结构可靠度计算

Structural Reliability Computations

张明　金峰　著

科学出版社

结构可靠度计算

Structural Reliability Computations

张 明　金 峰　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书为系统论述结构可靠度计算方法的专著。书中简要介绍结构随机可靠度的基本概念，详细阐述结构可靠度分析的重要方法，包括一次二阶矩方法、二次二阶矩方法、二次四阶矩方法、渐近积分方法、响应面方法、Monte Carlo 方法，也研究了结构体系的分析方法、基于人工神经网络的结构可靠度分析方法，最后阐述结构模糊随机可靠度分析方法。本书对可靠度理论和方法实施并重，所有方法均给出计算机程序。

本书可供科技工作者、大专院校教师、研究生和高年级本科生使用，也可供工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

结构可靠度计算/张明，金峰著．—北京：科学出版社，2015.8

ISBN 978-7-03-044862-0

Ⅰ．①结…　Ⅱ．①张…　②金…　Ⅲ．①工程结构-结构可靠性-结构计算　Ⅳ．①TU311.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 126886 号

责任编辑：刘宝莉／责任校对：桂伟利
责任印制：张　倩／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2015 年 8 月第　一　版　开本：720×1000 1/16
2015 年 8 月第一次印刷　印张：20
字数：400 000

定价：120.00 元

前　　言

结构可靠度计算是结构可靠度理论和应用中的重要内容，可靠性问题很多都归结为可靠度的计算和评估。可靠度计算过程涉及可靠度理论的大部分概念和难点，以可靠度计算作为掌握可靠度理论的突破口，会收到事半功倍之效。

作者的《结构可靠度分析：方法与程序》一书，有别于坊间其他可靠性理论及方法专著的显著特点，就在于在介绍各种方法的同时，还配合计算机程序详细说明方法的细节和实施过程，因而引起众多学者的兴趣和关注，他们的论文和书籍干脆直接引用了书中的章节和程序。

该书承蒙中国科学院院士张楚汉教授作序，自 2009 年出版后不久即已告罄，各方给予了好评，并希望继续出版。作者以该书为基础，及时引入结构可靠性研究的新成果，经过大幅度的修改和补充，终成本书，定名为《结构可靠度计算》。

本书专注于可靠度的计算方法，不强调方法的大而全，对于不断出现的可靠度计算新方法，有所舍取，只包括那些精度高、效率高且行之有效的方法。

本书仍然坚持之前的理念，一以贯之，继续以平实的笔触清晰阐述各种方法，用简短的程序对其辅以说明并方便应用，以期为研究者带来帮助和启发，为工程界提供借鉴和工具。

本书得到国家 863 计划项目 (2012AA06A112)、国家自然科学基金重点项目 (51039003，51239006) 和面上项目 (11172147)，以及水沙科学与水利水电工程国家重点实验室科研课题 (2013-KY-2) 的资助。

由于作者水平有限，难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

张　明

2015 年 1 月于清华园

目　录

第 1 章　导　　言

本书是一本关于工程结构可靠度分析方法及程序设计的专著，主要讲述各种结构可靠度分析方法，从阐述清楚和应用方便考虑，对所述方法均给出了相应的计算机程序。可靠度分析需要有一定的背景知识，程序的编制和运行也需要一个开发平台和环境，涉及的背景知识和开发环境需要事先予以说明。此外，对于本书的内容梗概及章节安排，以及书中所采取的叙述风格，在此也预先作一交待，以有助于读者对本书内容的整体把握，并方便查阅。

1.1　背景知识

为了突出结构可靠度分析方法的重点，尽早“书归正传”、切入主题，本书将结构可靠度分析有关的背景知识的叙述压缩到最少，除非必要，一般不介绍所涉及的背景知识。

结构随机可靠度分析主要涉及概率计算和统计推断、数值计算方法等方面的背景知识，这些内容在几乎所有有关可靠度的书籍中都可以找到[1-3]，书中对此不作赘述，假设读者已经具备这些方面的基本知识。

数值计算方法和概率统计是结构可靠度计算的基础。其实，在本书中所涉及的概率统计知识，从广度和深度上，都还是比较有限的。本书将数值计算方法作为一项基本技术来使用，因而对于常规的算法及其含义在书中没有叙述。读者如有感到疑惑之处，可以自行查阅有关书籍[4]。

