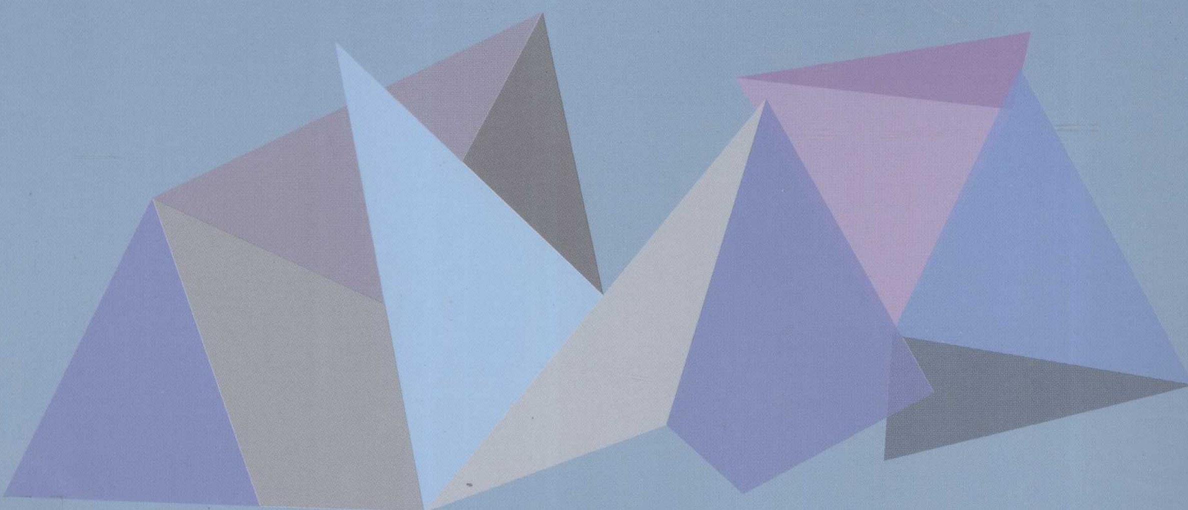
线性代数与空间解析几何案例教程

陈东升 主编



科学出版社

线性代数与空间解析几何案例教程

主编　陈东升
参编　辛向军　马艳琴　陈明璨

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《线性代数与空间解析几何及其应用》的辅导教材，对线性代数与空间解析几何课程的基本概念、重点难点、疑难问题进行总结、归纳和分析. 全书共六章，包括：矩阵的运算及其初等变换、行列式与逆矩阵、几何向量平面与直线、n 维向量与线性方程组、特征值与特征向量、二次型与二次曲面. 书中对经典例题和考研题进行了较详细的分析和求解，归纳总结了线性代数与空间解析几何中分析问题和处理问题的基本方法和技巧，并通过应用案例解析及 MATLAB 实现，把抽象、冗繁、枯燥的理论知识与实际应用紧密联系起来，提高学生解决实际问题的能力.

本书可作为线性代数与空间解析几何课程的教学参考、辅导书籍，也可作为高等院校理工科和经管类各专业的线性代数课程辅导教材，还可供考研生、自学者和工程技术人员自学参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何案例教程/陈东升主编. —北京：科学出版社，2014

ISBN 978-7-03-041293-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①线性代数-教材 ②立体几何-教材 Ⅳ.①O151.2 ②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 140277 号

责任编辑：相 凌 李 萍／责任校对：桂伟利

责任印制：肖 兴／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2014 年 8 月第一次印刷 印张：16 3/4

字数：397 000

定价：34.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

"线性代数"是讨论 $\mathbf{R}^n$ 空间的理论课程，而"空间解析几何"是以三维几何空间 $\mathbf{R}^3$ 为模型，研究用代数方法解决几何问题.电影电视中引人入胜的动画制作，工程技术中日益推广的计算机辅助设计(CAD)、科学计算的可视化等，它们的基本数学工具都是解析几何与线性代数.因此有必要把代数与几何间的相互联系、相互渗透进行融合，使之成为一个整体，便于解决生产实际中遇到的问题.

怎样融合？智者见智，各有所长，但基本思想都是由 $\mathbf{R}^3$ 的几何空间过渡到一般的 $\mathbf{R}^n$ 空间.本书则是在矩阵与初等变换的基础上，定义行列式与逆矩阵，再在 $\mathbf{R}^3$ 中研究向量的运算，求平面与直线的方程；然后讨论 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中向量的运算，解线性方程组，计算特征值与特征向量；最后研究二次型并将其应用于二次曲面的分类.由此可以看出矩阵和初等变换在这门课程中的作用.在融合的方式上，本书不求水乳交融，而是在保持两部分内容相对独立的基础上加强相互呼应、联系和渗透.把"代数"与"几何"结合后，怎样讲解？这是一个实际的问题.秉承此念，本书以案例形式把理论融入到实际中，使几何为代数提供直观背景，将线性相关、线性变换与矩阵概念建立在几何直观的基础上.

