

· 考研数学 ·

考研数学

清华版

精品备考丛书

历年真题 名师精解

数学
(三)

胡金德 谭泽光◎主编

◆ 分类精解 —— 历年真题条分缕析 ◆

◆ 题型丰富 —— 海量题目科学归纳 ◆

◆ 名师点拨 —— 深刻剖析真题本质 ◆

◆ 解读多维 —— 全面把握命题规律 ◆

清华大学出版社



(清华版) 考研数学精品备考

· 考研 数学 ·

历年真题 名师精解

数学
(三)

胡金德 谭泽光 主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书精心编排了2001年至2015年共15年的数学三考研真题,依照考试大纲要求,按知识点对所有题目进行讲解,体系清晰,分析细致、讲解详尽,便于考生系统复习。本书可作为广大考生复习阶段模拟练习的重要题库,起到查漏补缺、指导复习方向的作用。

本书可供将参加2016年研究生入学考试的学生备考使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题名师精解. 数学三/胡金德,谭泽光主编. --北京:清华大学出版社,2015
(《清华版》考研数学精品备考丛书)

ISBN 978-7-302-40347-0

I. ①考… II. ①胡… ②谭… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第114384号

责任编辑:朱敏悦

封面设计:汉风唐韵

责任校对:王凤芝

责任印制:王静怡

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦A座 邮 编: 100084

社总机: 010-62770175 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者: 北京富博印刷有限公司

装 订 者: 北京市密云县京文制本装订厂

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm

印 张: 23

字 数: 570千字

版 次: 2015年7月第1版

印 次: 2015年7月第1次印刷

印 数: 1~3000

定 价: 48.00元

产品编号: 064940-01

前 言

全国工学、经济学硕士研究生入学统一数学考试实施多年来,每年命题都是紧扣大纲,形成了相对稳定、完整的模式。对这种模式的深入了解,有助于考生掌握命题规律,熟悉考试题型,争取优良成绩是至关重要的。因此,在每一套考研数学辅导教程丛书中,真题解析类的书目都是重要的组成部分之一。通过练习真题,可以有效地帮助考生把握数学考试大纲的命题指导思想、原则和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题重点、总结命题规律和揣摩命题动态的重要依据,同时本书也可作为考生复习阶段模拟练习的重要题库,起到查漏补缺,指导复习方向的作用。

因此,一本经典的历年考试真题解析教程应当是内容完整、分析细致、求解详尽、总结全面的,这也是广大考生所热切期待的。本丛书作者就是依据上述精神,精心编纂了本册《考研数学历年真题名师精解》。本书布局巧妙,内容精细,综合了众多相关教程和复习指导书的优点,具有如下几个特点:

1. 内容细致,题型丰富

本书精心编排了2001年至2015年共15年的数学三考研真题,依照考试大纲的要求,按知识点归纳对所有题目分专题进行讲解,体系清晰,便于考生系统复习。每一专型的题目按选择、填空、简答排序,内容由浅入深,方便考生循序渐进地领会各各知识点。同时本书也综合了其他几类试卷(如数学一,数学二)考试中的一些经典真题,以求对考研大纲的知识点全面覆盖。

2. 解析详尽,总结全面

对于每一道题目,编者为广大考生设计两个重要板块:【解析】和【知识点归纳】。【解析】是依据考研名师提供的经典讲义教案,提供了最新的解题思路、方法和技巧,给出详细准确的求解过程,以帮助考生开阔思路,提高解题能力。【知识点归纳】则是对每一道题目所涉及的知识点进行归纳总结,让考生对每一个题目所需的知识点有一个直接的认知,方便查漏补缺,完善知识体系。此外,【大纲回顾】一栏为考生提供了过去一年的考试大纲,对考生细致了解考试内容,把握重点将起到重要的作用。【本章小结】则全面回顾了本章所涉及的知识点,有助于考生系统总结,温故知新。

