普通高等教育"十二五"规划教材
普通高等学校数学教学丛书

高等数学典型问题与应用案例剖析

（下册）

张志海　范　杰　刘晓辉　刘立民　主　编
贾瑞娟　董玉振　潘　伟　副主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材
普通高等学校数学教学丛书

高等数学典型问题与应用案例剖析

（下册）

张志海　范　杰　刘晓辉　刘立民　主　编
贾瑞娟　董玉振　潘　伟　副主编

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书按照教育部颁发的《数学课程教学基本要求》和《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》，认真总结多年来积累的教学和考研辅导经验，通过对教学内容的分析、总结，对题型和具体题目的认真筛选编写而成.

全书分上、下两册，下册共11讲. 每讲基本包括考纲要求、基本概念、常用性质及结论、常见问题和处理方法及技巧、解题应注意的问题，并通过案例对其如何用于求解具体问题进行体验和说明，以达到揭示解题规律，归纳、总结解题方法的目的.

本书是高等数学习题课教材，也可作为工科各专业本科生学习高等数学课程的学习指导教材以及备考研究生的复习资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型问题与应用案例剖析. 下册/张志海等主编. —北京：科学出版社，2015.7

普通高等教育"十二五"规划教材·普通高等学校数学教学丛书

ISBN 978-7-03-044827-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第124441号

责任编辑：王胡权 / 责任校对：蒋　萍

责任印制：霍　兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2015年7月第 一 版　开本：720×1000 1/16

2015年7月第一次印刷　印张：15

字数：302 000

定价：29.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

第六章　不定积分

《考纲》要求

原函数和不定积分的概念，不定积分的基本性质，基本积分公式，不定积分的换元法和分部积分法，有理函数，三角有理式和简单无理式的积分方法.

习题课 14　不定积分的概念及计算

一、基本概念及注释

原函数

定义　设函数 $f(x)$是定义在某区间 I 上的函数，若存在 $F(x)$，使得 $\forall x\in I$，有 $F'(x)=f(x)$，则 $F(x)$称为 $f(x)$在区间 I 上的一个原函数.

该定义提供了判别一个函数是否为 $f(x)$的原函数的标准，但非构造性，即未给出求原函数的方法.

注 1　$f(x)$的原函数与区间 I 有关，同一个函数 $f(x)$在不同的区间上的原函数也不尽相同. 例如，设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ \sin x, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

则函数在区间$(0,+\infty)$上的一个原函数为$\dfrac{(x+1)^2}{2}$，而在区间$(-\infty,0]$上的一个原函数为$-\cos x$.

注 2　同一区间上，$f(x)$的原函数之间仅相差一常数.

注 3　$f(x)$的原函数 $F(x)$在区间 I 上连续、可导.

注 4　$f(x)$的原函数全体所成的函数族$\{F(x)+C\}$称为函数 $f(x)$在区间 I 上的不定积分，记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C,$$

其中，$F(x)+C$ 只是函数族$\{F(x)+C\}$的一种记法，此记法的优点是可以摆脱集合的繁杂运算，而将不定积分的运算在函数族的意义下归结为函数间的运算.

注 5　区间 I 上的连续函数必存在原函数，其一可表为

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x,\quad a,x\in I.$$

由原函数和不定积分的概念，结合求导运算及结果，不难获得不定积分的运算性质和一些基本求积公式.

二、求不定积分的方法

1. 分段函数不定积分的求法

一般地，先根据各区间段上的函数表达式，求出相应区间段的不定积分，再根据函数在整个区间上的原函数是连续函数的性质，实现各区间段上的不定积分中常数的统一.

例 1　设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$$

求函数的不定积分.

解　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\int x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C_1$；

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$\int(2-x)\mathrm{d}x=2x-\dfrac{x^2}{2}+C_2$，且

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)=\frac{1}{3}+C_1,\quad \lim_{x\to 1+0}\left(2x-\frac{x^2}{2}+C_2\right)=\frac{3}{2}+C_2.$$

由原函数的连续性可知，$C_1=\dfrac{7}{6}+C_2$. 故所求不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{7}{6}+C_2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}+C_2, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

例 2　设 $f'(\ln x)=\begin{cases} 1, & 0<x\leqslant 1, \\ x, & 1<x<+\infty, \end{cases}$ 求 $f(x)$.

解　因为

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x\leqslant 0, \\ \mathrm{e}^x, & x>0. \end{cases}$$

所以，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x+C_1$，当 $x>0$ 时，$f(x)=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C_2$.

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=C_1,\quad \lim_{x\to 0+0}f(x)=1+C_2,$$

所以 $C_1=C_2+1$.

