·考研数学·

考研数学
清华版
精品备考丛书

历年真题名师精解

数学（三）

胡金德　谭泽光◎主编

◆ 分类精解 —— 历年真题条分缕析 ◆

◆ 题型丰富 —— 海量题目科学归纳 ◆

◆ 名师点拨 —— 深刻剖析真题本质 ◆

◆ 解读多维 —— 全面把握命题规律 ◆

清華大學出版社

（清华版）考研数学精品备考丛

·考研数学·

历年真题 名师精解

数学（三）

胡金德　谭泽光◎主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书精心编排了 2001 年至 2015 年共 15 年的数学三考研真题，依照考试大纲要求，按知识点对所有题目进行讲解，体系清晰，分析细致、讲解详尽，便于考生系统复习。本书可作为广大考生复习阶段模拟练习的重要题库，起到查漏补缺、指导复习方向的作用。

本书可供将参加 2016 年研究生入学考试的学生备考使用。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题名师精解．数学三/胡金德，谭泽光主编．--北京：清华大学出版社，2015
((清华版)考研数学精品备考丛书)
ISBN 978-7-302-40347-0

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①胡…　②谭…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 114384 号

责任编辑： 朱敏悦
封面设计： 汉风唐韵
责任校对： 王凤芝
责任印制： 王静怡

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者： 北京富博印刷有限公司
装 订 者： 北京市密云县京文制本装订厂
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 23　　**字　　数：** 570 千字
版　　次： 2015 年 7 月第 1 版　　**印　　次：** 2015 年 7 月第 1 次印刷
印　　数： 1～3000
定　　价： 48.00 元

产品编号：064940-01

前　　言

全国工学、经济学硕士研究生入学统一数学考试实施多年来，每年命题都是紧扣大纲，形成了相对稳定、完整的模式。对这种模式的深入了解，有助于考生掌握命题规律，熟悉考试题型，争取优良成绩是至关重要的。因此，在每一套考研数学辅导教程丛书中，真题解析类的书目都是重要的组成部分之一。通过练习真题，可以有效地帮助考生把握数学考试大纲的命题指导思想、原则和趋势，是广大考生和教师了解试题信息、分析命题重点、总结命题规律和揣摩命题动态的重要依据，同时本书也可作为考生复习阶段模拟练习的重要题库，起到查漏补缺，指导复习方向的作用。

因此，一本经典的历年考试真题解析教程应当是内容完整、分析细致、求解详尽、总结全面的，这也是广大考生所热切期待的。本丛书作者就是依据上述精神，精心编纂了本册《考研数学历年真题名师精解》。本书布局巧妙，内容精细，综合了众多相关教程和复习指导书的优点，具有如下几个特点：

1. 内容细致，题型丰富

本书精心编排了 2001 年至 2015 年共 15 年的数学三考研真题，依照考试大纲的要求，按知识点归纳对所有题目分专题进行讲解，体系清晰，便于考生系统复习。每一专型的题目按选择、填空、简答排序，内容由浅入深，方便考生循序渐进地领会各各知识点。同时本书也综合了其他几类试卷(如数学一，数学二)考试中的一些经典真题，以求对考研大纲的知识点全面覆盖。

2. 解析详尽，总结全面

对于每一道题目，编者为广大考生设计两个重要板块：【解析】和【知识点归纳】。【解析】是依据考研名师提供的经典讲义教案，提供了最新的解题思路、方法和技巧，给出详细准确的求解过程，以帮助考生开阔思路，提高解题能力。【知识点归纳】则是对每一道题目所涉及的知识点进行归纳总结，让考生对每一个题目所需的知识点有一个直接的认知，方便查漏补缺，完善知识体系。此外，【大纲回顾】一栏为考生提供了过去一年的考试大纲，对考生细致了解考试内容，把握重点将起到重要的作用。【本章小结】则全面回顾了本章所涉及的知识点，有助于考生系统总结，温故知新。