本书把经典例题和考研题作为案例分析其方法和技巧，通过应用案例引导学生在应用背景下逐步掌握基本概念.案例教学法最早追溯到古希腊、罗马，1870 年美国哈佛大学法学院的兴起，使案例教学法成为一种成熟和系统的教学法.把案例教学法融入数学教学中，使学生摆脱对数学学习的恐惧，学会用数学的思维方式观察周围事物，让学生自己去分析、解决实际问题，很值得研究与探索.应用案例通过数学软件 MATLAB 编程求解，引导学生利用软件解决生产实际中的问题.MATLAB 软件具有强大的功能，它给线性代数中繁琐的计算提供了简单的算法和程序；还可以给出各个工程和经济领域中使用线性代数建模的大量实例以及其解的物理意义；利用它的可视化功能，给线性代数中的概念赋予了几何形象.

为了让学生了解硕士研究生入学考试数学试题中线性代数与空间解析几何所占的比例及试题类型，在考研题方法与技巧案例中介绍了硕士研究生入学考试大纲及考点剖析，考研题案例中的试题标明了"年份-题类-分数"，如"2010-1-20-11 分(或 2010-1-2(2)-4 分)"表示 2010 年研究生入学数学(一)的第 20 题(或 2010 年研究生入学数学(一)的第 2 大题的第(2)小题)，且该题在卷面上所占分数为 11(4)分.

本书可按照书上的编排顺序讲解线性代数与空间解析几何，也可单独讲解"线性代数"或"空间解析几何"，只要在其中进行适当穿插，就能把二者联系起来.因此，它可作为大学非数学专业的本科、专科学生的辅导教材使用.

全书由郑州轻工业学院陈东升编写.郑州轻工业学院数学与信息科学学院教学院长辛向军博士对本书的编写给予了极大的关心和帮助，在百忙中为本书校稿，并提出了许多宝贵意见；黄河科技学院马艳琴做了部分文字编辑及校对工作；河南经贸职业学院陈明璨做了软件部

分的编写及测试工作. 科学出版社、郑州轻工业学院数学与信息科学学院、郑州轻工业学院教务处教材科对本书的出版给予了许多支持和帮助,在此一并表示感谢.

本书对教师教学、辅导,学生学习、考研及工程技术人员的应用,都会起到一定的作用. 它也是数学案例教学的一种新尝试,企盼它能对学生的就业有所帮助.

由于经验不足,水平所限,不妥之处恳切希望广大读者不吝赐教,使本书不断丰富完善.

陈东升

2014 年 8 月

目　　录

第一章　矩阵的运算及其初等变换

一、主要概念、性质、定理

(一) 矩阵的概念

1. 矩阵的主要概念

定义 1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的数，又称为矩阵的**元素**.

(1) 矩阵的表示方法：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$，或者 $(a_{ij}),(b_{ij}),(c_{ij}),\cdots$，或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

(2) 方阵、实矩阵、复矩阵；行矩阵、列矩阵；同型矩阵，矩阵相等，零矩阵，单位矩阵 $\boldsymbol{E}=(\delta_{ij})$，其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n.$

(3) n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}\tag{1-1}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**线性变换**，其中 a_{ij} 是常数，线性变换的系数构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 线性变换和矩阵之间存在着一一对应关系.

(4) 含有 n 个未知量 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

的**系数矩阵** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$、**增广矩阵** $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$、**未知量列矩阵** $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$、**常数项列矩阵** $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$.

2. 几种特殊的方阵

对角矩阵、数量矩阵、上(下)三角矩阵.

3. 行阶梯形矩阵

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足以下条件：

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 有零行(元素全为零的行)，那么零行位于最下方；

(2) 非零行的**非零首元**(自左至右第一个不为零的元素)的列标随行的递增而递增，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行阶梯形矩阵**. 这时称 $\boldsymbol{A}$ 中非零行的行数为 $\boldsymbol{A}$ 的阶梯数，即如下形状的矩阵称为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} *_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & *_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & *_i & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & *_r & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中空白处的元素全为零，$*_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 表示该行中第一个不为零的元素(非零首元)，每行的非零首元必在前一行非零首元的右方.