3. 精心设计,完美自测

除上述经典部分之外,编者还在附录中设计了“参考答案及自测表”,对所有真题题目进行题型归类,方便考生归纳总结复习的不足,及时发现并弥补自身知识体系的不足。

考生在使用本书的时候,应该按章节先结合教材、复习全书同步复习相关知识点,同时选取5套左右的真题试卷作为阶段性模拟测验。在完成第一次系统复习后,再选取5套左右的真题试卷进行模拟演练,并仔细填写错误统计表,总结错误类型,进行第二轮专项突破复习,结合我们的《考研数学能力训练——基础篇》完成一次全面的考试能力提升。在完成第二轮复习之后,做完剩下的考研真题卷,再次检查自身的错误,进一步完善自己的知识结构。在每次模拟考试

的时候,应严格按照考试时间进行,稳步提升对考试的时间掌控能力。另外,在每次做完一套考研真题之后,考生应当对自己所做的答卷作一个详细的归纳总结,查清出错原因,看看自己是在基本理论、基本概念和基本方法方面有什么欠缺,还是在做题技巧、知识的综合和灵活运用等方面有所不足。总之,这样的归纳总结过程对于考生的复习来说是十分有必要的,其重要程度与做题无异,考生应当认真对待这一复习环节。

编者力求编写一套更为优秀的辅导丛书,但因水平有限,难免有不足之处,恳请广大考生读者批评指正。

最后,真诚地祝愿广大考生通过辛勤的努力,取得良好的成绩,考入理想的学府。

编 者

2015 年于北京

目 录

第一部分 微 积 分

第一章 函数、极限、连续	1
专题一 函数的性质	1
专题二 极限的概念与性质	2
专题三 求解数列极限	3
专题四 单调有界准则和夹逼准则	4
专题五 等价无穷小	5
专题六 求解函数极限	7
专题七 无穷小及其阶的比较	12
专题八 极限中参数的求解	17
专题九 函数连续性及其间断点类型	17
专题十 分段函数的连续性	20
专题十一 函数的渐近线问题	20
第二章 一元函数微分学	24
专题一 导数与微分的定义	24
专题二 导数的几何意义	27
专题三 连续与导数的关系	27
专题四 导数与微分的计算	30
专题五 函数单调性、极值和最值	32
专题六 拐点与凹凸性	34
专题七 函数零点与方程根的讨论	37
专题八 微分中值定理	38
专题九 函数不等式	42
专题十 微分学的经济应用	44
第三章 一元函数积分学	50
专题一 求解不定积分	50
专题二 定积分的概念和性质	53
专题三 求解定积分	56
专题四 变限积分函数的求解	60
专题五 反常积分的性质和计算	64
专题六 定积分的几何、经济学应用	65
第四章 多元函数微积分学	71
专题一 偏导数与全微分的基本概念	71
专题二 偏导数与全微分的计算	73

专题三	多元复合函数求导	75
专题四	隐函数求导	80
专题五	多元函数的极值和最值	82
专题六	二重积分的概念与性质	86
专题七	计算二重积分	88
专题八	二重积分的极坐标变换	92
专题九	利用区域对称性和函数的奇偶性求解二重积分	96
专题十	交换积分次序	104
第五章	无穷级数	108
专题一	级数的敛散性判定	108
专题二	正项级数与交错级数	112
专题三	幂级数的收敛区间与收敛域	114
专题四	幂级数的和函数	116
专题五	求级数的和	121
专题六	函数的幂级数展开	122
第六章	常微分方程与差分方程	126
专题一	可分离变量的微分方程	126
专题二	齐次方程	127
专题三	一阶线性微分方程	127
专题四	二阶常系数线性微分方程的特解和通解	129
专题五	微分方程的应用	130
专题六	一阶常系数线性差分方程	133

第二部分 线性代数

第一章	行列式	135
专题一	数字型行列式的计算	135
专题二	三对角线行列式的计算	137
专题三	抽象型行列式的计算	139
第二章	矩阵	143
专题一	矩阵的基本运算	143
专题二	伴随矩阵	145
专题三	矩阵求逆	145
专题四	分块矩阵	147
专题五	初等变换	148
专题六	矩阵的秩	152
专题七	求解矩阵方程	155
第三章	向量	158
专题一	线性相关性与线性表示	158
专题二	特征向量与向量组的线性相关性	162
专题三	向量组的秩与线性相关性	163

