走向IMO
数学奥林匹克试题集锦
(2014)

顾问　裘宗沪
2014年IMO中国国家集训队教练组　编

IMO 2014
Cape Town - South Africa

华东师范大学出版社
上海市著名商标
ECNUP
全国百佳图书出版单位

走向IMO

数学奥林匹克试题集锦

(2014)

2014年IMO中国国家集训队教练组 编

华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

走向IMO:数学奥林匹克试题集锦.2014/2014年IMO中国国家集训队教练组编.—上海:华东师范大学出版社,2014.8

ISBN 978-7-5675-2453-8

Ⅰ.①走… Ⅱ.①2… Ⅲ.①中学数学课—竞赛题
Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第185433号

走向IMO
数学奥林匹克试题集锦(2014)

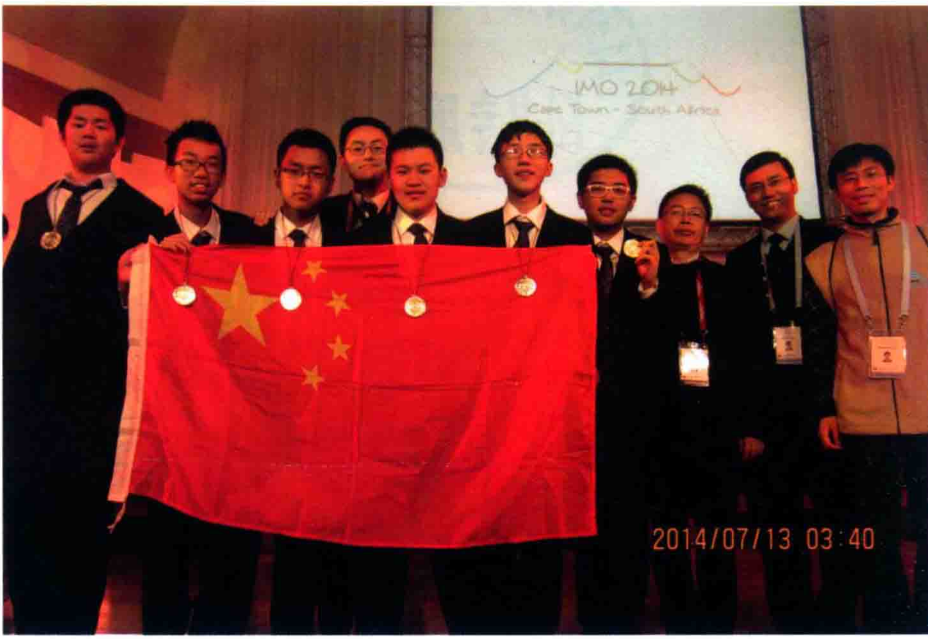
编　　者　2014年IMO中国国家集训队教练组
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　徐惟简
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　890×1240　32开
印　　张　5.5
插　　页　4
字　　数　121千字
版　　次　2014年9月第一版
印　　次　2014年9月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5675-2453-8/G·7572
定　　价　22.00元

出 版 人　王　焰

2014 年 IMO 中国队出发合影 从左到右依次为：
冷岗松、齐仁睿、高继扬、浦鸿铭、周韫坤、谌澜天、黄一山、姚一隽、李秋生、张思汇



2014 年 IMO 中国队颁奖合影 从左到右依次为：
齐仁睿、高继扬、浦鸿铭、姚一隽、周韫坤、黄一山、谌澜天、冷岗松、李秋生、张思汇

前　言

本书以 2014 年国家集训队的测试选拔题为主体，搜集了 2013 年 8 月至 2014 年 7 月间国内主要的数学竞赛及 2014 年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上了 2014 年美国和俄罗斯数学奥林匹克的试题与解答，这些试题大都是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

在过去的一年中，我国中学生数学竞赛的主要赛事有 2013 年全国高中数学联赛（中国数学会普及工作委员会主办）、第 29 届中国数学奥林匹克（CMO）（中国数学奥林匹克委员会主办），以及由中国数学奥林匹克委员会主办的第 12 届中国女子数学奥林匹克（CGMO）等.

