



财经应用数学

CAIJING YINGYONG
SHUXUE

韩 付 编 著

黑龙江科学技术出版社

财经应用数学

韩 付 编著

黑龙江人民出版社

1988年·哈尔滨

责任编辑：家 东
封面设计：元 音

财经应用数学

韩 付 编著

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区建设街 35 号)

黑龙江日报社综合厂印刷

787×1092毫米 32开本 9.75印张 200千字
1988年11月第1版·1988年11月第1次印刷
印数：1—2,800册 定价：3.50元

ISBN 7-5388-0548-6/F·48

前 言

本书从财经工作的实际需要出发，概括地介绍了数学的基本概念、理论和方法，并列举了经济实例，试图将数学方法与财经应用结合起来，以期满足广大财经工作者对数学知识的需要。

本书在编写的过程中，得到了《黑龙江财会》编辑部牟学谦、张化一、李新邦、常维斌等同志的大力支持和帮助，在此表示感谢。

由于作者水平所限，其中不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正。

作 者

1988年8月

目 录

一、比和比率.....	1
二、比例.....	10
三、指数.....	17
四、根式.....	24
五、对数.....	28
六、平均数.....	35
七、方程.....	56
八、方程组.....	64
九、不等式.....	81
十、数列.....	92
十一、函数.....	108
十二、极限.....	122
十三、导数.....	135
十四、微分.....	166
十五、积分.....	174
十六、概率.....	209
十七、回归分析.....	232
十八、矩阵.....	249
十九、投入产出法.....	276
二十、线性规划.....	289

一、比和比率

在实际经济工作中，经常运用比和比率，来反映和考核各项经济指标的完成情况，以及研究和探索经济活动的规律性。

(1) 比的概念

比是指比较两个量 a 、 b 间的倍数关系。 $a \div b$ ，就称 a 对 b 的比，简称 a 比 b 。其表示形式如下：

$$a \div b, a : b, \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

这里值得注意的是：比与比较是有区别的。比是指两个量的倍数关系，而比较可以用倍数表示，如， $a \div b$ ，即用相对数比较，具有比的性质。但也可用绝对数表示，如 $a - b$ ，这与比是完全不同的。比与除法是有区别的，除法是指数学中的运算，而比则不然。比与分数是有区别的，分数是一个数，而比则不然。

在 $a : b$ 中， a 叫比的前项， b 叫比的后项， $:$ 为比的符号。比的前项 a 除以比的后项 b 的商，叫比值。

(2) 比的形式

比的形式，一般可分为以下几种：

① 定比。在同类 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 量中，以某量 a_0 为基数，其余各量均与 a_0 比，即 $a_1 : a_0, a_2 : a_0, a_3 : a_0, \dots, a_n : a_0$ ，这种基数固定的比，叫定比。在统计学中的“定基发展速度”指标，就是采用定比的形式，用

以考核经济现象的发展水平。

②环比。在同类 $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ 量中, 分别以相邻前一个量为基数所进行的比, 即 $a_1 : a_0, a_2 : a_1, a_3 : a_2, \dots a_n : a_{n-1}$, 这种基数依次变化的比, 叫环比。在统计学中的“环比发展速度”指标, 就是采用环比的形式, 用以考核经济现象逐期发展变化的程度。

例如: 某企业1982~1987年的工业总产值分别为 100、110、95、100、120、125 万元, 用定比和环比, 计算该企业生产发展的速度?

解: 定比和环比的计算, 可编制计算表如表 1 — 1 所示:

表 1 — 1

年 份	1982	1983	1984	1985	1986	1987
工业总产值 (万元)	100	110	95	100	120	125
定 比 (%)		110	90	100	120	125
环 比 (%)		110	86.36	105.26	120	104.17

③连比。是指在两个以上同类量接连相比, 即 $a : b : c$ 等。这种比是不能计算比值的, 在实际经济工作中很少应用。

④反比。是指把原比的前后项位置对换所进行的比, 称原比的反比。即 $b : a$ 是 $a : b$ 的反比。反之, $a : b$ 也是 $b : a$ 的反比。前项是零的比, 是没有反比的。