如果行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{A}$ 还满足条件：

(1) 各非零首元全为 1；

(2) 非零首元所在列的其余元素全为 0，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行简化阶梯形矩阵(行最简形矩阵)**.

(二) 矩阵的运算

1. 矩阵的加法

定义 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，其对应元素相加所得到的矩阵 $\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

定义 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$.

矩阵的减法：减去一个矩阵等于加上这个矩阵的负矩阵，即若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

矩阵加法的运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是同型矩阵)：

(1) **加法交换律** $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) **加法结合律** $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{O}$ 是与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵；

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

2. 数乘矩阵

定义 4 以数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素得到的矩阵，称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数量乘积**，简称**数乘**，记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$. 如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，那么 $k\boldsymbol{A}=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

数量矩阵可表示为 $k\boldsymbol{E}$.

数乘运算有下面的运算律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，k,l 为常数)：

(1) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(2) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

(3) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(4) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法运算和数乘运算统称为矩阵的**线性运算**.

3. 矩阵的乘法

定义 5　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{s\times n}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

由定义可知，只有当第一个矩阵（左矩阵）的列数等于第二个矩阵（右矩阵）的行数时，两个矩阵才能相乘.

(1) 行矩阵与列矩阵相乘是一个数，列矩阵与行矩阵相乘是一个方阵.

(2) 线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$ 用矩阵乘积可以表示为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

(3) 线性变换(1-1)写成矩阵形式 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$.

(4) $\boldsymbol{AB}$ 有意义时，$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义. 即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，也可能 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，这说明一般情况下矩阵的乘法不满足交换律，因此矩阵相乘时必须说明顺序，然而对于个别矩阵也可能出现 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，这时称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**. 单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 与任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换. n 阶数量矩阵与任意 n 阶矩阵是可交换.

(5) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

(6) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，一般不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，即消去律不成立.

(7) 以数量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘以一个矩阵相当于用 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素去乘该矩阵.

(8) 同阶的上（下）三角形矩阵的加、减、数乘、乘积仍是同阶的上（下）三角形矩阵.

矩阵的乘法虽然不满足交换律及消去律，但仍满足下列结合律和分配律（假设运算都是可行的）：

(9) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(10) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

(11) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$（其中 k 为数）.

4. 方阵的幂

定义 6　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，m 是正整数，m 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘称为 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次幂，记为 $\boldsymbol{A}^m$，即 $\boldsymbol{A}^m=\overbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}^{m个}$. 规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$.

方阵的幂满足以下运算律：

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$，其中 k,l 为正整数.

因为矩阵乘法一般不满足交换律，所以对于两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，一般来说

$$(\boldsymbol{AB})^k \neq \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B}^k.$$

定义 7 设 $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是 x 的 k 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **k 次多项式**.

(1) $\boldsymbol{E}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位方阵，而且 $f(\boldsymbol{A})$ 也是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的方阵.

(2) 若 $f(x)$，$g(x)$ 为多项式，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$. 一般

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B})\neq g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A}).$$

5. 矩阵的转置

定义 8 将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与列互换所得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

矩阵的转置满足下述运算律(假设运算都是可行的)：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$($k$ 为数)；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

可以把(2)、(4)推广到有限个矩阵的情形，即

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}},\quad (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{s-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A})$，即 $a_{ij}=a_{ji}(a_{ij}=-a_{ji})(i,j=1,2,\cdots,n)$，那么称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵(反对称矩阵)**. 两个同阶对称矩阵(反对称矩阵)的和还是对称矩阵(反对称矩阵)，对称矩阵(反对称矩阵)与数的乘积也是对称矩阵(反对称矩阵). 但是，两个对称矩阵(反对称矩阵)的乘积不一定是对称矩阵(反对称矩阵).

6. 共轭矩阵

定义 9 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 为复数，若 $\bar{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，则称矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\bar{a}_{ij})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**共轭矩阵**.

共轭矩阵的性质：

(1) $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $\overline{k\boldsymbol{A}}=\bar{k}\overline{\boldsymbol{A}}$($k$ 是复数)；

(3) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$;

(4) $\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}$;

(5) $(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}=\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}$，$(\overline{\boldsymbol{AB}})^{\mathrm{T}}=(\overline{\boldsymbol{B}})^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}$.

(三) 矩阵分块法

1. 矩阵的分块

在处理阶数较高的矩阵运算时，常采用分块法使大矩阵的运算化成小矩阵的运算. 我们将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**. 注意分割线的纵横线必须分割到底.

考虑矩阵分块的原则是使分块后的子矩阵中有便于利用的特殊矩阵，如单位矩阵、零矩阵、对角矩阵、三角矩阵等. 如果把分块矩阵的每一子块当成矩阵的一个元素，可以按矩阵的运算法则建立分块矩阵对应的运算法则，下面讨论分块矩阵的运算.