故

$$f(x)=\begin{cases} x+1+C_2, & x\leqslant 0, \\ e^x+C_2, & x>0. \end{cases}$$

2. 求不定积分的直接法

利用初等数学手段，如加一项减一项、恒等转换、分解、组合等化简被积函数，使之能够直接利用基本求积公式及已得积分结果.

例 3　求下列函数的不定积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x-1}{\tan x+1}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int e^x 3^x\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int e^{2x^2+\ln x}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+\arctan x+C$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x-1}{\tan x+1}\mathrm{d}x=\int(\tan^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-2x+C$;

(4) $\displaystyle\int e^x 3^x\mathrm{d}x=\int (3e)^x\mathrm{d}x=\frac{(3e)^x}{\ln 3e}+C$;

(5) $\displaystyle\int e^{2x^2+\ln x}\mathrm{d}x=\int xe^{2x^2}\mathrm{d}x=\frac{e^{2x^2}}{4}+C$.

3. 换元积分法

第一换元积分法（凑微法）　该法针对 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 直接积分困难，而被积函数

$$g(x)=f(\phi(x))\phi'(x),$$

此时

$$\int g(x)\mathrm{d}x=\int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F(\phi(x))+C.$$

凑微法作为一重要的积分方法，其应用的基础是熟记基本求积公式，熟悉以往的函数求导结果的表达式结构，善于总结已得积分结果的被积函数类型. 常见的几

种凑微分的形式如下.

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\ (a\neq 0);$$

$$\int f(ax^n)x^{n-1}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{na}f(ax^n)\mathrm{d}(ax^n)\ (a\neq 0);$$

$$\int f(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int 2f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x};$$

$$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x);$$

$$\int f(\arccos x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=-\int f(\arccos x)\mathrm{d}(\arccos x);$$

$$\int f(\arctan x)\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x);$$

$$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x);$$

$$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x);$$

$$\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x);$$

$$\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x);$$

$$\int f(\sec x)\sec x\tan x\mathrm{d}x=\int f(\sec x)\mathrm{d}(\sec x);$$

$$\int f(\csc x)\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\int f(\csc x)\mathrm{d}(\csc x);$$

$$\int f(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\int f(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))\mathrm{d}(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))$$

等等.

例 4 求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\mathrm{d}x$； (2) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$； (4) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}dx = \int[\ln(x+1)-\ln x]\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \int(\ln(x+1)-\ln x)d(\ln x-\ln(x+1))$$

$$=-\frac{(\ln(x+1)-\ln x)^2}{2}+C.$$

(2) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C.$$

(3) $\int e^{x+e^x}dx = \int e^{e^x}e^x dx = \int e^u du = e^u + C = e^{e^x}+C.$

(4) $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx = \int\sqrt{u}du$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{u^3}+C$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))^3}+C.$$

凑微法的运行并不是孤立的,往往与其他方法结合起来使用.

例 5　求下列不定积分.

(1) $\int x\sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{4}\int(2x+1-1)\sqrt{2x+1}d(2x+1)$

$$=\frac{1}{4}\int(u-1)\sqrt{u}du$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int u^{\frac{3}{2}}du-\int\sqrt{u}du\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{10}\sqrt{(2x+1)^5}-\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}+C.$$

(2) $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{\sin x+\cos x+\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C.$$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.$

(4) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C.$

第二换元积分法　该法运行的步骤是：寻求适当的变换 $u=\phi(x)$进行如下换元

$$\int f(u)\mathrm{d}u = \int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C = F(\phi^{-1}(u))+C,$$

对变换 $u=\phi(x)$的要求是：$u=\phi(x)$在相应的区间上单调、可导，且 $\phi'(x)\neq 0$，该法运行的难度是变换的适当选取. 常用的变换有如下几种.

(1) 三角函数代换.

使用的对象是被积函数中含有根式，目的是通过三角函数代换去掉根式.

例 6　求下列不定积分

(1) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$；　　　(2) $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x$；　　　(4) $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　(1) 作变换 $x=\sin t, \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\sin t\cos t\mathrm{d}t}{(\sin^2 t+1)\cos t} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{(2-\cos^2 t)} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{\sqrt{2}-\cos t} + \frac{1}{\sqrt{2}+\cos t}\right)\mathrm{d}(\cos t) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right| + C \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}\right| + C.
\end{aligned}$$

(2) 作变换 $x=\tan t, \mathrm{d}x=\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\tan^3 t}{\sec^3 t}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t) \\
&= \frac{1}{\cos t}+\cos t+C = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}+C.
\end{aligned}$$

(3) 作变换 $x=a\sec t$,则

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{a\tan t}{a^4\sec^4 t}a\sec t\tan t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3a^2}\sin^3 t+C=\frac{1}{3a^2}\left[\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right]^3+C.$$

(4) 作变换 $x=\sin t$,则

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t=\int\left(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)\mathrm{d}t=t-\tan\frac{t}{2}+C$$

$$=\arcsin x-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

(2) 倒代换.