专题四	极大线性无关组	167
专题五	向量组的等价问题	169
第四章	线性方程组	172
专题一	线性方程组解的判定、性质与结构	172
专题二	齐次线性方程组的基础解系与通解	175
专题三	非齐次线性方程组的通解	177
专题四	两方程组的公共解与同解问题	183
第五章	矩阵的特征值与特征向量	186
专题一	矩阵特征值与特征向量的求解	186
专题二	相似矩阵的性质及其判定	187
专题三	方阵的对角化	189
专题四	实对称矩阵及其对角化	192
第六章	二次型	203
专题一	二次型的基本概念	203
专题二	正交变换化二次型为标准形	207
专题三	合同矩阵的判定	211
专题四	正定矩阵与正定二次型	212

第三部分 概率论与数理统计

第一章	随机事件和概率	215
专题一	随机事件及其概率	215
专题二	几何概型与古典概型	216
专题三	条件概率与全概率公式	217
专题四	独立事件与伯努利概型	219
第二章	随机变量及其分布	222
专题一	随机变量的分布函数	222
专题二	离散型随机变量的概率分布	223
专题三	连续型随机变量及其概率密度	224
专题四	随机变量的常见分布	225
专题五	随机变量函数的分布	228
第三章	多维随机变量的分布	231
专题一	二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布与条件分布	231
专题二	二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度与条件密度	236
专题三	随机变量的独立性与相关系数	238
专题四	正态分布、指数分布与均匀分布	241
专题五	二维随机变量函数的分布	246
第四章	随机变量的数字特征	260
专题一	数学期望与方差的概念与性质	260
专题二	几种重要分布的期望与方差	262
专题三	协方差与相关系数	263

第五章 大数定律和中心极限定理	269
专题一 切比雪夫不等式	269
专题二 辛钦大数定理	269
专题三 列维 — 林德伯格中心极限定理	270
第六章 数理统计的基本概念	273
专题一 统计量的数字特征	273
专题二 χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	276
第七章 参数估计	279
专题一 矩估计与最大似然估计	279
专题二 区间估计	283
专题三 估计量的评价标准	284

附 录

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	287
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	292
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	297
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	302
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	307
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	312
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	316
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	321
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	325
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	330
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	335
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	339
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	344
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	349
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三真题	353
后记	357

第一部分 微积分

第一章 函数、极限、连续

大纲回顾

考试内容

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;复合函数、反函数、分段函数和隐函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数;函数关系的建立.

数列极限与函数极限的定义及其性质;函数的左极限和右极限;无穷小量和无穷大量的概念及其关系;无穷小量的性质及无穷小量的比较;极限的四则运算;极限存在的两个准则;单调有界准则和夹逼准则;两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续的概念;函数间断点的类型;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

专题一 函数的性质

1. (04, 数3, 7题) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界. 【 】

- (A) $(-1, 0)$. (B) $(0, 1)$. (C) $(1, 2)$. (D) $(2, 3)$.

解析

根据题意,函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=0, x=1, x=2$, 又

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{18} \sin 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{1}{4} \sin 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, 1), (1, 2), (2, 3)$ 内都是无界的, 故选择(A).

知识点归纳

这是一道考查函数有界性的典型题, 首先考生应该根据函数的形式, 判断出函数的间断点, 通过函数间断点处的极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$, 判断出函数的有界区间.

专题二 极限的概念与性质

2. (14, 数3, 1题) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

【 】

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$.

(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$.

(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$.

(D) $a_n < a + \frac{1}{n}$.

解析

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 由数列极限定义知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $a \neq 0$ 不妨取 $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$, $\exists$ 正整数 N ,

使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{|a|}{2}$. 则

$$|a| - |a_n| < |a_n - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2}.$$

故当 n 充分大时, 有 $|a_n| > \frac{|a|}{2}$.

故选(A).

3. (10, 数3, 4题) 设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有

【 】

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$.

(B) $h(x) < g(x) < f(x)$.

(C) $f(x) < g(x) < h(x)$.

(D) $g(x) < f(x) < h(x)$.