本书以 MATLAB 软件作为说明和实施可靠度计算方法的平台。该软件及其数理统计工具箱自带的帮助文档也是了解上述知识的一条快速途径。数值计算方法和概率统计等方面的背景知识介绍、某一具体方法及其实现函数等，在帮助文档中都有比较详细透彻的叙述。只要查询相关的章节或按索引找到相应的函数，再利用帮助文档给出的众多的超链接，就可以获得比较全面详尽的帮助信息。在附录 B 中列出了本书程序用到的所有函数，可以作为函数的一个快速参考。

本书在给出基于人工神经网络的结构可靠度分析方法时，对人工神经网络也作了简要概述。将人工神经网络应用于求解结构可靠度时，用到了 MATLAB 的

神经网络工具箱。因此，读者可以查阅其他文献[5]，或者仿照以上介绍，从神经网络工具箱的帮助文档，来获得更多的相关知识和相应函数的使用说明。

本书在介绍结构模糊随机可靠度的分析方法时，用到了有关模糊数学的基本概念。鉴于模糊数学不像前面提及的数理统计和数值方法那么为读者所熟知，作者对这方面的基础知识作了简单介绍，这对于书中运用到的结构模糊随机可靠度分析已经足够。但如果读者希望了解更多的内容，可以自行查阅相关书籍[6]。由于本书用到的模糊数学比较简单，在求解可靠度问题时，将模糊性转化成了随机性，因而没有必要用到 MATLAB 中的模糊逻辑工具箱。

另外，读者还可以从书后所列的索引快速获得关于某个名词术语或概念的定义帮助，从附录 A 和附录 B 中查阅到程序中的标识符和所用到的 MATLAB 及其工具箱的函数。

1.2 关于程序

本书的一大特点就是给出所有结构可靠度分析方法的计算机程序，用程序来更好地说明方法。在众多的程序设计语言中，就结构可靠度程序设计而言，有很多理由选择 MATLAB。

MATLAB 是一种面向科学和工程计算的高级语言，现已成为国际公认的最优秀的科技界应用软件。它的集成度很高，功能强大，使用方便，适用的计算机平台宽，因而被大家广泛接受。强大的科学计算与可视化功能、简单易用的开放式可扩展环境以及多达 40 多个面向不同领域而扩展的工具箱支持，使得它在许多学科领域中成为计算机辅助设计与分析、算法研究和应用开发的基本工具和首选平台。

MATLAB 最突出的特点就是语言简洁紧凑，使用方便灵活。它用更直观的、符合人们思维习惯的代码，代替了 C 语言和 Fortran 语言的冗长代码，具有很高的编程效率。实际上，作者也曾在可靠度的教学和科研中[7–23]用各种语言编写计算程序，感到 MATLAB 脚本式的语言比较容易掌握，MATLAB 程序也是最简洁和最清晰的。

MATLAB 程序利用丰富的库函数避开繁杂的子程序编程任务，压缩了一切不必要的编程工作，使编程人员从繁琐的程序代码中解放出来。由于库函数都由本领域的专家编写，用户通常不必担心函数的可靠性。MATLAB 提供的运算符丰富，它提供了和 C 语言几乎一样多的运算符。这些都利于快速高效地编写出具有任何复杂功能的程序。

本书正是借助 MATLAB 的强大功能，将 MATLAB 作为编程平台，解决结构可靠度计算问题。这是作者经多年可靠度教学和研究所做的一次尝试，也是尝试之后作者所推荐的一种手段。

如果将可靠度计算方法比作一个结构，搭建这个结构需要大量基本构件，这里指一些常规计算方法，那么，只要选用 MATLAB 的命令、函数作为结构的标准构件，就能以高效精确的算法实现复杂结构，而且结构的可靠性也是很高的。这样可以避免很多重复性的劳动，充分利用现有的数学成果，使我们能够尽快地“站在巨人肩上”开展工作。本书利用 MATLAB 强大的科学计算和符号运算功能，轻松跨越繁琐的公式推导和复杂的编程技巧，获得最佳的学习效率。这种方式的目的是把重点放在每一种结构可靠度的分析方法上，而不去细抠数学计算上的小节，例如不再需要推导针对每种概率分布所用的具体的公式，不用将注意力集中在书中出现的 Gram-Schmidt 正交化过程处理、矩阵特征值问题、矩阵 Cholesky 分解、copula 随机数生成等具体方法及其实现上，并且不易出错。