⑤复比。有两个或更多个比, 把各比的前项积作为新的前项, 后项积作为新的后项, 所得的比称复比。

复比的值等于各单比值的连乘积。即 $a : b$ 和 $c : d$ 两个比的复比是 $(a \times c) : (b \times d)$; $(a \times c) : (b \times d) = (a : b) \times (c : d)$ 。例如 $4 : 5$ 和 $8 : 12$ 两个比, 其复比则为 $(4 \times 8) : (5 \times 12)$ 。复比值等于单比值的连乘积, 即 $(4 \times 8) : (5 \times 12)$ 。

$$=(4:5) \times (8:12)。$$

⑥正比关系。在 x 、 y 两个量中，如果存在 $y=kx$ 的关系，则称 y 与 x 是正比关系。例如某企业销售产品甲，每吨售价(k)为 100 元，销售数量(x)为 50 吨，其销售收入(y)则为 5000(100×50) 元；如果销售量(x)为 70 吨，售价不变，其销售收入(y)则为 7000 元 (100×70) 元。这种价格固定，销售收入(y)随销售量(x)变化而变化的关系，就是正比关系。

⑦反比关系。在 x 、 y 两个量中，如果存在 $y=\frac{k}{x}$ 的关系，则称 y 与 x 是反比关系。例如某企业生产甲产品所耗用原材料总量(k)为 1000 公斤，每件产品材料消耗量(x)为 20 公斤，则产品产量(y)为 50 件；如果原材料总耗用量(k)不变，每件产品材料消耗量(x)为 25 公斤，则产品产量(y)为 40 件。这种原材料耗用总量(k)不变，产品产量(y)随每件产品材料消耗量(x)的增减而成反比变化的关系，就是反比关系。

(3) 比的性质

比的性质，可归纳如下：

①比的前后项，同乘(除)一个相等的量(不等于零)，其比值不变。即：

$$a:b=ka:kb=\frac{a}{k}=\frac{b}{k} \quad (k \neq 0)$$

②一个比与其反比的乘积等于 1，即 $(a:b) \times (b:a) = 1$
这是因为 $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

③ n 个环比之积，等于第 n 个定比，即：

$$\frac{a_1}{a_0} \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \dots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_n}{a_0}$$

例如表 1—1 资料中, 1987 年的定比, 等于各年环比之积, 即:

$$110\% \times 86.36\% \times 105.26\% \times 120\% \times 104.17\% = 125\%$$

(4) 比率的概念

比率是指两个量的比值。可以用绝对数来表示, 如劳动生产率、百元产值资金率等; 也可以用相对数来表示, 如成本利润率、销售利润率等。

(5) 比率的形式

比率的形式, 一般可分为以下几种:

①动态比率。是指时间数列的比值。用以反映某种经济现象的发展趋势和规律性。

②结构比率。是指各组成部分的数量与总体数量的比值。用以反映总体内部的构成情况。

③相对比率。是指同类两个量的比值。如实际产量与计划产量的比值, 反映产量计划的完成情况。

④强度比率。是指异类但有联系的两个量的比值。如产品产量与职工人数的比值, 反映劳动生产率所达到的水平。

(6) 比率的应用

比率在经济领域中, 有广泛的应用。由于比率是两个量的比值, 因此, 可以用绝对数表示比值, 也可以用相对数表示比值。

①流动资金周转率。它可分为流动资金周转次数和周转天数, 其计算公式如下:

$$\text{流动资金周转次数} = \frac{\text{周转额}}{\text{流动资金平均余额}}$$

$$\text{流动资金周转天数} = \frac{\text{计算期天数}}{\text{周转次数}}$$

$$= \frac{\text{流动资金平均余额} \times \text{计算期天数}}{\text{周 转 额}}$$

例如 某企业某年流动资金平均占用额为 350000 元, 计算期天数为 365 天, 产品的销售收入(周转额)为 912500 元, 求流动资金周转率?

$$\begin{aligned} \text{解: 流动资金} &= \frac{912500}{350000} \\ \text{周转次数} &= 2.6(\text{次}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{流动资金} &= \frac{350000 \times 365}{912500} \\ \text{周转天数} &= 140(\text{天}) \end{aligned}$$

计算期天数的计算, 有时为了简便而取整数, 即月按 30 天, 季按 90 天, 年按 360 天。这在计算年资金周转率时是可以的, 省略了几天, 占整个计算天数的比重很小。但计算月资金周转率时, 就可能产生较大的误差。例如一月份日历天数为 31 天, 算 30 天, 少算 1 天。二月份日历天数为 28 天, 算 30 天, 多算 2 天, 二月份与一月份相比, 正反差 3 天, 如果比较两个月份的资金周转率, 就会失去真实, 缺乏可比性。

② 百元产值资金率, 是指企业定额流动资金平均占用额与其所完成的百元工业总产值的比值。其计算公式如下:

$$\text{百元产值} = \frac{\text{定额流动资金平均占用额}}{\text{工业总产值}} \times 100$$

例如 某企业定额流动资金平均占用额为 50000 元, 这些资金所创造的工业总产值为 250000 元, 求百元产值资金率?

