普通高等教育“十二五”规划教材

普通高等学校数学教学丛书

# 高等数学典型问题与应用案例剖析

## （上册）

张志海 梁景翠 杨 珠 张 鸿 主 编

李召群 庞培林 姬红艳 副主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

普通高等学校数学教学丛书

# 高等数学典型问题与应用案例剖析

## （上册）

张志海　梁景翠　杨　珠　张　鸿　主　编

李召群　庞培林　姬红艳　副主编

科学出版社

北　京

## 内 容 简 介

本书按照教育部颁发的《数学课程教学基本要求》和《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》，认真总结多年来积累的教学和考研辅导经验，通过对教学内容的分析、总结，对题型和具体题目的认真筛选编写而成.

全书分上、下两册. 上册共 13 讲，每讲基本包括考纲要求、基本概念、常用性质及结论、常见问题和处理方法及技巧、解题应注意的问题，并通过案例对其如何用于求解具体问题进行体验和说明，以达到揭示解题规律，归纳、总结解题方法的目的.

本书是高等数学习题课教材，也可作为工科各专业本科生学习高等数学课程的学习指导教材以及备考研究生的复习资料.



图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型问题与应用案例剖析. 上册/张志海等主编. 一北京：科学出版社，2015.7

普通高等教育"十二五"规划教材 · 普通高等学校数学教学丛书

ISBN 978-7-03-044830-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 124442 号

责任编辑：王胡权 / 责任校对：蒋 萍
责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

**科学出版社** 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

**文林印务有限公司** 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2015 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 7 月第一次印刷 印张：12 1/4
字数：247 000

**定价：25.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# 前　　言

随着我国高等教育的发展，高等院校本科的招生量逐年扩大，接受高等教育的人越来越多. 高等数学作为高校理、工科学生的一门重要基础课，也作为硕士研究生入学考试的一门重要课程，越来越受到学生们的重视. 如何在大学期间学好高等数学，为后续课程，尤其是专业课程的学习奠定好的基础，进而顺利参加硕士研究生入学考试，取得好成绩，是大学生们最为关心的问题之一，所有这一切都要求大学生们了解高等数学的主要内容，掌握运用数学分析问题，解决问题的方法，分清主次，力求在内容的深度和广度上达到一定的程度.

为了帮助同学们通过复习，深刻理解概念，熟练掌握解题的思路和方法，我们根据教育部近年颁发的《数学课程教学基本要求》和《全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》，认真总结了多年来的教学经验和考研辅导班积累的经验、资料，经过对题型和题目的认真筛选，编写了这本习题课教程.

本书的编写，力求选题精炼，分析透彻，覆盖面广，具体有以下几个特点：

(1) 对基本概念不是简单罗列而是结合具体题目，理解概念与做题之中；

(2) 对基本题型、方法给予总结；

(3) 例题编排由浅入深、循序渐进；

(4) 适当选用了一些往年考研题，努力使其具备适用面广、针对性强、综合性和灵活性明显、重点突出等特点；

(5) 将高等数学与数学建模相结合，选择了部分实际问题，按数学建模的要求以及数学建模的全过程，对案例进行了深入的剖析和讲解.

本书参照张志海等主编，科学出版社出版的《高等数学》(上、下册)而编写，可作为教师教学过程中的习题课参考书，也可作为《高等数学》教材的后续复习参考书和学生考研参考用书.

河北工程大学高等数学教研室的同仁们为本书的编写提出许多好的想法与建议；董卫、王小胜、贾瑞娟、刘国华、田伶改教授审阅了书稿并提出修改意见；科学出版社对本书的编审、出版给予了热情支持和帮助，在此一并致谢.

由于我们水平有限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不当之处，恳请各位同仁和读者批评指正.