在 2014 年国家集训队和国家队集训期间，得到了潘承彪、周青、杨新民、吴建平等专家们的鼓励、支持和指导. 裘宗沪教授对学生进行了赛前指导，再次对他们表示衷心的感谢.

本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造性的工作. 本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2013 年全国高中数学联赛及加试由吴建平整理，第 29 届中

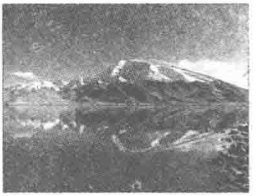
国数学奥林匹克由余红兵整理，2013 年第 12 届中国女子数学奥林匹克由朱华伟整理，2013 年中国西部数学邀请赛由冯志刚整理，2013 年第 10 届中国东南地区数学奥林匹克由李胜宏整理，2014 年国家集训队测试题由熊斌整理，2014 年中国国家队选拔考试题由瞿振华整理，2014 年第 55 届国际数学奥林匹克由姚一隽、冷岗松、李秋生和张思汇整理. 2014 年俄罗斯数学奥林匹克由李伟固整理，2014 年美国数学奥林匹克由张思汇整理.

囿于作者的水平，加上编写时间仓促，不足和错误在所难免，请广大读者朋友批评指正，不吝施教.

2014 年 IMO 中国国家集训队教练组

2014 年 7 月

目　录



2013年全国高中数学联赛

受中国数学会委托,2013 年全国高中数学联赛由吉林省数学会承办. 中国数学会直接组织命题,承办省份负责各项组织事宜.

竞赛活动于 2013 年 10 月 13 日(星期日)举行.

竞赛确定了"2013 年全国高中数学联赛赛区一等奖名单",31 个赛区共有 1313 名同学获得赛区一等奖. 竞赛确定了"第 29 届全国中学生数学冬令营营员名单",345 名同学取得了参加南京冬令营的资格.

2013 年全国高中数学联赛(一试)考试时间 80 分钟,满分 120 分,全国高中数学联赛加试(二试)考试时间 150 分钟,满分 180 分.

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1 设集合 $A=\{2, 0, 1, 3\}$,集合 $B=\{x \mid -x \in A, 2-x^2 \notin A\}$. 则集合 B 中所有元素的和为________.

解 易知 $B \subseteq \{-2, 0, -1, -3\}$. 当 $x=-2, -3$ 时,$2-x^2=-2, -7$,有 $2-x^2 \notin A$;而当 $x=0, -1$ 时,$2-x^2=2, 1$,有 $2-x^2 \in A$. 因此,根据 B 的定义可知 $B=\{-2, -3\}$.

所以,集合 B 中所有元素的和为 -5.

2 在平面直角坐标系 xOy 中,点 A、B 在抛物线 $y^2=4x$ 上,满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=-4$, F 是抛物线的焦点. 则 $S_{\triangle OFA} \cdot S_{\triangle OFB}=$________.

解 点 F 坐标为 $(1, 0)$. 设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$,则 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$, $x_2=\frac{y_2^2}{4}$,故

$$-4=\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2+y_1y_2,$$

即 $\frac{1}{16}(y_1y_2+8)^2=0$,故 $y_1y_2=-8$.

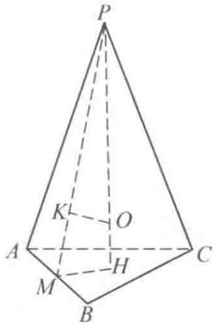
$$\begin{aligned} S_{\triangle OFA} \cdot S_{\triangle OFB} &= \left(\frac{1}{2}\mid OF \mid \cdot \mid y_1 \mid\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\mid OF \mid \cdot \mid y_2 \mid\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \mid OF \mid^2 \cdot \mid y_1y_2 \mid = 2. \end{aligned}$$

3 在$\triangle ABC$中,已知$\sin A=10\sin B\sin C$, $\cos A=10\cos B\cos C$,则$\tan A$的值为________.