$$\begin{aligned} \text{解: 百元产值} &= \frac{50000}{250000} \times 100 \\ \text{资金率} &= 20(\text{元}) \end{aligned}$$

这一指标，还有另外一种形式，即产值资金率，它是一个相对数。其计算公式如下：

$$\text{产值资金率} = \frac{\text{定额流动资金平均余额}}{\text{工业总产值}} \times 100\%$$

用绝对数表示的比值指标还有劳动生产率等。用相对数表示的比值指标很多，可选择几例。

③生产均衡率。这一指标是反映生产均衡程度的指标。传统的计算方法，其公式如下：

$$\text{均衡率} = \frac{\sum \text{各实际产量(超产部分不计)}}{\text{计划总产量}} \times 100\%$$

例如 某企业一周内生产情况的有关资料如表 1—2 所示，求生产均衡率？

表 1—2

单位：件

指 标 \ 星 期	1	2	3	4	5	6	7	合 计
计 划	50	52	50	48	45	55	56	356
实 际	48	50	52	50	50	52	58	360

解：

$$\begin{aligned} \text{均衡率} &= \frac{48 + 50 + 50 + 48 + 45 + 52 + 56}{356} \times 100\% \\ &= 98.03\% \end{aligned}$$

这种常用的计算方法弊病很多，它把计划看得过死，超产部分不考虑是否均衡等。为了克服这些问题，目前采用离差的方法，计算生产均衡率较为准确合理。现计算如下：

首先，据表 1—2 资料，编制计算表 1—3：

表1—3

单位：件

星 期	计 划 产 量 X_0	实 际 产 量 X_1	$(X_1 - X_0)^2$
1	50	48	4
2	52	50	4
3	50	52	4
4	48	50	4
5	45	50	25
6	55	52	9
7	56	58	4
合 计	356	360	54

其次，计算离差。可按如下公式计算：

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sqrt{\frac{\sum (x_1 - x_0)^2}{n}} \\
 &= \sqrt{\frac{54}{7}} \\
 &= 2.78
 \end{aligned}$$

式中： σ —— 离差； n —— 期数；
 x_0 —— 计划产量； x_1 —— 实际产量。

再次，计算离差率。可按如下公式计算：

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\sigma}{x_0} \\
 &= \frac{2.78}{356} \\
 &= \frac{2.78}{50.86} \\
 &= 5.67\%
 \end{aligned}$$

式中： P ——离差率； $\bar{x}_0$ ——计划平均数。

最后，计算均衡率，可按如下公式计算：

$$\begin{aligned}\text{均衡率} &= 1 - P \\ &= 1 - 5.67\% \\ &= 94.33\%\end{aligned}$$

④调节税率。调节税是利改税后，对工交等大中型企业征收的一种税。其税率可按如下公式计算：

$$\text{调节税率} = \frac{\text{基期利润} \times (1 - 55\%) - \text{1983年合理留利}}{\text{基期利润}} \times 100\%$$

例如 某企业基期利润为 300000 元，1983 年合理留利为 25000 元，求调节税率？

$$\begin{aligned}\text{解：调节税率} &= \frac{300000 \times (1 - 55\%) - 25000}{300000} \times 100\% \\ &= 36.67\%\end{aligned}$$

⑤销售利润率。这一指标是反映企业在一定时期内所实现的产品销售利润与销售收入的比值，反映单位销售收入所实现的利润额。其计算公式如下：

$$\text{销售利润率} = \frac{\text{产品销售利润}}{\text{产品销售收入}} \times 100\%$$

例如 某企业在一定时期内产品销售收入为 420000 元，销售成本为 341000 元，销售税金为 63000 元，求产品销售利润率？

$$\begin{aligned}\text{解：产品销售利润率} &= \frac{\text{产品销售收入} - \text{产品销售成本} - \text{产品销售税金}}{\text{产品销售收入}} \\ &= 420000 - 341000 - 63000\end{aligned}$$

$$= 16000 \text{ (元)}$$

$$\text{销售利润率} = \frac{16000}{420000} \times 100\%$$

$$= 3.81\%$$

还有成本利润率、资金利润率等经济指标，此不赘述。

二、比 例

比例在实际经济工作中经常用到，现介绍其概念、性质和运用等。

(1) 比例的概念

比例是指由两个相等的比所组成的等式。如果 $a:b=e$, $c:d=e$, 那么 $a:b=c:d$ 就是一个比例。

在比例 $a:b=c:d$ 中 a 、 b 、 c 、 d 四个数，称为比例的项。 b 、 c 叫比例的内项， a 、 d 叫比例的外项。如果两个比例的内项相等，例如 $a:b=b:c$, 那么， b 是 a 、 c 的比例中项，可写成 $b^2=ac$ 。