编　者

2015 年 3 月于邯郸

# 目　　录

# 第 0 章　数学建模及其重要意义

## 习题课 1　数学建模及其重要意义

数学,作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学,在它产生和发展的历史长河中,一直是与人们生活的实际需要密切相关的.随着电子计算机的出现和不断完善,数学的应用已远远超越物理、力学领域,而逐步深入到经济、生态、人口、交通、社会等更为复杂的问题.许多以定性方法为基础的学科正在走上定量化的道路,数学模型这个词汇也就越来越多地出现了.例如气象工作者时刻离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、云层、雨量、风速等资料建立的数学模型,以便准确的预报天气.企业的经营者需要根据产品的需求情况、生产条件和成本、储存、运输费用等信息而建立的数学模型来合理安排生产和销售,以获取更大的利润.城市的领导者则需要包括人口、经济、交通环境等大系统的数学模型,为城市发展的决策提供科学的依据.甚至于在人们的日常生活中,也希望用一个数学模型,来优化家庭理财、出游安排等.

那么,什么是数学模型呢?数学模型是一种抽象的模拟,它用数学符号、数学式子、程序、图形等刻画客观事物的本质属性与内在联系,也就是对现实问题作出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构.

模型建立后,需将建立起的数学模型,利用数学理论和计算技术进行推演、论证和计算,得到问题的解析解或数值解;最后,用求得的解析解或数值解来解决实际问题.因此,对于广大科学技术人员和应用数学的工作者来说,建立数学模型是沟通摆在面前的实际问题与所掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁.

### 一、数学建模的过程

数学建模过程就是从现实对象到数学模型,再从数学模型回归现实对象的循环,一般通过表述、求解、解释、验证几个阶段完成,数学建模过程和数学模型的求解方法分别如图 0-1,图 0-2 所示.

表述是将现实问题“翻译”成抽象的数学问题,属于归纳.数学模型的求解方法属于演绎.归纳是依据个别现象推出一般规律;演绎是按照普遍原理考察特定对象,导出结论.演绎利用严格的逻辑推理,对解释现象作出科学预见,具有重要意义,但是它要以归纳的结论为前提,只有在公理化形式的前提下才能保证其正确性.因此,归纳和演绎是辩证统一的过程:归纳是演绎的基础,演绎是归纳的指导.

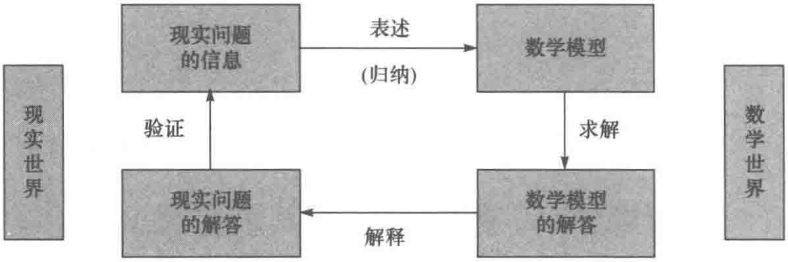


图 0-1　数学建模过程示意图

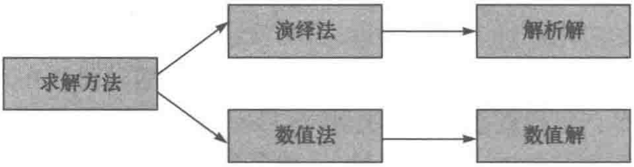


图 0-2　数学模型求解方法示意图

解释是把数学模型的解答“翻译”回到现实对象，给出分析、预报、决策或控制的结果. 最后，作为这个过程重要的一个环节，这些结果需要用实际的信息加以验证.

图 0-1 也解释了现实问题和数学建模的关系. 一方面，数学模型是将现实生活中的现象加以归纳、抽象的产物，它源于现实，又高于现实. 另一方面，只有当数学模型的结果经受住现实问题的检验时，才可以用来指导实践，完成实践—理论—实践这一环节.

## 二、数学建模的一般步骤

一般说来，建立模型需要经过哪几个步骤并没有统一的模式，通常与问题的性质和建模的目的等因素有关. 下面介绍建立数学模型的一般过程，如图 0-3 所示.