解 由于$\sin A-\cos A=10(\sin B\sin C-\cos B\cos C)=-10\cos(B+C)=10\cos A$,所以$\sin A=11\cos A$,故$\tan A=11$.

4 已知正三棱锥$P-ABC$底面边长为1,高为$\sqrt{2}$,则其内切球半径为________.

解 如图,设球心O在面ABC与面ABP内的射影分别为H和K,AB中点为M,内切球半径为r,则P、K、M共线,P、O、H共线,$\angle PHM=\angle PKO=\frac{\pi}{2}$,且



(第4题)

$OH=OK=r$, $PO=PH-OH=\sqrt{2}-r$,

$$MH=\frac{\sqrt{3}}{6}AB=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$PM=\sqrt{MH^2+PH^2}=\sqrt{\frac{1}{12}+2}=\frac{5\sqrt{3}}{6},$$

于是有

$$\frac{r}{\sqrt{2}-r}=\frac{OK}{PO}=\sin\angle KPO=\frac{MH}{PM}=\frac{1}{5},$$

解得$r=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

5 设 a、b 为实数，函数 $f(x)=ax+b$ 满足：对任意 $x\in[0,1]$，有 $|f(x)|\leqslant 1$. 则 ab 的最大值为________.

解 易知 $a=f(1)-f(0)$，$b=f(0)$，则

$$\begin{aligned}ab&=f(0)\cdot(f(1)-f(0))\\&=-\left(f(0)-\frac{1}{2}f(1)\right)^2+\frac{1}{4}(f(1))^2\\&\leqslant\frac{1}{4}(f(1))^2\leqslant\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

当 $2f(0)=f(1)=\pm1$，即 $a=b=\pm\frac{1}{2}$ 时，$ab=\frac{1}{4}$. 故 ab 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

6 从 1, 2, …, 20 中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为________.

解 设 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ 取自 1, 2, …, 20，若 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 互不相邻，则

$$1\leqslant a_1<a_2-1<a_3-2<a_4-3<a_5-4\leqslant 16,$$

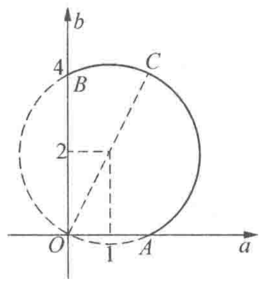
由此知从 1, 2, …, 20 中取 5 个互不相邻的数的选法与从 1, 2, …, 16 中取 5 个不同的数的选法相同，即 C_{16}^5 种. 所以，从 1, 2, …, 20 中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为

$$\frac{C_{20}^5-C_{16}^5}{C_{20}^5}=1-\frac{C_{16}^5}{C_{20}^5}=\frac{232}{323}.$$

7 若实数 x、y 满足 $x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则 x 的取值范围是________.

解 令 $\sqrt{y}=a$，$\sqrt{x-y}=b(a,\ b\geqslant 0)$，此时 $x=y+(x-y)=a^2+b^2$，且条件中等式化为 $a^2+b^2-4a=2b$，从而 a、b 满足方程

$$(a-2)^2+(b-1)^2=5(a,\ b\geqslant 0).$$



（第 7 题）

如图所示，在 aOb 平面内，点 $(a,\ b)$ 的轨迹是以 $(1,\ 2)$ 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的圆在 $a,\ b\geqslant 0$ 的部分，即点 O 与弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 的并集. 因此 $\sqrt{a^2+b^2}\in\{0\}\cup[2,\ 2\sqrt{5}]$，从而 $x=a^2+b^2\in\{0\}\cup[4,\ 20]$.