本书利用富于启发性的例子说明问题，围绕着许多结构可靠度计算实例编写程序，每个例子都提供了建模和计算所需的 MATLAB 脚本。提供这些程序的目的之一是为了充分说明算法，阐明分析过程涉及的各个步骤，化解算法中的各个难点。作者没有去编制包罗各种方法、处理各种情况的通用程序，而是紧密结合所介绍的方法，这样做对于深刻理解方法的细节具有很强的启发性。通过这些源程序的引入，作者希望使读者的主要精力不再耗费在编程上，而放在探究可靠度的分析方法上；另外，读者可以利用这些脚本资源做自己想做的事。

由于将大量常规的计算方法问题交由 MATLAB 完成，本书所附的程序都很简洁。通常一个典型的程序大约有数十行代码，相当于算法伪代码的长度，非常适合小型计算机。本书的程序大多数在整体结构上具有相似性、通用性，作者也注意使程序规范统一，因此，本书的程序易读懂，易改动，易扩充。每个变量名都可望文生义，很容易“猜”出其含义（程序中使用的标识符可参见附录 A)。这些程序只需稍加改造，就可以灵活方便地用来分析别的问题，所需要注意的只是变量概率分布类型、结构功能函数及其导数等方面。

作者相信，如果利用更为复杂些的 MATLAB 功能，如用符号运算功能来自动完成功能函数求导，还可以使程序更为一般化些，但本书的程序只是为了说明各种方法，仅利用了 MATLAB 的数值运算功能。因此，书中的程序是传统的纯粹数值分析程序，保持了简明性的特点，而且容易移植。

出于说明结构可靠度计算方法的目的，本书程序尽量避免过于详细的输入和输出操作说明，不在可视化和前后处理方面作过多考虑。在此期望读者能用自己

编写的程序进行输入数据的前处理和图形化输出操作。本书的程序一般不加注释，仅在有些值得注意之处作简单的点缀式说明，并且之后再次出现时也一律不重复说明。

为了有效地使用本书，读者应该对 MATLAB 软件比较熟悉，包括数据输入、绘图和简单的计算、相关的 MATLAB 的 m 文件等。可能的话，读者可以亲自运行一下书中感兴趣的程序，一定会有所感悟。书中的程序既体现了可靠度分析方法的各个步骤，又包含了全部的计算细节，认真阅读这些程序也是很必要的。

本书所有程序都在最新版本的 MATLAB 上调试通过。

1.3 内容安排

结构可靠度的计算方法很多，书中尽量介绍那些比较成熟、好用的方法。有一些方法[24,25]，因不具有明显优势或缺乏实用性、精度较差等原因，则没有介绍。

以下是本书的具体内容及其简要评述，由此可以了解结构可靠度计算方法的梗概，也可在需要选择某一方法时作为简单参考。

第 1 章作为本书的导言，对书中用到的背景知识作了一个交代，介绍 MATLAB 软件并说明本书利用它解决问题的理由，简述了本书的重要内容安排，并对书中出现的数学记法作了约定。

第 2 章给出了结构随机可靠度的基本概念，主要是为了说明结构可靠度分析的任务和在学科中的地位。分别给出了基本随机变量、结构的极限状态、结构可靠度及可靠指标的概念，并将可靠指标与安全系数作了比较。

第 3 章介绍结构可靠度的一次二阶矩方法，包括中心点方法和设计点方法，在非正态随机变量处理方面介绍了 JC 法、等概率正态变换方法、简化 Paloheimo-Hannus 方法，在随机变量的相关性处理上介绍了 Rosenblatt 变换方法、线性变换方法以及 Nataf 变换方法。通常认为，在求解结构可靠度的一次二阶矩方法中，JC 法并结合 Nataf 变换是应用最广泛的一种方法。

第 4 章围绕结构可靠度的二次二阶矩方法，介绍了 Breitung 方法和 Laplace 渐近方法。对于特定的问题，当结构的功能函数的非线性程度较高，利用一次二阶矩方法计算精度欠佳时，可以考虑采用这种方法。

