

2　算术基本定理的应用

2.1　若题目中涉及正因数个数问题,先考虑算术基本定理

例1　设 n 为正整数.证明:若 n 的所有正因子之和是 2 的幂,则这些正因子的个数也是 2 的幂.[1]

(2009,中欧数学竞赛)

证明:设 $n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_k^{s_k}$,其中,$p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为不同素数,$s_i\in\mathbf{N}_+\ (i=1,2,\cdots,k)$.则 n 的所有正因子之和可表示为

$$(1+p_1+\cdots+p_1^{s_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{s_2})\cdots(1+p_k+\cdots+p_k^{s_k}).$$

若它是 2 的幂,则它的因子 $f_i=1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{s_i}\ (i=1,2,\cdots,k)$ 也是 2 的幂.因此,所有的 p_i,s_i 均为奇数.若存在 $s_i>1$,则 $f_i=(1+p_i)(1+p_i^2+p_i^4+\cdots+p_i^{s_i-1})$.

又由于 f_i 不含大于1的奇因子，故偶数 s_i-1 必为 $4k+2$ 的形式. 于是，

$$f_i=(1+p_i)(1+p_i^2)(1+p_i^4+\cdots+p_i^{s_i-3}).$$

由于 $1+p_i$ 和 $1+p_i^2$ 均为2的幂，故 $(1+p_i)\mid(1+p_i^2)$，这与 $1+p_i^2=(1+p_i)(p_i-1)+2$ 矛盾. 因此，必有 $s_i=1(i=1,2,\cdots,k)$.

故 n 的正因子的个数也是2的幂.

例2 设一个正整数满足下列性质：其所有模4不余2的正因数之和等于1 000. 求满足上述性质的所有正整数.[2]

(2008，第18届日本数学奥林匹克)

解：对于正整数 n，设 $S(n)$ 为 n 的所有模4不余2的正因数的和，假设 n 的素因数分解为 $2^m p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}(m,m_i\in\mathbf{N}_+,i=1,2,\cdots,k)$.

因为一个整数模4余2等价于其恰被2整除，所以，$S(n)$ 是所有形如

$$2^l p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_k^{l_k}(0\leqslant l\leqslant m,\ l\neq1,0\leqslant l_1\leqslant m_1,\cdots,0\leqslant l_k\leqslant m_k)$$

的数的和. 故 $S(n)=\sum\limits_{l=0,\ l\neq1}^{m}2^l\cdot\sum\limits_{l_1=0}^{m_1}p_1^{l_1}\cdot\cdots\cdot\sum\limits_{l_k=0}^{m_k}p_k^{l_k}$.

为简单起见，对于每个非负整数 m，设 $f(2,m)=\sum\limits_{l=0,\ l\neq1}^{m}2^l$，$f(p,m)=\sum\limits_{l=0}^{m}p^l$，其中，$p$ 是大于2的素数. 则

$$S(n)=f(2,m)f(p_1,m_1)\cdots f(p_k,m_k)=1\ 000.$$

先考虑 $f(2,m)$. 若 $m\geqslant9$，则 $f(2,m)\geqslant f(2,9)=2^{10}-1-2^1=1\ 021$. 因此，$m\leqslant8$. 经计算得 $f(2,1)=1$，$f(2,2)=5$，$f(2,6)=125$，满足 $f(2,m)\mid1\ 000$.

再考虑 $f(p,m)$. 当 $3\leqslant p\leqslant31$ 时，类似地可以验证 $f(3,1)=4$，$f(3,3)=40$，$f(7,1)=8$，$f(19,1)=20$，均整除1 000. 当 $p\geqslant32$ 时，若 $m\geqslant2$，则 $f(p,m)\geqslant f(p,2)\geqslant1+32+32^2>1\ 000$. 故 $m=1$. 经验证 $f(199,1)=200$，$f(499,1)=500$，均整除1 000.

最后考虑 $f(p,m)(p\geqslant2)$ 的组合，只有 $2^6\times7^1=448$ 及 $2^2\times199^1=796$ 满足题意.