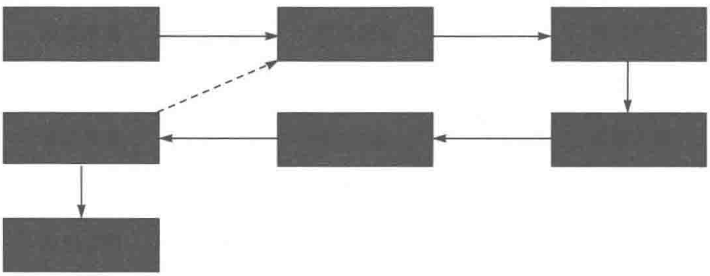

图 0-3　数学建模的一般步骤

1. 模型准备

了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集必要的信息，如数据和现象等，清楚研究对象的主要特征，形成一个比较清晰的“数学问题”.

2. 模型假设

根据先行的特征和建模的目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，作出必要的、合理的、简化的假设，并且要在合理和简化之间做出恰当的折中. 通常提出假设的依据，一是出于问题内在规律的认识；二是来自对现象、数据的分析，以及二者的结合.

3. 模型构成

根据所作的假设，用数学的语言、符号描述对象的内在规律，建立包括常量、变量等数学模型，如优化模型、微分方程模型、差分方程模型、图论模型等. 在建模过程中要遵循“尽量采用简单的数学工具”这一原则，以便更多的人能了解和使用.

4. 模型求解

可以采用解方程、画图形、优化方法、数值计算、统计分析等各种数学方法，特别是当前迅猛发展的数学软件和计算机技术.

5. 模型分析

对求解结果进行数学上的分析，如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的灵敏性分析、对假设的强健性分析等.

6. 模型检验

把求解和分析的结果回归到实际问题中，与实际的现象、数据比较，检验模型的合理性和实用性. 如果结果与实际不符，问题常常出现在模型假设上，此时应该修改、补充假设，重新建立模型并求解.

7. 模型应用

应用的方式与问题性质、建模目的以及最终的结果有关. 应当指出的是，并不是所有问题的建模都要经过这些步骤，有时几个步骤之间的界限也不是那么分明，建模时不要拘泥于形式上的按部就班，要采用灵活的表述形式.

## 三、数学模型的分类

关于数学模型的分类，从不同的角度去刻画可以有不同的分类. 常见的如：

根据模型的应用领域分，有人口模型、交通模型、生态模型、经济模型等.

根据建模的目的分，有描述模型、分析模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等.

根据模型中变量的特征分，有连续模型与离散模型、线性模型与非线性模型、静态模型与动态模型等.

根据建模的数学方法分，有初等数学模型、几何模型、微分方程模型、图论模型等.

根据对模型结构的了解程度分，把研究对象比喻成一只箱子里的机关，按对它们的机理较为清楚、很不清楚、或介于二者之间的情形分为白箱模型、黑箱模型和灰箱模型.

通常，一个较成功的模型不仅应当解释已知现象，还应当能预言一些未知现象，并能被实践所证明. 因而数学建模不是容易的事，它需要相当丰富的知识、经验和各方面的能力，特别需要丰富的想像力和洞察力. 著名科学家爱因斯坦曾说过："想像力比知识更重要，因为知识是有限的，而想像力概括着世界的一切，推动着进步，并且是知识的源泉". 因此，数学建模是能力和知识的综合运用.

## 四、数学建模的重要意义

作为用数学方法解决实际问题的第一步，数学建模自然有着与数学同样悠久的历史，进入 20 世纪以来，随着数学以空前的广度和深度向一切领域渗透，以及计算机的出现和飞速发展，数学建模越来越受到人们的重视，数学建模在现实世界中有着重要的意义.

(1) 在一般工程技术领域，数学建模仍然大有用武之地.

在以声、光、热、力、电这些物理学科为基础的诸如机械、电机、土木、水利等工程技术领域中，数学建模的普遍性和重要性不言而喻. 虽然这里的基本模型是已有的，但由于新技术、新工艺的不断涌现，提出许多需要用数学方法解决的新问题. 高速、大型计算机的飞速发展，使得过去即便有了数学模型也无法求解的课题(如大型水坝的应力计算、中长期天气预报等)也迎刃而解. 建立在数学模型和计算机模拟基础上的 CAD 技术，以其快速、经济、方便等优势，大量地替代了传统工程设计中的现场实验、物理模拟等手段.