解析

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$ 均为正值, 由洛必达法则得:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^9 x}{x} = 10 \times 9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^8 x}{x} = \dots = 10! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{10}}} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{x}{10}}} = 0$$

所以当 x 充分大时, 有 $f(x) < g(x), g(x) < h(x)$, 即 $f(x) < g(x) < h(x)$, 故选择(C).

知识点归纳

求解本题的依据是: 由极限不等式性质可得, 若函数 $F(x) > 0, G(x) > 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \alpha < 1$, 则存在 $x_0 > 0$ 使得当 $x > x_0$ 时 $\frac{F(x)}{G(x)} < 1$ 成立, 即当 x 充分大时, $F(x) < G(x)$ 成立.

专题三 求解数列极限

4. (06, 数 3, 1 题) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析

【思路一】 转化为指数函数求解

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}}$$

因为 $(-1)^n$ 有界, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = e^0 = 1.$$

【思路二】 令 $t_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n}, n = 1, 2, 3, \dots$, 则

当 $n = 2k - 1$ 时

$$t_n = \left(\frac{2k}{2k-1} \right)^{-1} = \frac{2k-1}{2k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

当 $n = 2k$ 时

$$t_n = \left(\frac{2k+1}{2k} \right)^1 = \frac{2k+1}{2k} = 1 + \frac{1}{n}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1.$$

5. (15, 数 3, 1 题) 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是

【 】

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$.

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$.

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

解析

本题考查数列极限与子列极限的关系.

数列 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow$ 对任意的子列 $\{x_{n_k}\}$ 均有 $x_{n_k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 所以(A)、(B)、(C) 正确; (D) 选项缺少 x_{3n+2} 的敛散性条件, 故选(D).

专题四 单调有界准则和夹逼准则

6. (08, 数 2, 5 题) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 【 】

- (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

解析

对于选项(A): 由数列 $\{x_n\}$ 收敛不能推出 $\{x_n\}$ 单调, 也得不到函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, 所以 $\{f(x_n)\}$ 不一定收敛, 故(A) 错误;

对于选项(B): 由数列 $\{x_n\}$ 单调可以推出函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, 又 $f(x)$ 有界所以 $\{f(x_n)\}$ 也有界, 由单调有界准则知(B) 正确;

对于选项(C): 可令 $x_n = n$, 使得数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 但 $\{x_n\}$ 不收敛, 故(C) 错误;

对于选项(D): 同样可令 $x_n = n$, 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, 可知数列 $\{f(x_n)\}$ 单调, 但 $\{x_n\}$ 不收敛, 故(D) 错误.

故选择(B).

知识点归纳

数列的单调有界收敛准则:

1) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界, 即存在一个确定的常数 m , 使得对于一切的 n 都有 $x_n \geq m$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

2) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界, 即存在一个确定的常数 m , 使得对于一切的 n 都有 $x_n \leq m$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

7. (06, 数 2, 18 题) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其极限; (II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解析

(I) 利用数列单调有界收敛准则来判断极限的存在性.

易知对于 $0 < x < \pi$ 时有 $\sin x < x$, 而 $0 < x_2 = \sin x_1 < x_1 < \pi$, 利用归纳证明可得 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n < \pi$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界, 所以数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 对方程 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边取极限有 $A = \sin A$, 可得 $A = 0$.

(II)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{x_n^2} \ln \frac{\sin x_n}{x_n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{x_n^2} \ln \left(1 + \frac{\sin x_n}{x_n} - 1 \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} - 1 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n - x_n}{x_n^3} \right\}$$

转化为函数极限,由(I)知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 又

$$\exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \right\} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

知识点归纳

遇到证明如本题这种递推数列极限的问题,一般应想到利用数列单调有界收敛准则,其关键在于判断数列的单调性与有界性.在已证明极限存在的基础上再利用所给方程,等式两边同时取极限,即可得到所求数列极限.

专题五 等价无穷小

8. (05, 数3, 1题) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2+1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 因 $\frac{2x}{x^2+1} \rightarrow 0$, 所以有等价无穷小 $\sin \frac{2x}{x^2+1} \sim \frac{2x}{x^2+1}$, 从而得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{2x}{x^2+1} = 2.$$

9. (02, 数3, 一(1)题) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析

利用重要极限

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^{\frac{n(1-2a)}{1-2a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-2a} \ln \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^{n(1-2a)} \\ &= \frac{1}{1-2a} \ln e = \frac{1}{1-2a}. \end{aligned}$$

10. (13, 数3, 15题) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 和 a 的值.