3. 精心设计，完美自测

除上述经典部分之外，编者还在附录中设计了“参考答案及自测表”，对所有真题题目进行题型归类，方便考生归纳总结复习的不足，及时发现并弥补自身知识体系的不足。

考生在使用本书的时候，应该按章节先结合教材、复习全书同步复习相关知识点，同时选取 5 套左右的真题试卷作为阶段性模拟测验。在完成第一次系统复习后，再选取 5 套左右的真题试卷进行模拟演练，并仔细填写错误统计表，总结错误类型，进行第二轮专项突破复习，结合我们的《考研数学能力训练——基础篇》完成一次全面的考试能力提升。在完成第二轮复习之后，做完剩下的考研真题卷，再次检查自身的错误，进一步完善自己的知识结构。在每次模拟考试

的时候，应严格按照考试时间进行，稳步提升对考试的时间掌控能力。另外，在每次做完一套考研真题之后，考生应当对自己所做的答卷作一个详细的归纳总结，查清出错原因，看看自己是在基本理论、基本概念和基本方法方面有什么欠缺，还是在做题技巧、知识的综合和灵活运用等方面有所不足。总之，这样的归纳总结过程对于考生的复习来说是十分有必要的，其重要程度与做题无异，考生应当认真对待这一复习环节。

编者力求编写一套更为优秀的辅导丛书，但因水平有限，难免有不足之处，恳请广大考生读者批评指正。

最后，真诚地祝愿广大考生通过辛勤的努力，取得良好的成绩，考入理想的学府。

编　者

2015 年于北京

目　　录

第一部分　微积分

第二部分　线性代数

附　　录

第一部分　微积分

第一章　函数、极限、连续

大纲回顾

考试内容

函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；复合函数、反函数、分段函数和隐函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数；函数关系的建立.

数列极限与函数极限的定义及其性质；函数的左极限和右极限；无穷小量和无穷大量的概念及其关系；无穷小量的性质及无穷小量的比较；极限的四则运算；极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

专题一　函数的性质

1.(04，数3,7题)函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.　　【　】

(A)$(-1,0)$.　　(B)$(0,1)$.　　(C)$(1,2)$.　　(D)$(2,3)$.

解析

根据题意,函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=0,x=1,x=2$,又

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\frac{1}{18}\sin3$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=-\frac{1}{4}\sin2 \qquad \lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{\sin2}{4}$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=\infty$$

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1),(1,2),(2,3)$ 内都是无界的,故选择(A).

知识点归纳

这是一道考查函数有界性的典型题,首先考生应该根据函数的形式,判断出函数的间断点,通过函数间断点处的极限 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\infty$,判断出函数的有界区间.

专题二 极限的概念与性质

2. (14,数 3,1 题) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且 $a\neq0$,则当 n 充分大时有 【 】

(A) $|a_n|>\frac{|a|}{2}$. (B) $|a_n|<\frac{|a|}{2}$.

(C) $a_n>a-\frac{1}{n}$. (D) $a_n<a+\frac{1}{n}$.

解析

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=a$,由数列极限定义知,对 $\forall\varepsilon>0$,由于 $a\neq0$ 不妨取 $\varepsilon=\frac{|a|}{2}$,$\exists$ 正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $|a_n-a|<\varepsilon=\frac{|a|}{2}$. 则

$$|a|-|a_n|<|a_n-a|<\frac{|a|}{2}\Rightarrow|a_n|>\frac{|a|}{2}.$$

故当 n 充分大时,有 $|a_n|>\frac{|a|}{2}$.

故选(A).

3. (10,数 3,4 题) 设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有 【 】

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$. (B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$. (D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

解析

当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x$, $h(x)=e^{\frac{x}{10}}$ 均为正值,由洛必达法则得:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=10\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^9x}{x}=10\times9\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^8x}{x}=\cdots=10!\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{10}}}=10\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{10}}}=0$$

所以当 x 充分大时，有 $f(x)<g(x)$，$g(x)<h(x)$，即 $f(x)<g(x)<h(x)$，故选择(C).