(2) 在高新技术领域，数学建模几乎是必不可少的工具.

无论是通信、航天、微电子、自动化等高新技术本身的发展，还是将高新技术用于传统工业区创造新工艺，开发新产品，计算技术支持下的建模和模拟都是经常使

用的有效手段. 数学建模、数值计算和计算机图形等相结合形成的计算机软件,已经被固化于产品中,在许多高新技术领域起着核心作用,被认为是高新技术的特征之一. 在这个意义上,数学不仅仅是许多技术的基础,而且直接走向了技术的前台. 有人认为"高新技术本质上是一种数学技术".

(3) 数学迅速地进入一些新领域,为数学建模开拓了许多处女地.

随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等非物理领域的渗透,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、数学生态学、数学地质学等应运而生. 当用数学方法研究许多领域中的定量关系时,数学建模就成为首要的、关键的步骤,同时也成为这些学科发展与应用的基础. 在这些领域里,建立不同类型、不同方法、不同深浅程度的模型的余地相当大,为数学建模提供了广阔的新天地. 马克思说过:"一门科学只有成功的运用数学时,才算达到了完善的地步". 展望 21 世纪,数学必将大踏步地进入所有学科,数学建模将迎来蓬勃发展的新时期.

美国科学院一位院士总结了将数学转化为生产力过程中的成功与失败,得出了"数学是一种关键的、普遍的、可以应用的技术"的结论,认为数学"由研究到工业领域技术的转化,对加强经济竞争力是有重要意义",因而"计算和建模重新成为中心课题,它们是数学向科学技术转化的主要途径".

鉴于初学者对高等数学及其他学科的了解程度有限,还只能涉及数学建模的很少部分. 高等数学是研究变量和函数的一门数学. 现实世界中许多变量之间有重要的相互依赖关系,这种关系反映了事物发展的根本规律性,而描述这些规律性的最重要的手段就是函数关系. 从客观事物中抽象出函数关系的过程,事实上就是建立数学模型的过程. 在本课程的学习中将可能涉及微分法建模、微分方程建模等方法中的一些简单问题. 所以,高等数学与数学建模有着密切的关系. 读者在集中注意力学习数学问题求解方法的同时,应注意培养自己的想象力和洞察力,增强数学建模的意识,学习建立一些简单的数学模型.

# 第一章　函数及函数极限

**《考纲》要求**

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，简单应用问题的函数关系的建立.

数列极限的 $\varepsilon$-$N$ 定义，函数极限的 $\varepsilon$-$\delta$ 定义和函数的左、右极限，无穷小，无穷大，无穷小的比较，极限四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和零点定理、介值定理).

## 习题课 2　函　　数

### 一、基本概念

对函数概念的描述，同济大学应用数学系所编的《高等数学》第五、六版以映射为基础，给出了函数的定义，但纵观整个高等数学的内容，作为其研究对象的函数，无论是理解还是对它的把握，如下的描述将更为直观，更易接受.

**定义**　设有变量 $x,y$ 和实数集 $D$，若对变量 $x$ 在 $D$ 内任取一值，变量 $y$ 按一定法则 $f$ 总有唯一确定的值与之对应，则称变量 $y$ 为变量 $x$ 的函数，记为 $y=f(x)$，其中 $x$ 称为函数的自变量，$y$ 称为函数的因变量，实数集 $D$ 称为函数的定义域.

关于定义的几点说明：

**注 1**　定义未排除对不同的 $x$ 取值可对应同一个 $y$ 值，故常数可作为函数来看待.

**注 2**　函数概念的本质是变量与变量在取值间的对应，而决定因素是定义的两大要素：①定义域；②函数的对应律. 此两大要素既是函数概念的核心，也是判别两个函数是否是同一个函数的重要依据.

**例 1**　判别如下函数对是否为同一函数.

(1) $y=\log_a x^2$，$y=2\log_a x$；

(2) $y=|x|,y=x$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x},y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

**解**　(1) 因为 $y=\log_a x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y=2\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以两函数的定义域不同，故它们不是同一个函数.