例3 若正整数有八个正因数，且这八个正因数之和为3 240，则称这个正整数是"好数". 例如，2 006是好数，因为其因数1,2,17,34,59,118,1 003,2 006的和为3 240. 求最小的好数.[3]

(2006，第28届巴西数学奥林匹克)

解：设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. 则 $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)=8$.

故当 $k=1$ 时，$\alpha_1=7$；当 $k=2$ 时，$\alpha_1=1,\alpha_2=3$ 或 $\alpha_1=3,\alpha_2=1$；当 $k=3$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$；当 $k\geqslant4$ 时，无解.

(1) 若 $n=p^7$(p 为素数)，则 $\sum\limits_{i=0}^{7}p^i=3\ 240$.

(i) 若 $p\geqslant3$，则 $\sum\limits_{j=0}^{7}p^j\geqslant\sum\limits_{j=0}^{7}3^j=\dfrac{3^8-1}{2}=3\ 280>3\ 240$.

(ii) 若 $p=2$,则 $\sum_{j=0}^{7} p^j = 2^8-1=511\neq 3\,240$. 因而,当 $n=p^7$ 时,无满足题意的解.

(2) 若 $n=p^3q$(p,q 为素数,且 $p\neq q$),则有正因数之和

$3\,240=(1+p+p^2+p^3)(1+q)=(1+p)(1+p^2)(1+q)=2^3\times 3^4\times 5.$ ①

由 $q\geqslant 2$,得 $1+q\geqslant 3$. 从而,$1+p+p^2+p^3\leqslant 1\,080$. 故 $p\leqslant 7$.

(i) 若 $p=7$,则 $1+p^2=50\times 3\,240$,与式 ① 矛盾.

(ii) 若 $p=5$,则 $1+p^2=26\times 3240$,矛盾.

(iii) 若 $p=3$,则 $1+q=\frac{3\,240}{40}=81$,从而,$q=80$,矛盾.

(iv) 若 $p=2$,则 $1+q=\frac{3\,240}{15}=216$,从而,$q=215$,亦矛盾.

(3) 若 $n=pqr(p<q<r)$,则

$(1+p)(1+q)(1+r)=3\,240=2^3\times 3^4\times 5.$ ②

(i) 若 $p=2$,则$(1+q)(1+r)=2^3\times 3^3\times 5$. 注意到要让 pqr 尽量小,则 qr 应尽量小. 于是,由 $qr=(1+q)(1+r)-(q+1)-(r+1)+1$,知$(q+1)+(r+1)$ 应尽量大.

结合$(1+q)(1+r)=2^3\times 3^3\times 5$,可知 $q+1$ 应尽量小,$r+1$ 应尽量大. 故取 $q=3$,$r=269$. 此时,$n_{\min}=2\times 3\times 269=1\,614$.

(ii) 若 $p\geqslant 3$,则$\frac{1+p}{2}\cdot\frac{1+q}{2}\cdot\frac{1+r}{2}=3^4\times 5$. 由于 p,q,r 的大小关系,故只有两种情形:$\frac{1+p}{2}=3,\frac{1+q}{2}=3^2,\frac{1+r}{2}=3\times 5$;及$\frac{1+p}{2}=3,\frac{1+q}{2}=5,\frac{1+r}{2}=3^3$. 易解出对应的$(p,q,r)=(5,17,29)$ 或$(5,9,53)$.

又因为 9 不是素数,所以,$(p,q,r)=(5,17,29)$. 因此,$n=2\,465$.

综上,满足题意的 $n_{\min}=1\,614$.

注 本题可推广为求出所有满足要求的好数,这只需由第(3)种情形的(i)继续计算即可.

例 4 (1) 已知 p 为大于 3 的素数. 证明:p 的平方被 24 除的余数为 1.[4]

(2007,克罗地亚数学竞赛)

(2) 求所有使 $p^2+2\,543$ 具有少于 16 个不同正因子的素数 p.[5]

(2003,泰国数学奥林匹克)

注 原为两道独立的题,笔者为说明问题将两题凑到了一起.

(1) **证明**:因为大于 3 的素数均可以表示成 $6k\pm 1$ 的形式,所以,

$p^2-1=(6k\pm 1)^2-1=12k(3k\pm 1)$.