解析

【思路一】 依题设: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} = 1.$$

又因为

$$\begin{aligned} &1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \\ &= 1 - \cos x + \cos x - \cos x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \end{aligned}$$

$$= 1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x).$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos x}{ax^n} + \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{ax^n} + \frac{\cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2)}{ax^n} \right] \\ &= 1. \end{aligned}$$

由极限存在知 $n = 2$ 且 $\frac{1}{2a} + \frac{4}{2a} + \frac{9}{2a} = 1 \Rightarrow a = 7$.

【思路二】 直接运用洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 2\cos x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x + 3\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{anx^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 2x \cdot 2\cos x \cos 3x + 3x \cdot 3\cos x \cdot \cos 2x}{anx^{n-1}} \end{aligned}$$

由极限存在知 $n = 2$, 上式 $= \frac{1+4+9}{2a} = \frac{7}{a} = 1$,

即 $n = 2, a = 7$.

知识点归纳

1. 本题主要考查了等价无穷小的概念及极限的求法, 涉及的三角函数较为复杂, 处理的方法也很多, 对考生的知识点掌握要求很高.

2. 已知极限反过来求相关参数, 这类所谓极限的逆问题, 一般仍用极限的四则运算、无穷小量的等价代换和洛必达法则等进行分析讨论. 但是用洛必达法则时, 必须注意其前提条件, 检验 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ 或 ∞ 是否成立.

11. (08, 数 3, 15 题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

解析

利用等价无穷小替换 $\ln[1 + \varphi(x)] \sim \varphi(x) (\varphi \rightarrow 0)$, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1 \right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{6x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

专题六 求解函数极限

12. (12, 数 3, 9 题) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析

本题属于 1^∞ 类型. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x - \sin x} \ln \tan x}$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\tan x} \sec^2 x}{-\sin x - \cos x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{\sin x \cos x}{-\sin x - \cos x}}} = e^{-\sqrt{2}}.$$

知识点归纳

对于 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 等类型的未定式, 通常要先化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 然后再使用洛必达法则.

13. (09, 数 3, 9 题) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析

利用等价无穷小代换

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x - 1} - 1}{1 - (1+x^2)^{\frac{1}{3}}} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{-\frac{1}{3}x^2}$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{3}} = \frac{3}{2}e.$$

14. (07, 数 3, 11 题) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析

当 $x \rightarrow +\infty$, $\frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} \sim \frac{x^3}{2^x}$, 又 $|\sin x + \cos x| < 2$, 故

$$0 < \left| \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) \right| < \frac{2x^3}{2^x}$$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{2^x} = 0$, 故由夹逼准则知原极限为 0.

15. (12, 数 3, 15 题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}.$

解析

该极限为 $\frac{0}{0}$ 型, 可连续使用洛必达法则来求, 但这样比较复杂, 我们可以考虑先用等价无穷小因子替换, 然后再使用洛必达法则.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2-2\cos x - x^2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2-2\cos x - x^2}}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

知识点归纳

使用洛必达法则之前要用到一些技巧,比如变量替换、等价无穷小因子替换、恒等变形以及极限的四则运算法则等方法,本题先使用等价无穷小因子替换,再使用洛必达法则比较简单.

16. (11, 数 3, 15 题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$.

解析

【思路一】 由 $\ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$ 及洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}} - 1}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{x \sqrt{1+2\sin x}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{x}.\end{aligned}$$

第一个极限可以直接将 $x = 0$ 代入得到极限值为 1, 第二个极限可以继续采用洛必达法则进行求解.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sin x - \frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}} \right) = -1$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

【思路二】 利用 $\sqrt{1+2\sin x}$ 的二阶泰勒展开式有

$$\begin{aligned}(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}(2\sin x) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(2\sin x)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + o(x^2).\end{aligned}$$

所以

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x - \frac{1}{2}\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

【思路三】 将原式化简为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x^2}.$$