(2) $y=|x|,y=x$ 的定义域皆为 $(-\infty,+\infty)$，但对满足 $x<0$ 的一切 $x$，$|x|\neq x$，故两函数对应律不同，因而不是同一个函数.

(3) 因 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x},y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 的定义域都是 $D=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$，且 $\forall x\in D$ 有

$$y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

所以，它们是同一个函数.

**注 3**　函数符号 $f(x)$ 有两种含义：①表示 $x$ 的函数；②表示函数在 $x$ 处的函数值. 第二种含义常是处理高等数学问题构成其间接法的基础.

**例 2**　已知 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,x\in(-1,1)$，求 $\dfrac{1}{1-x^2}$ 的幂级数展开式.

**解**　$\left(\text{分析：}\dfrac{1}{1-x^2}\text{可视为}\dfrac{1}{1-x}\text{在 }x^2\text{ 处的函数值}\right)$由题中条件可知

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

**注 4**　常量与变量是相对的，在处理问题的某一过程中一个量可能是常量，在另一过程下则可能是变量. 正确理解、把握同一过程下的量与量间的关系，是处理、解决问题的基础.

**例 3**　设 $y=f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x^2)$.

**解**　对任意取定的 $x\neq 0$，将 $x^2$ 代入 $f(x)$ 中(此时 $x$ 应视为取定的定值)，则 $f(x^2)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$(由 $x$ 取值的任意性，此时 $x$ 为函数 $f(x^2)$ 的自变量)，又如

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

在研究、考察极限过程 $\Delta x\to 0$ 时，$x$ 为常量，但求完了极限，$x$ 即为函数 $f'(x)$ 的自变量.

## 二、常用的性质及结论

求解问题时，常需要涉及和利用的函数性质是：①函数的周期性；②函数的奇偶性；③函数的单调性. 常用的结论是五类基本初等函数的定义域及其相关性质.

需要说明的是对函数周期性、奇偶性的考察、利用，在高等数学范围内只能从定义出发.

**例 4** 若函数 $f(x)$对其定义域内的一切 $x$ 恒有 $f(x)=f(2a-x)$或 $f(a+x)=f(a-x)$，则称函数 $f(x)$关于点 $x=a$ 对称(图像关于直线 $x=a$ 对称)，证明：如果函数关于点 $x=a$ 和点 $x=b$ $(a\neq b)$对称，则函数 $f(x)$是周期函数.

**证** 不妨设 $b>a$. 因 $f(x)$对称于点 $x=a,x=b$，所以有

$$f(x)=f(2a-x),\quad f(x)=f(2b-x),$$

即 $f(x)=f(2a-x)=f(2b-2a+x)$对定义域内一切 $x$ 成立，故 $f(x)$以 $2b-2a$ 为周期.

**注 5** 该条件是充分的，非必要的.

高等数学求解问题时，对函数性质常需关注如下三个问题：

(1) 函数的上述性质，在对其施加高等数学的相关运算后还能否继续保持?

(2) 函数的上述性质对高等数学中的相关运算的结果会产生什么影响?

(3) 如何利用此种影响简化运算?

## 三、常见的问题和处理方法

### 1. 函数定义域的求法和依据

因为高等数学以函数为研究对象，而本课程所讨论的函数多为初等函数和各个区间段分别用初等函数表示的分段函数，所以由初等函数的意义，求函数定义域的方法和依据如下.

1) 五类基本初等函数的定义域；

2) 四则运算所得函数的定义域；

若函数 $f(x),g(x)$的定义域分别为 $D_1,D_2$，则 $f(x)\pm g(x)$的定义域为 $D=D_1\cap D_2$；$f(x)\times g(x)$的定义域为 $D=D_1\cap D_2$；$f(x)\div g(x)$的定义域为 $D=\{x\mid x\in D_1\cap D_2,g(x)\neq 0\}$.

3) 复合函数的定义域.