第 5 章围绕结构可靠度的二次四阶矩方法，给出了最大熵方法和最佳平方逼近方法。这种方法充分利用了基本随机变量的各阶矩的信息，与二次二阶矩方法从不同的理论体系出发，因而是平行的两种算法，目前无法判断孰优孰劣。

第 6 章描述了结构可靠度的渐近积分方法。这是直接从失效概率的积分定义

出发，将积分域边界即失效面作 Taylor 级数的替换，计算结构失效概率的渐近积分的方法。

第 7 章介绍结构可靠度分析的响应面方法。响应面方法用假设的简单函数作为结构的功能函数，通过迭代调整函数中的待定参数，一般都能满足实际工程的精度要求，适用于结构的功能函数的解析表达式不明确或很复杂的情形。

第 8 章介绍结构体系可靠度的分析计算方法。对结构体系及其可靠度作了讨论，并给出了体系可靠度的一般计算表达式，主要讨论了串联体系和并联体系的失效概率的计算方法。此外，对于结构体系计算中涉及的多元正态分布函数的计算问题也作了详细阐述。

第 9 章阐述计算结构可靠度的 Monte Carlo 方法。这是结构可靠度分析的一种最基本的方法，通常也是相对比较准确的方法。主要介绍了直接抽样、重要抽样、渐近重要抽样、方向抽样、Latin 超立方抽样等 Monte Carlo 方法。

第 10 章给出了基于人工神经网络的结构可靠度分析方法，包括基于人工神经网络的一次二阶矩方法、二次二阶矩方法和 Monte Carlo 方法。这些方法利用人工神经网络独特的学习能力、适应能力，可以较好地逼近极限状态方程，故适于大型复杂结构功能函数为隐式的情形。

第 11 章引入模糊集的概念，考虑到结构失效准则的不明确性以及结构参数的模糊性，介绍了结构模糊随机可靠度的分析方法。这种方法利用模糊随机事件的概率，将具有模糊失效准则的结构的模糊随机可靠度问题转化成随机可靠度问题，适于结构和结构体系的模糊随机可靠度分析。

本书除了第 1 章和第 2 章为基本内容和基本概念的介绍，其他各章均围绕结构可靠度某一种方法展开讨论，内容相对独立，读者可以按照所需有选择地阅读。

1.4 记法规定

书中采用通用的数学符号和记法，如向量或矩阵用斜黑体字母表示，上标 $\top$ 表示其转置等。特别地，下面的几点规定是需要注意的：

(1) 向量默认为列向量。

向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^\top$ 表示一个具有 n 个元素 X_i 的列向量，其矩阵形式为 $[X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]^\top$ 或 $[X_i]_{n\times 1}$。向量 $\boldsymbol{X}$ 的 2-范数简单地记作 $\|\boldsymbol{X}\|=\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$。

(2) 函数对所有向量的分量或矩阵的元素的导数，有时采用向量或矩阵的实体符号来表示。

这种表达方式就是按照向量分量或矩阵元素的顺序依次求导，并历遍所有分量或元素。下面说明本书用到的几种表达方式的含义。

设 $\boldsymbol{X}$ 为 n 维向量，$g(\boldsymbol{X})$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的标量函数，一阶导数

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{X}} := \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}, \frac{\partial g}{\partial X_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^{\top} = \left[\frac{\partial g}{\partial X_i}\right]_{n\times 1} \tag{1.1}$$

是一个列向量,即 $g(\boldsymbol{X})$ 的梯度,可简记为 $\nabla g(\boldsymbol{X})$,这里 nabla 符号 (nabla symbol) 定义为

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n}\right)^{\top} = \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial X_n}\end{bmatrix}^{\top} \tag{1.2}$$

而二阶导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{X}^2} &:= \begin{bmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial X_1 \partial X_n}\\ \frac{\partial^2 g}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial X_2 \partial X_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 g}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial X_n \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial X_n^2}\end{bmatrix}\\ &= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}\right]_{n\times n} = \left[\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j}\right]_{n}\end{aligned} \tag{1.3}$$