知识点归纳

求解本题的依据是：由极限不等式性质可得，若函数 $F(x)>0$，$G(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{G(x)}=a<1$，则存在 $x_0>0$ 使得当 $x>x_0$ 时 $\dfrac{F(x)}{G(x)}<1$ 成立，即当 x 充分大时，$F(x)<G(x)$ 成立.

专题三　求解数列极限

4.(06，数 3，1 题) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ________.

解析

【思路一】 转化为指数函数求解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}}$$

因为 $(-1)^n$ 有界，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=e^0=1.$$

【思路二】 令 $t_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$，$n=1,2,3\cdots$，则

当 $n=2k-1$ 时

$$t_n=\left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-1}=\frac{2k-1}{2k}=1-\frac{1}{n+1}.$$

当 $n=2k$ 时

$$t_n=\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{1}=\frac{2k+1}{2k}=1+\frac{1}{n}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$，故

$$\lim_{n\to\infty}t_n=1.$$

5.(15，数 3，1 题) 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是　　【　　】

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

解析

本题考查数列极限与子列极限的关系.

数列 $x_n\to a(n\to\infty)\Leftrightarrow$ 对任意的子列 $\{x_{n_k}\}$ 均有 $x_{n_k}\to a(k\to\infty)$，所以(A)、(B)、(C) 正确；(D) 选项缺少 x_{3n+2} 的敛散性条件，故选(D).

专题四　单调有界准则和夹逼准则

6.(08,数2,5题)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是　【　】

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

解析

对于选项(A):由数列 $\{x_n\}$ 收敛不能推出 $\{x_n\}$ 单调,也得不到函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调,所以 $\{f(x_n)\}$ 不一定收敛,故(A) 错误;

对于选项(B):由数列 $\{x_n\}$ 单调可以推出函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调,又 $f(x)$ 有界所以 $\{f(x_n)\}$ 也有界,由单调有界准则知(B) 正确;

对于选项(C):可令 $x_n = n$,使得数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛,但 $\{x_n\}$ 不收敛,故(C) 错误;

对于选项(D):同样可令 $x_n = n$,由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调,可知数列 $\{f(x_n)\}$ 单调,但 $\{x_n\}$ 不收敛,故(D) 错误.

故选择(B).

知识点归纳

数列的单调有界收敛准则:

1) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界,即存在一个确定的常数 m,使得对于一切的 n 都有 $x_n \geqslant m$,则数列 $\{x_n\}$ 收敛,即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

2) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界,即存在一个确定的常数 m,使得对于一切的 n 都有 $x_n \leqslant m$,则数列 $\{x_n\}$ 收敛,即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

7.(06,数2,18题)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1,2,\cdots)$

(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,并求其极限;(Ⅱ) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解析

(Ⅰ) 利用数列单调有界收敛准则来判断极限的存在性.

易知对于 $0 < x < \pi$ 时有 $\sin x < x$,而 $0 < x_2 = \sin x_1 < x_1 < \pi$,利用归纳证明可得 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n < \pi$,即数列 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界,所以数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,对方程 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边取极限有 $A = \sin A$,可得 $A = 0$.

(Ⅱ)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{\sin x_n}{x_n}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{x_n^2}\ln\left(1+\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}\right\}$$

转化为函数极限，由(Ⅰ)知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，又

$$\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}\right\}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

知识点归纳

遇到证明如本题这种递推数列极限的问题，一般应想到利用数列单调有界收敛准则，其关键在于判断数列的单调性与有界性.在已证明极限存在的基础上再利用所给方程，等式两边同时取极限，即可得到所求数列极限.

专题五 等价无穷小

8.(05，数 3，1 题)极限$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$______.

解析

当$x\to\infty$时，因$\dfrac{2x}{x^2+1}\to0$，所以有等价无穷小$\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\sim\dfrac{2x}{x^2+1}$，从而得

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{2x}{x^2+1}=2.$$

9.(02，数 3，一(1)题)设常数$a\neq\dfrac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$______.