使用倒代换往往处理被积函数中分母关于 x 的次数大于分子关于 x 的次数的不定积分问题,其结果常使被积函数保持一部分维持原型,另一部分转到分子上去.

例 7　求不定积分

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$;　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解　(1) 作倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}=-\int\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{-1}{1+t^2}+1-t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\arctan t+t-\frac{t^3}{3}+C$$

$$=-\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C.$$

(2) 作倒代换 $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{t}$,则

$$\text{原式}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^3}}=-\int\frac{t}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{4}t^2\right)^3}}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{3}{4}t^2+1\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{4}t^2\right)^3}}=\frac{4}{3}\left(1+\frac{3}{4}t^2\right)^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}+C.$$

(3) 其他代换.

根据被积函数的结构选取适当变换.

例 8 求不定积分$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x$.

解 作变换 $x=t^6$,则

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=6(t-\arctan t)+C$$
$$=6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C.$$

4. 分部积分法

分部积分法来源于两个函数乘积的求导公式:

$$(uv)'=u'v+uv',$$

使用的范围一般是被积函数由不同结构的函数乘积组成,如$\int P_n(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$,$\int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x$,$\int P_n(x)\cos bx\mathrm{d}x$,$\int P_n(x)\ln x\mathrm{d}x$,$\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$,$\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$ 等,其中,$P_n(x)$ 为 n 次多项式. 其公式为

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x.$$

使用的原则如下.

1) $\int v'\mathrm{d}x$ 易求,且只需求出一个原函数即可.

2) $\int vu'\mathrm{d}x$ 能求出,至少能使被积函数的表达式简化.

例 9 求下列不定积分

(1) $\int\frac{\ln^3x}{x^2}\mathrm{d}x$; (2) $\int x\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int\frac{\ln^3x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^3x}{x}+\int3\frac{\ln^2x}{x^2}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{\ln^3x}{x}-\frac{3\ln^2x}{x}+\int6\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\ln^3x}{x}-\frac{3\ln^2x}{x}-\frac{6\ln x}{x}+\int6\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\ln^3x}{x}-\frac{3\ln^2x}{x}-\frac{6\ln x}{x}-\frac{6}{x}+C.$$

此题若选 $v'=\ln^3 x$，则求其原函数本身就是一个困难.

(2) $\int xe^x\cos x\,dx = e^x x\cos x-\int e^x(\cos x - x\sin x)\,dx$

$$= e^x x\cos x + e^x x\sin x - \int e^x(\sin x + x\cos x)\,dx - \int e^x\cos x\,dx$$

$$= e^x x\cos x + e^x x\sin x - e^x\sin x - \int e^x x\cos x\,dx,$$

故

$$\int xe^x\cos x\,dx = \frac{e^x x(\cos x+\sin x)-e^x\sin x}{2}+C.$$

此题 v' 可选为 $\cos x$，亦可选为 $e^x\cos x$，但不能选为 x，否则会使被积函数的结构更复杂.

由例 8 和例 9 不难获知：①分部积分法可连续使用；②使用的过程中有可能造成某一部分积分自然消失. 这就要求在每一步运行中始终关注所出现的被积函数的结构，对某些问题它显得很重要. 例如：

$$\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx = \int e^{2x}\sec^2 x\,dx + 2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

$$= e^{2x}\tan x - 2\int e^{2x}\tan x\,dx + 2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

$$= e^{2x}\tan x + C.$$

$$\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int e^x\frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int\frac{e^x}{\sin^2 x}\,dx + \int\frac{e^x}{\sin x}\,dx - \int e^x\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx - \int e^x\cot x\,dx$$

$$= -e^x\cot x + \int e^x\cot x\,dx + \int\frac{e^x}{\sin x}\,dx + \frac{e^x}{\sin x}$$

$$- \int\frac{e^x}{\sin x}\,dx - \int e^x\cot x\,dx$$

$$= \frac{e^x}{\sin x} - e^x\cot x + C.$$

正是注意了被积函数的结构，才使得我们摆脱了求 $\int e^{2x}\tan x\,dx$ 的困难. 另外，由此题可知，当积分因相互抵消而使一端有积分号，一端无积分号时，应注意常数 C 的添加.