2. 分块运算

(1) **分块加法** 设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与$\boldsymbol{B}_{ij}$ 是同型矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}$.

(2) **分块数乘**　设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$,$k$ 为常数,则 $k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$.

(3) **分块乘法**　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 矩阵,分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}\ (i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,r)$.

注　$\boldsymbol{A}$ 关于列的分块方式与 $\boldsymbol{B}$ 关于行的分块方式完全相同,至于 $\boldsymbol{A}$ 关于行的分块方式与 $\boldsymbol{B}$ 关于列的分块方式没有任何要求.

(4) **分块转置**　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

即分块矩阵的转置,是将它的行列依次互换,同时将各子块转置.

(5) **分块对角阵**　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,又 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有主对角线上有非零子块,其余子块都是零矩阵,且非零子块都是方阵,即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$,其中每一个 $\boldsymbol{A}_i\,(i=1,2,\cdots,s)$都是方阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 是**分块对角阵**,也称为**准对角矩阵**. 分块对角矩阵的乘积还是分块对角矩阵.

3. 按行分块与按列分块

(1) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$,它有 m 行,若第 i 行记作 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,$

a_{in})($i=1,2,\cdots,m$),则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 便记为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

同理,$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 列,若第 j 列记为 $\boldsymbol{\beta}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$($j=1,2,\cdots,n$),则

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n).$$

(2) 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 按分块矩阵的记法,可记为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{b})$,其中 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列.

①如果把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分成 m 块,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可记作 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$,这就相当于把每个方程 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$ 记作 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=b_i$($i=1,2,\cdots,m$).

②如果把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分成 n 块,与 $\boldsymbol{A}$ 相乘的 $\boldsymbol{x}$ 应对应地按行分成 n 块,从而线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可记作$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$,即 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{b}$.

(3) 以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的结果是 $\boldsymbol{A}$ 的每一行乘以 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 中与该行对应的对角元;以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的结果是 $\boldsymbol{A}$ 的每一列乘以 $\boldsymbol{\Lambda}_m$ 中与该列对应的对角元.

(四) 矩阵的初等变换

1. 初等变换

(1) **线性方程组的初等变换** 中学阶段我们学过二、三元方程组用的加减消元法和代入消元法,它们是通过对方程组作一系列变换,消去一些方程中的若干个未知量(称为消元),把方程组化成易于求解的同解的阶梯形方程组. 在变换过程中我们对方程组实施了以下三种变换:

①互换两个方程的位置;

②用一个非零数乘某一个方程;

③把一个方程的倍数加到另一个方程上去.

我们把这三种变换称为**线性方程组的初等变换**,可验证线性方程组的初等变换是同解变换. 因此,经过初等变换,把原方程组变成阶梯形方程组,然后去解阶梯形方程组,求得的解就是原方程组的解.

消元法解线性方程组的过程,可以转化为对线性方程组的系数矩阵或增广矩阵进行初等行变换来求解.

(2) **矩阵的初等行变换**

①互换两行(互换 i,j 两行,记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

②以非零数乘某一行(第 i 行乘不为零的数 k,记作 $r_i \times k$,有时也简记成 kr_i);

③把某一行所有元素的 k 倍加到另一行的对应元素上(第 j 行 k 倍加到第 i 行上,记作 $r_i + kr_j$ 或 $r_i + r_j k$).

把上述变换中的"行"换成"列",即得矩阵的**初等列变换**的定义(所用记号是把"r"换成"c").

矩阵的初等行变换与初等列变换,统称矩阵的**初等变换**.

定义 10　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**,记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

矩阵的等价关系具有下列性质:

①**反身性**　$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$;

②**对称性**　若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$;

③**传递性**　若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

(3) **标准形**　对于任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$,总可以经过有限次初等行变换把它变为行阶梯形矩阵与行最简形矩阵,若对行最简形矩阵再施以初等列变换,可变成一种形式更简单的矩阵 $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{m \times n}$,称为 $\boldsymbol{A}$ 的**标准形**,其特点是左上角是一个单位矩阵,其余元素全为 0. 标准形由 m,n,r 三个数完全确定,其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数. 所有与 $\boldsymbol{A}$ 等价的矩阵组成一个集合,称为一个**等价类**,标准形 $\boldsymbol{F}$ 就是这个等价类中形状最简单的矩阵.