又 k 与 $3k\pm 1$ 的奇偶性不同,则它们的积为偶数. 于是,p^2-1 能被 24 整除.

(2) **解**:由(1) 知,当 $p>3$ 时,$p^2+2\,543=p^2-1+106\times 24$ 是 24 的倍数. 设 $p^2+2\,543=24k(k\in\mathbf{N},k\geqslant 107)$. 设 $k=2^r\times 3^s\times k'$,其中,r,s 为非负整数,k' 是使得$(k',6)$

$=1$ 的正整数. 设 $\tau(n)$ 是 n 的所有正因子的个数. 则

$\tau(p^2+2\,543)=\tau(2^{3+r}\times 3^{1+s}k')=(4+r)(2+s)\tau(k')$.

当 $k'>1$ 时，$\tau(k')\geqslant 2$，即 $\tau(p^2+2\,543)\geqslant 16$；

当 $k'=1$ 时，$\tau(p^2+2\,543)=(4+r)(2+s)$.

如果 $\tau(p^2+2\,543)<16$，则 $r\leqslant 3$，$s\leqslant 1$. 故 $k=2^r\times 3^s\leqslant 24$，这与 $k\geqslant 107$ 矛盾. 因此，对所有的素数 $p>3$，有 $\tau(p^2+2\,543)\geqslant 16$.

当 $p=2$ 时，$\tau(2^2+2\,543)=\tau(2\,547)=\tau(3^2\times 283)=6$.

当 $p=3$ 时，$\tau(3^2+2\,543)=\tau(2\,552)=\tau(2^3\times 11\times 29)=16$.

综上，只有 $p=2$ 满足题意.

2.2　在一些涉及互素、整除的题目中，适当考虑算术基本定理

例 5　求所有的正整数 n，满足 n 为合数，且其所有大于 1 的因数可以放在一个圆上，使得任意两个相邻的因数都不是互素的.[6]

(2005，第 34 届美国数学奥林匹克)

解：若 $n=pq$(p,q 为不同的素数)，则其大于 1 的因数 p,q,pq 无论怎样放于圆周上，p,q 总会相邻，不合题意. 若 $n=p^m$(p 为素数，正整数 $m\geqslant 2$)，则无论怎样将 n 的大于 1 的因数放在一个圆上，任意两个相邻的因数都不互素，满足题意. 若 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，其中，素数 $p_1<p_2<\cdots<p_k$，$m_1,m_2,\cdots,m_k$ 为正整数，且当 $k>2$ 或 $k=2$ 时，$\max\{m_1,m_2\}>1$. 设集合 $D_n=\{d\mid d\mid n，且\ d>1\}$.

下面说明可找到满足题意的放法.

首先，将 $n,p_1p_2,p_2p_3,\cdots,p_{k-1}p_k$ 按顺时针放在圆上. 在 n 和 p_1p_2 之间依任意的顺序放入 D_n 中所有以 p_1 为最小素因数的正整数(不包括 p_1p_2)；在 p_1p_2 和 p_2p_3 之间，依任意的次序放入 D_n 中所有以 p_2 为最小素因数的正整数(不包括 p_2p_3)；……在 $p_{k-1}p_k$ 和 n 之间，依任意的次序放入 $p_k,p_k^2,\cdots,p_k^{m_k}$，于是，$D_n$ 中的所有元素恰被放在圆周上一次，且任意相邻的两个数有一个公共的素因数.

例 6　(1) 若正整数 $k(k\geqslant 3)$ 满足：有 k 个正整数，使得任意两个不互素，任意三个互素，求 k 的所有可能值；

(2) 是否存在一个无穷项的正整数集，满足(1) 的条件?[7]

(2003，白俄罗斯数学奥林匹克)

解：(1) 由于素数有无穷多个，设为 $p_1,p_2,\cdots$. 故为满足任意两个不互素及任意三个互素，可构造 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 如下：

$a_1=p_1p_2\cdots p_{k-1}$，$a_2=p_1p_kp_{k+1}\cdots p_{2k-3}$，$a_3=p_2p_kp_{2k-2}p_{2k-1}\cdots p_{2k-6}$，

$a_4=p_3p_{k+1}p_{2k-2}p_{2k-5}\cdots p_{3k-10}$，$\cdots$，$a_k=p_{k-1}p_{2k-3}p_{2k-6}p_{3k-10}\cdots$.