8 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项，其中 $a_1=a_9=1$，且对每个 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}$，均有 $\frac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2,\ 1,\ -\frac{1}{2}\right\}$，则这样的数列的个数为________.

解 令 $b_i=\frac{a_{i+1}}{a_i}(1\leqslant i\leqslant 8)$，则对每个符合条件的数列 $\{a_n\}$，有

$$\prod_{i=1}^{8}b_i=\prod_{i=1}^{8}\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{a_9}{a_1}=1，且\ b_i\in\left\{2,\ 1,\ -\frac{1}{2}\right\}(1\leqslant i\leqslant 8). \qquad ①$$

反之，由符合条件①的 8 项数列$\{b_n\}$可唯一确定一个符合题设条件的 9 项数列$\{a_n\}$.

记符合条件①的数列$\{b_n\}$的个数为 N. 显然 $b_i(1\leqslant i\leqslant 8)$ 中有偶数个$-\frac{1}{2}$，即 $2k$ 个$-\frac{1}{2}$；继而有 $2k$ 个 2，$8-4k$ 个 1. 当给定 k 时，$\{b_n\}$的取法有 $C_8^{2k}C_{8-2k}^{2k}$ 种，易知 k 的可能值只有 0，1，2，所以

$$N=1+C_8^2C_6^2+C_8^4C_4^4=1+28\times 15+70\times 1=491.$$

因此，根据对应原理，符合条件的数列$\{a_n\}$的个数为 491.

二、解答题(本大题共 3 小题，共 56 分)

9 (16 分)给定正数数列$\{x_n\}$满足 $S_n\geqslant 2S_{n-1}$，$n=2, 3, \cdots$，这里 $S_n=x_1+\cdots+x_n$. 证明：存在常数 $C>0$，使得

$$x_n\geqslant C\cdot 2^n,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

证明 当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n\geqslant 2S_{n-1}$ 等价于

$$x_n\geqslant x_1+\cdots+x_{n-1}. \tag{①}$$

对常数 $C=\frac{1}{4}x_1$，用数学归纳法证明：

$$x_n\geqslant C\cdot 2^n,\ n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{②}$$

$n=1$ 时结论显然成立. 又 $x_2\geqslant x_1=C\cdot 2^2$.

对 $n\geqslant 3$，假设 $x_k\geqslant C\cdot 2^k$，$k=1, 2, \cdots, n-1$，则由①式知

$$\begin{aligned}x_n&\geqslant x_1+(x_2+\cdots+x_{n-1})\\&\geqslant x_1+(C\cdot 2^2+\cdots+C\cdot 2^{n-1})\\&=C(2^2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})=C\cdot 2^n,\end{aligned}$$

所以，由数学归纳法知，②式成立.

10 (20 分)在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A_1$、$A_2$ 分别为椭圆的左、右顶点，F_1、F_2 分别为椭圆的左、右焦点，P 为椭圆上不同于 A_1 和 A_2 的任意一点. 若平面中两个点 Q、R 满足 $QA_1\perp PA_1$，$QA_2\perp PA_2$，$RF_1\perp PF_1$，$RF_2\perp PF_2$，试确定线段 QR 的长度与 b 的大小关系，并给出证明.

解 令 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，则 $A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$、$F_1(-c, 0)$、$F_2(c, 0)$.

设 $P(x_0, y_0)$、$Q(x_1, y_1)$、$R(x_2, y_2)$，其中 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$y_0\neq 0$.

由 $QA_1\perp PA_1$，$QA_2\perp PA_2$ 可知

$$\overrightarrow{A_1Q}\cdot\overrightarrow{A_1P}=(x_1+a)(x_0+a)+y_1y_0=0, \quad ①$$

$$\overrightarrow{A_2Q}\cdot\overrightarrow{A_2P}=(x_1-a)(x_0-a)+y_1y_0=0. \quad ②$$

将①、②相减，得 $2a(x_1+x_0)=0$，即 $x_1=-x_0$，将其代入①，得 $-x_0^2+a^2+y_1y_0=0$，故 $y_1=\frac{x_0^2-a^2}{y_0}$，于是 $Q\left(-x_0, \frac{x_0^2-a^2}{y_0}\right)$.