2. *初等矩阵*

定义 11　由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

(1) 把单位矩阵中第 i,j 两行对调,得第一种类型的初等矩阵,记作 $\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) 以非零数 k 乘单位矩阵的第 i 行(列),得到第二种类型的初等矩阵,记作 $\boldsymbol{E}(i(k))$;

(3) 以数 k 乘单位矩阵的第 j 行加到第 i 行上(第 i 列乘 k 加到第 j 列上)得到第三种类型的初等矩阵,记作 $\boldsymbol{E}(j(k),i)$.

定理 1　设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$,则

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换,得到的矩阵等于用同种的 m 阶初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$;

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等列变换,得到的矩阵等于用同种的 n 阶初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$.

二、重点、难点解读

(1) 掌握矩阵的运算(加法、数乘、乘法、方幂、转置)以及它们的运算律,是本章的重点之一. 矩阵运算和熟知的数的运算律有些是相同的,但也有许多不同之处,这些不同之处正是容易犯错的地方. 矩阵的乘法运算是矩阵运算中的重中之重,学习时要注意以下四点:

①只有当左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘;

②一般情况下,矩阵乘法不满足交换律,即 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的;

③两个不为 $\boldsymbol{O}$ 的矩阵的乘积可能为 $\boldsymbol{O}$;

④一般地,矩阵乘法不满足消去律,即当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ 时,不一定有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

(2) 分块矩阵的运算是矩阵运算的一个重要技巧,它把大型矩阵的运算转化为若干个小型矩阵的运算,使运算更为简明,意义更为明确. 为了保证分块矩阵能够运算,必须注意分块的

方法，特别是分块矩阵的乘法.

(3) 初等变换在线性代数计算中占有重要地位，求逆矩阵、求矩阵的秩、求解方程组、求向量组的秩与极大无关组、化简二次型等，都要利用初等变换，应熟练掌握，使计算正确无误. 利用初等矩阵，可将对矩阵的初等变换转化成矩阵的乘法，而不限于语言或符号来表达，这在矩阵中具有重要的作用. 要求会用矩阵乘法来表达初等变换.

(4) 消元法的思想就是利用方程组的初等变换将原方程组化为阶梯(形)方程组，而这个阶梯(形)方程组与原方程组同解，解这个阶梯(形)方程组即可求出原方程组的解. 方程组的初等变换与方程组对应的矩阵的初等行变换是一致的.

三、疑难问题解答

问题 1　矩阵运算中，哪些运算律可能不成立(表 1-1)？

表 1-1　矩阵运算律问题表

可能不成立的结论	原因或例	成立的条件
$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$	(1)$\boldsymbol{AB}$ 有意义，$\boldsymbol{BA}$ 无意义 (2)$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有意义，阶数不相等 (3)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}$	
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$	$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$	$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$	$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$	$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$
$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$	$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$	$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k\neq\boldsymbol{A}^k+\mathrm{C}_k^1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}$ $+\cdots+\mathrm{C}_k^{k-1}\boldsymbol{AB}^{k-1}+\boldsymbol{B}^k$	$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$	$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$
$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$	$\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ $\boldsymbol{B}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$
$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{CA}$， $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{A}$ 可逆时
$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

续表

可能不成立的结论	原因或例	成立的条件
$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\pm\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$	
$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$ 推不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$	$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$	$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵

问题 2　本章的重要方法有哪些?

答　矩阵的理论和方法几乎贯穿本课程的始终.矩阵运算的方法,化矩阵为行阶梯形矩阵,或行简化阶梯形矩阵,或标准形的方法,都会在后续章节的学习中用到,读者应熟练掌握和应用.

利用初等变换化 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行阶梯形矩阵、行简化阶梯形矩阵和标准形是线性代数课程中一个非常重要的方法,可先从左边的非零列开始,不妨假设就是 $\boldsymbol{A}$ 的第一列,即 $\boldsymbol{A}$ 的第一列元素不全为零,于是总可以用交换两行的变换,使得 $a_{11}\neq0$,于是把第一行的$\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$倍加到第 $i(i=2,3,\cdots,m)$行,就把第一列 a_{11} 以下的元素全化为零,即

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)r_1}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a'_{22}&\cdots&a'_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a'_{m2}&\cdots&a'_{mn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

再对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 右下角的$(m-1)\times(n-1)$矩阵重复上面的做法,这样,经过有限次初等变换,就可以把 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵.进一步又可以把行阶梯形矩阵化为行简化阶梯形矩阵,若对行简化阶梯形矩阵进行列变换,就可以化成标准形.

问题 3　如何理解线性变换与矩阵间的关系?

答　(1) 从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n,\end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$称为线性变换的矩阵,线性变换和矩阵之间是一一对应的.

(2) 设从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换