则是一个 n 阶对称矩阵，即 $g(\boldsymbol{X})$ 的 Hesse 矩阵 (Hessian matrix, Hessian)，可简记为 $\nabla^2 g(\boldsymbol{X})$。可以验证 $\nabla^2 g = \nabla[(\nabla g)^{\top}]$。

设 $\boldsymbol{X}$ 为 n 维向量，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$ 为 m 维向量，一阶导数

$$\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{X}} := \begin{bmatrix}\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Y_1}{\partial X_n}\\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Y_2}{\partial X_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial Y_m}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_m}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial Y_m}{\partial X_n}\end{bmatrix} = \left[\frac{\partial Y_i}{\partial X_j}\right]_{m\times n} \tag{1.4}$$

是一个 m 行 n 列的矩阵，即 Jacobi 矩阵 (Jacobian matrix)，可记作 $\boldsymbol{J}_{YX}$。可

以验证 $\boldsymbol{J}_{YX} = (\nabla \boldsymbol{Y}^\top)^\top$。

设 $\boldsymbol{W} = [W_{ij}]_{l\times m}$ 为 l 行 m 列的矩阵，$e = e(\boldsymbol{W})$ 为 $\boldsymbol{W}$ 的标量函数，一阶导数

$$\frac{\partial e}{\partial \boldsymbol{W}} := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial e}{\partial W_{11}} & \dfrac{\partial e}{\partial W_{12}} & \cdots & \dfrac{\partial e}{\partial W_{1m}} \\ \dfrac{\partial e}{\partial W_{21}} & \dfrac{\partial e}{\partial W_{22}} & \cdots & \dfrac{\partial e}{\partial W_{2m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial e}{\partial W_{l1}} & \dfrac{\partial e}{\partial W_{l2}} & \cdots & \dfrac{\partial e}{\partial W_{lm}} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial e}{\partial W_{ij}}\right]_{l\times m} \tag{1.5}$$

是一个 l 行 m 列的矩阵。按照本书的这种记法，有 $(\partial e/\partial \boldsymbol{W})^\top = \partial e/\partial \boldsymbol{W}^\top$。

设 $\boldsymbol{W} = [W_{ij}]_{l\times m}$ 为 l 行 m 列矩阵，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{W})$ 为 n 维向量，一阶导数

$$\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{W}} := \left[\frac{\partial Y_i}{\partial W_{jk}}\right]_{n\times l\times m} \tag{1.6}$$

是 $n \times l \times m$ 个有序数所组成的数组。

(3) 函数一般以小写字母表示，只有累积分布函数例外。有时对函数名加注下标以突出函数的含义，或对同一种类的函数加以区别。

例如，随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度函数表示为 $f_X(\boldsymbol{x})$，随机向量为 $\boldsymbol{X}$ 的结构的功能函数表示为 $g_X(\boldsymbol{X})$，函数名中的下标 X 均有强调的作用，明确标示出函数的自变量为 $\boldsymbol{X}$。

上例中如果 $\boldsymbol{X}$ 经过变换成为 $\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y})$，则 $g_X(\boldsymbol{X}) = g_X[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y})] = g_Y(\boldsymbol{Y})$，其中函数 $g_X(\cdot)$ 与 $g_Y(\cdot)$ 均表示同一个结构的功能函数，但函数形式却不一定相同。这样既能区别不同的函数形式，又能知晓函数之间的相互关系，这是这种函数表示法的一个好处。

(4) 符号“□”表示诸如定义、证明、注解或例题等逻辑单元的终止，但仅在该单元的终止可能和下文不能明显分清时使用。

第 2 章　结构随机可靠度的基本概念

对结构随机可靠度的基本概念的理解和掌握，无论在各种结构设计实践中，还是在结构可靠度的计算中都是十分重要的。关于结构功能函数或极限状态方程以及其中的基本随机变量的讨论，有助于理解结构概率极限状态设计的必要性。而失效概率或可靠指标的确定及其与结构确定性分析的联系，则可以使我们能够实现结构概率极限状态定量化设计。结构可靠度分析的这些基本概念，形成了可靠度分析的主要内容。