根据 $RF_1\perp PF_1$，$RF_2\perp PF_2$，同理可得 $R\left(-x_0, \frac{x_0^2-c^2}{y_0}\right)$.

因此

$$|QR|=\left|\frac{x_0^2-a^2}{y_0}-\frac{x_0^2-c^2}{y_0}\right|=\frac{b^2}{|y_0|},$$

由于 $|y_0|\in(0,b]$，故 $|QR|\geqslant b$(其中等号成立的充分必要条件是 $|y_0|=b$，即点 P 为 $(0,\pm b)$).

11 (20 分) 求所有的正实数对 (a,b)，使得函数 $f(x)=ax^2+b$ 满足：对任意实数 x、y，有

$$f(xy)+f(x+y)\geqslant f(x)f(y).$$

解 已知条件可转化为：对任意实数 x、y，有

$$(ax^2y^2+b)+(a(x+y)^2+b)\geqslant(ax^2+b)(ay^2+b). \quad ①$$

先寻找 a、b 所满足的必要条件.

在①式中令 $y=0$，得 $b+(ax^2+b)\geqslant(ax^2+b)\cdot b$，即对任意实数 x，有

$$(1-b)ax^2+b(2-b)\geqslant 0.$$

由于 $a>0$，故 ax^2 可取到任意大的正值，因此必有 $1-b\geqslant 0$，即 $0<b\leqslant 1$.

在①式中再令 $y=-x$，得 $(ax^4+b)+b\geqslant(ax^2+b)^2$，即对任意实数 x，有

$$(a-a^2)x^4-2abx^2+(2b-b^2)\geqslant 0. \quad ②$$

将②的左边记为 $g(x)$. 显然 $a-a^2\neq 0$(否则，由 $a>0$ 可知 $a=1$，此时 $g(x)=-2bx^2+(2b-b^2)$，其中 $b>0$，故 $g(x)$ 可取到负值，矛盾)，于是

$$\begin{aligned} g(x) &= (a-a^2)\left(x^2-\frac{ab}{a-a^2}\right)^2-\frac{(ab)^2}{a-a^2}+(2b-b^2) \\ &= (a-a^2)\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b) \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

对一切实数 x 成立，从而必有 $a-a^2>0$，即 $0<a<1$.

进一步，考虑到此时 $\frac{b}{1-a}>0$，再根据

$$g\left(\sqrt{\frac{b}{1-a}}\right)=\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geqslant 0,$$

可得 $2a+b\leqslant 2$.

至此，求得 a、b 满足的必要条件如下：

$$0<b\leqslant 1,\ 0<a<1,\ 2a+b\leqslant 2. \quad ③$$

下面证明，对满足③的任意实数对 (a,b) 以及任意实数 x、y，总有①成立，即

$$h(x,y)=(a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(x^2+y^2)+2axy+(2b-b^2)$$

对任意 x、y 取非负值.

事实上，在③成立时，有 $a(1-b)\geqslant 0$，$a-a^2>0$，$\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geqslant 0$，再结合 $x^2+y^2\geqslant -2xy$，可得

$$\begin{aligned} h(x,y) &\geqslant (a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(-2xy)+2axy+(2b-b^2) \\ &= (a-a^2)x^2y^2+2abxy+(2b-b^2) \\ &= (a-a^2)\left(xy+\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geqslant 0. \end{aligned}$$

综上所述，所求的正实数对 (a,b) 全体为

$$\{(a,b)\mid 0<b\leqslant 1,\ 0<a<1,\ 2a+b\leqslant 2\}.$$