则 $(a_i,a_j)\neq(a_i,a_k)(j\neq k)$. 因此，$(a_i,a_j,a_k)=1$.

故对于所有的 $k(k\geqslant 3)$ 均满足条件.

(2) 不存在满足条件的无穷集合.

假设存在满足条件的集合$\{a_1, a_2, \cdots\}$. 则显然$a_1 > 1$. 设$a_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$($p_1, p_2, \cdots, p_s$是不同的素数).

考虑其中的$s+1$个数$a_2, a_3, \cdots, a_{s+2}$.

因为这$s+1$个数中的每一个均与a_1不互素,所以,每一项均能被$p_1, p_2, \cdots, p_s$之一整除.

因此,存在两个数(不妨设为a_m, a_n)均能被p_i整除. 于是,a_1, a_m, a_n不互素,矛盾.

练习题

1. 已知N为正整数,恰有2 005个正整数有序对(x,y)满足$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{N}$. 证明:$N$是完全平方数.

(**提示**:应注意到$x, y > N$. 否则,$\frac{1}{x}$或$\frac{1}{y}$之一将大于$\frac{1}{N}$. 则

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{N} \Rightarrow y=\frac{N^2}{x-N}+N.$$

这样,N^2的每个正因子d均唯一对应着一组解$(x,y)=\left(d+N, \frac{N^2}{d}+N\right)$.

令$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$. 则$N^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_n^{2\alpha_n}$. 由题意知$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_n+1) = 2\,005$. 因为2 005的正因子均模4余1,所以,$\alpha_i$必为偶数. 故$N$是完全平方数.)

2. 求自然数N,使它能被5和49整除,并且包括1和N在内,它共有10个约数.

(**提示**:设$N = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times 7^{a_4} \times \cdots \times p_n^{a_n}$($a_i \in \mathbf{N}, i=1,2,\cdots,n$). 则

$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1) = 10$.

由于$5 \mid N, 7^2 \mid N$,则$a_3+1 \geqslant 2, a_4+1 \geqslant 3$. 故$a_1, a_2, a_5, a_6, \cdots, a_n$必然均为0. 进而解得$N = 5 \times 7^4$.)

3. 如果p, q是两个素数,并且$q = p+2$,证明:p^q+q^p能被$p+q$整除.

(**提示**:对p^q+q^p进行变形有$p^q+q^p=(p^p+q^p)+(p^{p+2}-p^p)$. 则需证明$(p+q) \mid (p^{p+2}-p^p)$. 而$p+q=2(p+1)$,故只需证明$2(p+1) \mid (p^{p+2}-p^p)$.)

4. 设b, n是大于1的整数. 若对每一个大于1的正整数k,均存在一个整数a_k,使得$k \mid (b-a_k^n)$,证明:存在整数A,使得$b=A^n$.

(**提示**:设b的素因数分解式为$b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,其中,$p_1, p_2, \cdots, p_s$是互不相同的素数,$\alpha_i \in \mathbf{N}_+$ $(i=1,2,\cdots,s)$.

下面证明:所有的指数α_i均被n整除. 设$A = p_1^{\frac{\alpha_1}{n}} p_2^{\frac{\alpha_2}{n}} \cdots p_s^{\frac{\alpha_s}{n}}$. 则$b=A^n$. 对于$k=b^2$,应用条件得$b^2 \mid (b-a_k^n)$. 于是,对于每一个$i(1 \leqslant i \leqslant s)$,$p_i^{2\alpha_i} \mid (b-a_k^n)$. 又因为$p_i^{\alpha_i} \mid b$,所以,$a_k^n \equiv b \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$,且$a_k^n \equiv b \not\equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i+1}}$. 这表明$p_i^{\alpha_i} \parallel a_k^n$. 从而,$\alpha_i$是$n$的倍数.)