本书的主要工作就是在基本变量概率统计的基础上，寻求建立结构的功能函数或极限状态方程，并且计算可靠度的各种方法和途径。

2.1　基本随机变量

结构可靠度理论是考虑到工程结构设计中存在着诸多不确定性而产生和发展的。不确定性是指出现或发生的结果是不确定的，需要用不确定性理论和方法进行分析和推断。通常将结构设计中影响结构可靠性的不确定性分为随机性、模糊性和知识的不完善性。目前的结构可靠度理论主要讨论的是随机不确定性下的可靠度。

分析结构的可靠度，需要考虑有关的设计参数。结构的设计参数主要分为两大类：一类是施加在结构上的直接作用或引起结构外加变形或约束变形的间接作用，统称**作用** (action)，如结构承受的人群、设备、车辆的重量，以及施加于结构的风荷载、雪荷载、冰荷载、土压力、水压力、温度作用、地震作用等。习惯上将由各种因素产生的直接作用在结构上的各种力称为**荷载** (load)。这些作用引起的结构的内力、变形等称为**作用效应** (effect of action) 或**荷载效应** (effect of load)。另一类则是结构及其材料承受作用效应的能力，称为**抗力** (resistance)，抗力取决于材料强度、截面尺寸、连接条件等。

实际上，各参数的具体数值是未知的，因而可以当作随机变量进行考虑。通常我们可以得到和使用的信息就是随机变量的统计规律。这些统计规律，构成了结构可靠性分析和设计的基本条件和内容。因此，在结构随机可靠性分析和设计

中，决定结构设计性能的各参数都是**基本随机变量**（简称**基本变量**）(basic random variable)，表示为向量形式，如 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^\top$，其中 $X_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ 为第 i 个基本随机变量。一般情况下，变量 X_i 的累积分布函数和概率密度函数通过概率分布的拟合优度检验后，认为是已知的，如正态分布、对数正态分布等。

在进行结构可靠度分析时，也可将若干基本随机变量组合成为一个综合随机变量，如结构的综合作用效应 S 和结构的综合抗力 R。

2.2　结构的极限状态

整个结构或结构的一部分超过某一特定状态，就不能满足设计规定的某一功能要求，此特定状态称为结构的**极限状态** (limit state)。结构极限状态是结构工作可靠与不可靠的临界状态。结构的可靠度分析与设计，以结构是否达到极限状态为依据。

极限状态一般可分为承载能力极限状态和正常使用极限状态两类。

承载能力极限状态 (ultimate limit state) 对应于结构或构件达到最大承载力或不适于继续承载的变形的状态。当结构或构件出现下列状态之一时，即认为超过了承载能力极限状态：

(1) 整个结构或结构的一部分作为刚体失去平衡（如倾覆、滑动等）。

(2) 结构构件或其连接因材料强度被超过而破坏（包括疲劳破坏），或因过度的塑性变形而不适于继续承载。

(3) 结构转变为机动体系。

(4) 结构或结构构件丧失稳定性（如压屈等）。

正常使用极限状态 (serviceability limit state) 对应于结构或构件达到正常使用和耐久性的某项规定限值的状态。当结构或构件出现下列状态之一时，即认为超过了正常使用极限状态：

(1) 影响正常使用或外观的变形。

(2) 影响正常使用或耐久性能的局部损坏（包括裂缝）。

(3) 影响正常使用的振动。

(4) 影响正常使用的其他特定状态。

以上两种极限状态在结构设计中都应分别考虑，以保证结构具有足够的安全性、耐久性和适用性。通常的做法是先用承载能力极限状态进行结构设计，再以正常使用极限状态进行校核。

根据结构的功能要求和相应极限状态的标志，可建立结构的功能函数或极限状态方程。

设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^\top$ 是影响结构功能的 n 个基本随机变量，$\boldsymbol{X}$ 可以是结构的几何尺寸、材料的物理力学参数、结构所受的作用等。称随机函数

$$Z=g(\boldsymbol{X})=g(X_1,X_2,\ldots,X_n) \tag{2.1}$$

为结构的**功能函数** (performance function)、**失效函数** (failure function) 或**极限状态函数** (limit state function)。规定 $Z>0$ 表示结构处于可靠状态，$Z<0$ 表示结构处于失效状态，$Z=0$ 表示结构处于极限状态。这样，对于承载能力极限状态而言，随机变量 $Z>0$ 就表示了结构某一功能的安全裕度。功能函数 $g(\boldsymbol{X})$ 的具体形式可通过力学分析等途径得到。表示同一意义的功能函数，其形式也不是唯一的，如 $g(\boldsymbol{X})$ 可以用应力形式表达，也可以按内力形式写出。