设函数 $y=f(u),u\in D_u,u=\varphi(x),x\in D_x$，则 $y=f(\varphi(x))$的定义域为 $D=\{x\in D_x\mid u=\varphi(x)\in D_u\}$ .

**方法** (1) 函数解析表达式给出时，一切使解析表达式有意义的 $x$ 的全体所成集合即为函数定义域. 具体求解时，应注意分析函数的结构，依次与给定的依据相对应.

(2) 对于实际问题,除依据(1),还需结合问题的实际背景、自变量所具有的实际意义. 例如,函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$,单从数学角度看,其定义域为 $t\in(-\infty,+\infty)$;但如果结合变量 $t$ 所具有的物理意义,则其定义域应为 $t\in[0,+\infty)$.

另外需要注意求函数定义域时必须面对所给函数原形,否则会造成无定义的点的丢失. 例如,函数 $y=\frac{x}{x}$ 经化简变成 $y=1$,而后者的定义域为 $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. 复合函数的三个问题

1) 定义域.

**例5**　求 $y=\arcsin(x^2+a^2)$ 的定义域.

**解**　此函数由 $y=\arcsin u, u=x^2+a^2$ 复合而成,且 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $u\in[-1,1]$.

当 $|a|>1$ 时,对一切 $x$ 的取值皆有 $x^2+a^2>1$,故函数定义域 $D=\varnothing$;

当 $|a|=1$ 时,要使函数有意义,需 $x=0$,故函数定义域 $D=\{0\}$;

当 $|a|<1$ 时,使函数有意义的 $x$ 的取值应满足 $x^2+a^2\leqslant 1$,故函数定义域为

$$D=\{x|\ x^2+a^2\leqslant 1\}.$$

由此例可知:若函数中含有未指明具体取值的参数时,应分析、考察该参数取不同值是否对所讨论的问题产生影响,若有影响,则需划分参数的取值范围分别讨论. 此处理方法将贯穿本课程的始终.

2) 求复合函数的表达式.

求复合函数表达式的一种显而易见的方法是替换代入法,但对分段函数需注意,针对自变量的不同取值,各中间变量相应取值落入的范围.

**例6**　设 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x<0,\\ x^2+x+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(-x)$.

**解**　因为当 $x>0$ 时,$-x<0$,所以 $f(-x)=x^2+x+1$;又当 $x\leqslant 0$ 时,$-x\geqslant 0$,所以 $f(-x)=x^2-x+1$.

故

$$f(-x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\leqslant 0,\\ x^2+x+1, & x>0.\end{cases}$$

3) 已知 $f(\varphi(x))$ 关于 $x$ 的表达式,还原 $f(u)$.

**方法**　(1) 利用反函数 $x=\varphi^{-1}(u)$ 代入;

(2) 拼凑法,即将关于 $x$ 的表达式拼凑成以 $\varphi(x)$ 表达的形状.

**注**　第一种方法常用于理论的研究.

**例 7**　设 $f(e^x+1)=e^{2x}+2e^x-1$,求 $f(x)$.

**解**　法 1　令 $e^x+1=t$,则 $x=\ln(t-1)$,代入得

$$f(t)=e^{2\ln(t-1)}+2e^{\ln(t-1)}-1=(t-1)^2+2(t-1)-1,$$

故 $f(x)=(x-1)^2+2(x-1)-1=x^2-2$.

法 2　$f(e^x+1)=(e^x+1)^2-2$,故 $f(x)=x^2-2$.

### 3. 由给定的函数方程求 $f(x)$

**例 8**　若 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $2f(x)+f(1-x)=x^2$,求 $f(x)$.

**解**　令 $x=1-t$,将其代入所给的方程可得

$$2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,$$

即

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2.$$

将上述方程与给定方程联立并求解方程组可得

$$f(x)=-\frac{1}{3}[(1-x)^2-2x^2].$$

### 4. 分段函数运算

分段函数的特点就是不同区间段上的函数表达式不同,运算时,需利用参加运算的各个分段函数的所有分点重新划分定义区间,实现对定义区间的相同划分,然后再进行运算.