(2) 比例的性质

①在比例 $a:b=c:d$ 中，两个外项的积等于两个内项的积，即 $a \times d = b \times c$ 。这是比例的基本性质。

②比例的前后两项可以互换，即反比定理。也就是，如果 $a:b=c:d$, 那么 $b:a=d:c$ 。

③比例的两个内项或两个外项可以互换，即更比定理。也就是，如果 $a:b=c:d$, 那么 $a:c=b:d$, 或者 $d:b=c:a$ 。

④比例的一个比的前后两项和与其后项的比，等于另一个比的前后两项和与其后项的比，即合比定理。也就是，如果 $a:b=c:d$, 那么 $(a+b):b=(c+d):d$ 。这是因为 $(a+b):b=(c+d):d$ 与 $a:b+1=c:d+1$ 相等，也就是 $a:b=c:d$ 。

⑤比例的一个比的前后两项差与其后项的比，等于另一个比的前后两项差与其后项的比，即分比定理。也就是，如果 $a:b=c:d$ ，那么， $(a-b):b=(c-d):d$ 。这是因为 $(a-b):b=(c-d):d$ 与 $a:b-1=c:d-1$ 相等，也就是 $a:b=c:d$ 。

⑥比例的一个比的两项和与其两项差的比，等于另一个比的两项和与其两项差的比，即合分比定理。也就是，如果 $a:b=c:d$ ，那么 $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$ 。

⑦ n 个相等比的前项和与其后项和的比，等于其中任何一个比，即等比定理。也就是，如果 $a:b=c:d=e:f\cdots=m:n$ ，那么 $(a+c+e+\cdots+m):(b+d+f+\cdots+n)=a:b$ 。

(3) 比例的形式

①正比例。在 a 、 b 两个量中，如果其中一个量扩大（或缩小）若干倍，另一个量相应地扩大（或缩小）同样的倍数，那么 a 与 b 的这种关系称正比例关系，简称正比例。

例如 某企业 10 天创利 200 万元，照这样生产经营，求 20 天能创利多少元？

解：题中的元与天是两个正比例的量，可列比例式：

$$10:20=200:x$$

$$x = \frac{200 \times 20}{10}$$

$$400 \text{ (万元)}$$

通过计算可知，20 天创利 400 万元。

②反比例。在 a 、 b 两个量中，如果其中一个量扩大（或缩小）若干倍，另一个量反而相应地缩小（或扩大）同样的倍数，那么 a 与 b 的这种关系称反比例关系，简称反比例。

例如 某企业原计划每天生产某产品 30 吨，15 天完成

生产任务，而实际每天生产45吨，求完成生产任务所需要的天数？

解：题中吨与天是两个反比例的量，可列比例式：

$$30 : 45 = x : 15$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{30 \times 15}{45} \\&= 10(\text{天})\end{aligned}$$

通过计算可知，完成原生产任务需要 10 天。

③复比例。在两个或更多个比例的各对应项上，进行加、减、乘、除四则运算，所得到的比例，称复比例。

(4) 比例的运算

比例的运算，实质是复比例的几种形式。

①比例的加法。在两个或更多个比例的各对应项相加所得到的复比例，与原比例的比值相等。

例如 $80 : 20 = 60 : 15$ 与 $16 : 4 = 8 : 2$ 的比值皆为 4，经过相加所得到的复比例 $(80+16) : (20+4) = (60+8) : (15+2)$ ，即 $96 : 24 = 68 : 7$ 的比值也等于 4。

②比例的减法。在两个或更多个比例的各对应项相减所得到的复比例，与原比例的比值相等。

仍以上例 $80 : 20 = 60 : 15$ 与 $16 : 4 = 8 : 2$ 的比值皆为 4，经过相减所得到的复比例 $(80-16) : (20-4) = (60-8) : (15-2)$ ，即 $64 : 16 = 52 : 13$ 的比值也等于 4。

③比例的乘法。在两个或更多个比例的各对应项相乘所得到的复比例，其比值等于原各比例比值的乘积。

例如 $80 : 20 = 60 : 15$ 与 $15 : 5 = 9 : 3$ 的比值分别为 4 和 3，二者的乘积 $4 \times 3 = 12$ ，等于经过相乘所得到的复比例 $(80 \times 15) : (20 \times 5) = (60 \times 9) : (15 \times 3)$ ，即 $1200 : 100$