特别地，方程

$$Z=g(\boldsymbol{X})=g(X_1,X_2,\ldots,X_n)=0 \tag{2.2}$$

称为结构的**极限状态方程** (limit state equation)。它表示 n 维基本随机变量空间中的 $n-1$ 维超曲面，称为**极限状态面** (limit state surface) 或**失效面** (failure surface)。

极限状态面将问题定义域 Ω 划分成为可靠域 $\Omega_\mathrm{r}=\{\boldsymbol{x}\mid g(\boldsymbol{x})>0\}$ 和失效域 $\Omega_\mathrm{f}=\{\boldsymbol{x}\mid g(\boldsymbol{x})\le 0\}$ 两个区域，即

$$Z=g(\boldsymbol{X})>0\Leftrightarrow \boldsymbol{X}\in\Omega_\mathrm{r} \tag{2.3}$$

$$Z=g(\boldsymbol{X})\le 0\Leftrightarrow \boldsymbol{X}\in\Omega_\mathrm{f} \tag{2.4}$$

极限状态曲面是 Ω_r 和 Ω_f 的界限，极限状态方程 $Z=g(\boldsymbol{X})=0$ 对应于 $\boldsymbol{X}\in(\Omega_\mathrm{r}\cap\Omega_\mathrm{f})$，极限状态无论包含在哪个区域都是可以的。根据对给定问题处理的方便，可以将极限状态的一部分或全部选择为可靠域或失效域。图 2.1 是说明二维的情形。利用式(2.3)和式(2.4)中的等价性，今后在有关的公式中将 Ω_r 和 Ω_f 分别简单地表示成 $Z>0$ 和 $Z\le 0$。

只有两个随机变量 R 和 S 的最简单的功能函数可以表示为

$$Z=g(R,S)=R-S \tag{2.5}$$

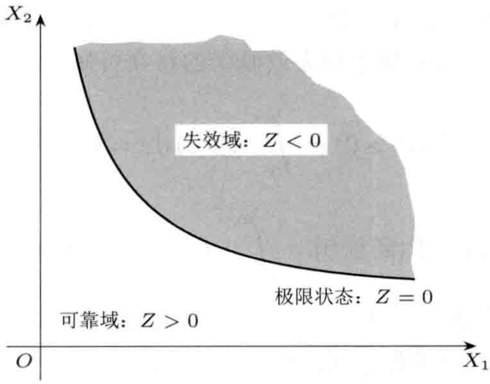

图 2.1　二维定义域和极限状态

相应的极限状态方程为

$$Z = g(R, S) = R - S = 0 \tag{2.6}$$

可注意到 Z 是一个随机变量，式(2.2) $\sim$ 式(2.4)、式(2.6)都是在一定的概率意义下成立的。

2.3　结构的可靠概率和失效概率

结构在规定时间内和规定条件下完成预定功能的能力，称为结构的**可靠性** (reliability)。结构在规定时间内和规定条件下完成预定功能的概率，称为结构的**可靠度** (degree of reliability, reliability)。结构可靠度是结构可靠性的概率度量。这里的“规定时间”指结构的设计基准期，“规定条件”指结构设计预先确定的施工条件和适用条件，“预定功能”指结构需完成的各项功能要求。

结构完成预定功能的概率用**可靠概率** (probability of reliability) p_{r} 或**安全概率** (probability of safety) p_{s} 表示；相反，结构不能完成预定功能的概率用**失效概率** (probability of failure) p_{f} 表示。结构的可靠与失效是两个不相容事件，它们的和事件是必然事件，即存在以下关系：

$$p_{\mathrm{r}} + p_{\mathrm{f}} = 1 \tag{2.7}$$

因此，可靠概率 p_{r} 和失效概率 p_{f} 都可用来表示结构的可靠度，有时因计算和表达上的方便而常用 p_{f}。结构可靠度分析的主要问题就是处理结构的随机信息以确定结构的失效概率。