解析

利用重要极限

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{\frac{n(1-2a)}{1-2a}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-2a}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)}$$
$$=\frac{1}{1-2a}\ln e=\frac{1}{1-2a}.$$

10.(13，数 3，15 题)当$x\to0$时，$1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x$与$ax^n$为等价无穷小，求$n$和$a$的值.

解析

【思路一】 依题设：当$x\to0$时，$1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x$与$ax^n$为等价无穷小，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x}{ax^n}=1.$$

又因为

$$\begin{aligned}&1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x\\=&1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos2x+\cos x\cdot\cos2x-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x\end{aligned}$$

$$=1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x).$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{ax^n}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{ax^n}+\frac{\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)}{ax^n}\right]$$

$$=1.$$

由极限存在知 $n=2$ 且$\frac{1}{2a}+\frac{4}{2a}+\frac{9}{2a}=1\Rightarrow a=7$.

【思路二】 直接运用洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+2\cos x\cdot\sin 2x\cdot\cos 3x+3\cos x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x}{anx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+2x\cdot 2\cos x\cos 3x+3x\cdot 3\cos x\cdot\cos 2x}{anx^{n-1}}$$

由极限存在知 $n=2$,上式 $=\frac{1+4+9}{2a}=\frac{7}{a}=1$,

即 $n=2$, $a=7$.

知识点归纳

1.本题主要考查了等价无穷小的概念及极限的求法,涉及的三角函数较为复杂,处理的方法也很多,对考生的知识点掌握要求很高.

2.已知极限反过来求相关参数,这类所谓极限的逆问题,一般仍用极限的四则运算、无穷小量的等价代换和洛必达法则等进行分析讨论.但是用洛必达法则时,必须注意其前提条件,检验 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞ 是否成立.

11.(08,数3,15题)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

解析

利用等价无穷小替换 $\ln[1+\varphi(x)]\sim\varphi(x)(\varphi\to 0)$,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{6x^2}=-\frac{1}{6}.$$

专题六　求解函数极限

12.(12,数 3,9 题)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ________.

解析

本题属于 1^{∞} 类型. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}\ln\tan x}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\tan x}\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}}{-\sin x-\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

知识点归纳

对于 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^{\infty},\infty^0$ 等类型的未定式,通常要先化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,然后再使用洛必达法则.

13.(09,数 3,9 题)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

解析

利用等价无穷小代换

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=e\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x-1}-1}{1-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}=e\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{-\frac{1}{3}x^2}$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{3}}=\frac{3}{2}e.$$

14.(07,数 3,11 题)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ________.

解析

当 $x\to+\infty$,$\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}\sim\dfrac{x^3}{2^x}$,又 $|\sin x+\cos x|<2$,故

$$0<\left|\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)\right|<\frac{2x^3}{2^x}$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{2^x}=0$,故由夹逼准则知原极限为 0.

15.(12,数 3,15 题)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

解析

该极限为 $\frac{0}{0}$ 型,可连续使用洛必达法则来求,但这样比较复杂,我们可以考虑先用等价无穷小因子替换,然后再使用洛必达法则.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}e^{x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{2-2\cos x-x^2}}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\frac{1}{12}.$$

知识点归纳

使用洛必达法则之前要用到一些技巧,比如变量替换、等价无穷小因子替换、恒等变形以及极限的四则运算法则等方法,本题先使用等价无穷小因子替换,再使用洛必达法则比较简单.

16.(11,数 3,15 题)求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

解析

【思路一】 由 $\ln(1+x)\sim x(x\to0)$ 及洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x\sqrt{1+2\sin x}}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x}.$$

第一个极限可以直接将 $x=0$ 代入得到极限值为 1,第二个极限可以继续采用洛必达法则进行求解.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(-\sin x-\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}\right)=-1$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

【思路二】 利用 $\sqrt{1+2\sin x}$ 的二阶泰勒展开式有

$$(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(2\sin x)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(2\sin x)^2+o(x^2)$$
$$=1+\sin x-\frac{1}{2}\sin^2x+o(x^2).$$

所以

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x-\frac{1}{2}\sin^2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

【思路三】 将原式化简为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}.$$