3) 运行分部积分法若干次后，有可能又回到原式，这是分部积分法所特有的循环现象，若出现此现象，往往会导致三种结果：

(1) 左右两端相同的项前边符号相异，移项即得结果；

(2) 当被积函数中含有自然数 n 时,有望得递推公式;

(3) 左右两端相同的项前边符号相同,分部积分法失效.

例 10　求积分

$$I_n = \int \tan^{2n} x \, dx.$$

解

$$I_n = \int \tan^{2(n-1)} x \tan^2 x dx = \int \tan^{2(n-1)} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2n-1} \tan^{2n-1} x - \int \tan^{2(n-1)} x dx$$

$$= \frac{1}{2n-1} \tan^{2n-1} x - I_{n-1}.$$

例 11　求积分

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx.$$

解　(分析:此题按换元法马上得出结果)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln | \sin x | + C.$$

但若使用分步积分法,则有

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = 1 + \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} \cos x dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

此时预示分步积分法失效.

有理函数、三角有理式、简单无理式得积分,虽有固定的求解方法和固定的转换为有理函数积分的变换,但方法的实际操作一般比较麻烦,因此,一旦遇到这类问题,仍然是以前边的方法为主,万不得已,再按所给方法,按部就班地运行.

例 12　求积分

(1) $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx$;　　(2) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx$.

解　(1)(分析:此题虽为有理函数的积分,但若按有理函数分解再求积分的方法将是比较繁琐的)令 $u = x^4$,则有

$$\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{u^2}{u^2+3u+2}\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u+2}\right)\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{4}(u+\ln|u+1|-4\ln|u+2|)+C$$
$$= \frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}(\ln|1+x^4|-4\ln|2+x^4|)+C.$$

(2)(此题属三角有理式的积分,若采用万能代换将三角有理式转为有理函数,再按有理函数积分法是比较繁琐的)

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x} - \tan x + x + C.$$

(3)(此题属无理式)

$$\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{1}\mathrm{d}x$$
$$= \int (x+1)\sqrt{x}\mathrm{d}x - \int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$$
$$= \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x + \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x - \int (x+1-1)\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

三、处理问题时的方法及应注意的问题

1. 原函数中出现对数函数时,最好加绝对值

例 13　求不定积分 $\int \frac{\cot x}{\ln\sin x}\mathrm{d}x$.

解　原式 $= \int \frac{\mathrm{d}\ln\sin x}{\ln\sin x} = \ln|\ln\sin x| + C.$

2. 被积函数为多项式与 $\sqrt{x^2+ax+b}$ 形式

例 14　求不定积分

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}}\mathrm{d}x.$$

解　原式 $= \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\mathrm{d}(x^2+2x+3)+\int\frac{2}{\sqrt{2+(x+1)^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{x^2+2x+3}+2\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{2}}\right)+C.$$

例 15 求不定积分

$$\int\frac{x^3+2x^2+2x-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}\mathrm{d}x.$$

解 原式$=\int\frac{x(x^2+2x+3)-(x+3)}{\sqrt{x^2+2x+3}}\mathrm{d}x$

$$=\int x\sqrt{x^2+2x+3}\mathrm{d}x-\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+2x+3}\mathrm{d}(x^2+2x+3)-\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$$

$$-\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x+3)^3}-\frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{2}}\right.$$

$$\left.-\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{2}}\right)\right]-\sqrt{x^2+2x+3}$$

$$-2\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{2}}\right)+C.$$

3. 需注意 x 的取值范围,分别考虑

例 16 求不定积分$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$, $|x|>1$.

解 当 $x>1$ 时,

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\xlongequal{u=\frac{1}{x}}-\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

当 $x<-1$ 时,

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

4. 注意 n 的不同取值对原函数表达式的影响

例 17　求不定积分

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin 2x)^n}\mathrm{d}x.$$

解　原式 $=\int \dfrac{\cos x-\sin x}{(\cos x+\sin x)^{2n}}\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\ln|\cos x+\sin x|+C, & n=\dfrac{1}{2},\\[2ex] \dfrac{1}{1-2n}(\cos x+\sin x)^{-2n+1}+C, & n\neq\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

5. 注意处理方法的相互结合

例 18　设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，求 $\int x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解　$\int x^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}f(x)-\int \dfrac{x^3}{3}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，而

$$\int \frac{x^3}{3}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{u}{6}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-\frac{u}{6}\mathrm{e}^{-u}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-u}+C=-\frac{1}{6}[x^2\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-x^2}]+C,$$

所以，

$$\int x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}f(x)+\frac{1}{6}[x^2\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-x^2}]+C.$$

例 19　设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，求 $\int \dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$.

解　因为

$$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C,$$

所以，对上式求导可解得

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},$$

故

$$\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C.$$

例 20　已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，且其上任意一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$，求 $f(x)$.