**例 9**　设

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2+2, & 0\leqslant x<2,\\ \ln x, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\sin x, & x<1,\\ e^x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

求 $f(x)+g(x)$.

**解**　利用 0,1,2 三点划分区间 $(-\infty,+\infty)$,则 $f(x)$, $g(x)$ 在新的划分下可表示为

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2+2, & 0\leqslant x<1,\\ x^2+2, & 1\leqslant x<2,\\ \ln x, & x\geqslant 2.\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x<1,\\ e^x, & 1\leqslant x<2,\\ e^x, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

所以，

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} x+1+\sin x, & x<0, \\ x^2+2+\sin x, & 0\leqslant x<1, \\ x^2+2+e^x, & 1\leqslant x<2, \\ \ln x+e^x, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

# 习题课 3　数 列 极 限

## 一、定义及注释

**定义**　设有数列 $\{x_n\}$，若对任意给定的正数 $\varepsilon>0$，总存在正整数 $N$，使得对于 $n>N$ 时的一切 $x_n$，都有不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称常数 $a$ 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，亦称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $a$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

关于定义的几项说明：

**注 1**　$\varepsilon$ 是任意给定的，其作用是用来刻画变量 $x_n$ 与 $a$ 的接近程度.

$\varepsilon$ 的取值的任意性意味着取之前可任意选取，它恰恰体现了变量 $x_n$ 与 $a$ 可无限接近.

$\varepsilon$ 取值的确定性意味着取之后必须将其视为固定的常数参与问题的具体讨论. 它体现了变量 $x_n$ 与常数 $a$ 的具体接近程度.

**注 2**　$N=N(\varepsilon)$，其数值的大小，体现了变量 $n$ 对数列 $\{x_n\}$ 无限接近 $a$ 时的影响.

**注 3**　正整数 $N$ 存在，但不唯一. 如对 $\varepsilon$ 能找出一 $N_1$，使 $n>N_1$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，则 $N_1+1, N_1+2, \cdots$ 中的每一个值都可作为与 $\varepsilon$ 相对应的 $N$. 定义中这种对取定的 $\varepsilon$ 不要求找出与其对应的最小的 $N$ 的特性，为具体讨论中进行不等式的放大以简化 $|x_n-a|$ 的表达式提供了保证.

**例 1**　用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+3}=0$.

**证**　任给 $\varepsilon>0$，因 $\left|\dfrac{1}{n+3}-0\right|<\dfrac{1}{n}$，所以，为使

$$\left|\frac{1}{n+3}-0\right|<\varepsilon,$$

只需

$$\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

即

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，便有 $\left|\frac{1}{n+3}-0\right|<\varepsilon$ 成立，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=0.$$

由数列的定义知，对任给的 $\varepsilon>0$，只需肯定所对应的 $N$ 存在，无需将具体的 $N$ 求出.

**例 2**　用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

**证**　任给 $0<\varepsilon<1$，

$$\lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n=0,\quad \lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon)^n=+\infty,$$

所以对 $a>0$，必存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，有

$$(1-\varepsilon)^n<a<(1+\varepsilon)^n,$$

即

$$1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$$

成立，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

**注 4**　数列的极限不受数列前有限项的取值的影响. 换句话说，改变数列的有限项的数值，不影响数列的极限.

数列的这一性质，使得在研究极限时，对数列取值规律的观察、利用可自某一充分大的项以后进行.

**例 3**　设有数列 $u_n,v_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a\neq0$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，试证：$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

**证**　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a\neq0$，所以存在正整数 $N$，使得对于一切 $n>N$，有 $u_n\neq0$，$v_n\neq0$.

又 $v_n=v_n\frac{u_n}{v_n}$ $(n>N)$，故

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{u_n}{v_n}}=0.$$

对此问题，由于无法保证对一切 $n$，$u_n\neq0$，所以直接利用 $v_n=v_n\frac{u_n}{v_n}$ 是无意义的.

## 二、常用的定理及结论

(1) 极限存在的数列必有界.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$a>0(<0)$，则总存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，$x_n$ 与 $a$ 同号.