应用数学译丛

Markov Chains
Models, Algorithms and Applications Second Edition

马尔可夫链：模型、算法与应用

[美] Wai-Ki Ching, Ximin Huang, Michael K.Ng, Tak-Kuen Siu 著
陈曦 译

www.tup.tsinghua.edu.cn

清华大学出版社

应 用 数 学 译 丛

Markov Chains

Models, Algorithms and Applications Second Edition

马尔可夫链：模型、算法与应用

[美] Wai-Ki Ching, Ximin Huang, Michael K.Ng, Tak-Kuen Siu 著

陈 曦 译

www.tup.tsinghua.edu.cn

清华大学出版社

北 京

内容简介

本书讲述了马尔可夫链模型在排队系统、网页重要性排名、制造系统、再制造系统、库存系统以及金融风险管理等方面的最新应用进展.全书共安排8章内容,第1章介绍马尔可夫链、隐马尔可夫模型和马尔可夫决策过程的基本理论和方法,其余7章分别介绍马尔可夫链模型在不同领域中的应用.

本书可作为自动化、工业工程、统计学、应用数学以及管理学等专业高年级本科生或研究生的专业课教材,也可作为相关领域的研究人员及工程技术人员的参考书.

Translation from English language edition:
Markov Chains: Models, Algorithms and Applications, Second Edition

by Wai-Ki Ching, Ximin Huang, Michael K. Ng, Tak-Kuen Siu

北京市版权局著作权合同登记号　图字:01-2015-2328

图书在版编目(CIP)数据

马尔可夫链:模型、算法与应用/程玮琪等著;陈曦译.--北京:清华大学出版社,2015
(应用数学译丛)
书名原文:Markov chains:models,algorithms and applications
ISBN 978-7-302-39880-6

Ⅰ.①马…　Ⅱ.①程…②陈…　Ⅲ.①马尔可夫链　Ⅳ.①O211.62

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第080992号

责任编辑:刘　颖
封面设计:常雪影
责任校对:赵丽敏
责任印制:杨　艳

出版发行:清华大学出版社
　网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
　地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编:100084
　社 总 机:010-62770175　　邮　　购:010-62786544
　投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:北京密云胶印厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×230mm　　印　　张:13.25　　字　　数:272千字
版　　次:2015年7月第1版　　印　　次:2015年7月第1次印刷
印　　数:1~2000
定　　价:39.00元

产品编号:059166-01

译者前言

本书对马尔可夫链的理论和它的实际应用都有精彩简洁的论述. 目前在国内这样的书还不多见,相信它对相关专业的学生和从事应用研究的研究人员大有裨益,这也是译者翻译本书的初衷.

翻译的困难在于既要忠实于原文又要有流畅的译文. 译者力图避免英文式的中文,但这也许是徒劳的,我们似乎早已习惯了混杂着英文句式的中文.

译文中对于矩阵和向量的记法沿用原文的记法,即向量用黑正体表示,而矩阵用白斜体表示.

非常感谢本书作者就译文初稿提出的修改意见. 特别感谢刘颖老师所做的技术编辑工作. 译文中的错漏之处,还望读者批评指正.

本书作者之一 Wai-Ki Ching 教授分别于 2011 年 5 月和 2014 年 1 月由清华大学"海外学者短期讲学计划"邀请前来讲授有关马尔可夫链的理论与应用. 译者感谢清华大学"海外学者短期讲学计划"以及教育部与国家外专局联合实施的"高等学校学科创新引智计算"的支持.

陈　曦

2015 年 3 月于北京清华园

前　言

本书旨在概述近年来马尔可夫模型的进展及其在排队系统、制造系统、再制造系统、库存系统、网页重要性排名以及金融风险管理中的应用.

本书共有 8 章.

第 1 章简介离散和连续时间马尔可夫链的经典理论，突出了有限状态的马尔可夫链与矩阵理论之间的关系，介绍了一些可用于求马尔可夫链平稳分布的解线性系统的经典迭代方法，然后给出隐马尔可夫模型和马尔可夫决策过程的基础理论和算法.

第 2 章讨论如何用连续时间马尔可夫链对排队系统建模，以及如何利用离散时间马尔可夫链计算在互联网中代表网址重要性的网页排名. 第 3 章研究制造和再制造系统的马尔可夫模型，介绍了被捕获到的系统的闭式解和求解此系统的快速数值算法. 第 4 章提出了一个简单的隐马尔可夫模型以及估计模型参数的快速数值算法，然后介绍隐马尔可夫模型在客户分类中的应用.

客户终身价值是营销管理中的一个重要的概念和数量. 第 5 章讨论客户终身价值的马尔可夫决策过程，提出了一种基于马尔可夫决策过程，采用真实数据计算客户终身价值的方法.

第 6 章考虑高阶马尔可夫链模型，特别讨论了一类简化的高阶马尔可夫链模型，介绍了基于线性规划的模型参数的高效估计方法，以及当前有关需求预测、库存控制和金融风险度量等方面的应用研究成果. 第 7 章介绍了一类简化的多元马尔可夫模型，并再次提出基于线性规划的高效估计方法，讨论了这类模型在需求预测、库存控制和信用分级数据建模中的应用. 第 8 章重新回到隐马尔可夫模型，提出一类新的隐马尔可夫模型及其模型参数估计的高效算法，讨论此模型在利率、信用分级和违约数据建模中的应用.

作者感谢 Operational Research Society，Oxford University Press，Palgrave，Taylor & Francis'，Wiley & Sons，Journal of Credit Risk，Incisive Financial Publishing Limited 以及 Yokohama Publishers，感谢他们允许在本书中再版一些内容. 作者还要感谢 Werner Fortmann，Gretel Fortmann 和 Mimi Lui 在本书撰写过程中给予的帮助.

Wai-Ki CHING（程玮琪）　香港特别行政区，港岛
Ximin HUANG（黄曦敏）　佐治亚，亚特兰大
Michael K. NG（吴国宝）　香港特别行政区，九龙
Tak-Kuen SIU（萧德权）　澳大利亚，悉尼

目　录

第 1 章　绪论 …… 1

1.1　马尔可夫链 …… 1
1.1.1　马尔可夫链的例子 …… 2
1.1.2　n 步转移矩阵 …… 4
1.1.3　不可约马尔可夫链与状态的分类 …… 5
1.1.4　对随机游走的分析 …… 7
1.1.5　用 Excel 对马尔可夫链仿真 …… 8
1.1.6　建立马尔可夫链模型 …… 10
1.1.7　有限马尔可夫链的平稳分布 …… 11
1.1.8　平稳分布的应用 …… 15
1.2　连续时间马尔可夫链 …… 15
1.2.1　两个状态的连续时间马尔可夫链 …… 17
1.3　求解线性系统的迭代法 …… 18
1.3.1　有关矩阵理论的一些结论 …… 18
1.3.2　矩阵分裂 …… 19
1.3.3　经典的迭代法 …… 21
1.3.4　谱半径 …… 23
1.3.5　逐次超松弛方法 …… 24
1.3.6　共轭梯度法 …… 25
1.3.7　特普利茨矩阵 …… 28
1.4　隐马尔可夫模型 …… 29
1.5　马尔可夫决策过程 …… 31
1.5.1　平稳策略 …… 34
1.6　习题 …… 35

第 2 章　排队系统与网络 …… 39

2.1　马尔可夫排队系统 …… 39

2.1.1 $M/M/1/n-2$ 排队系统 …… 39
2.1.2 $M/M/s/n-s-1$ 排队系统 …… 41
2.1.3 $M/M/1/\infty$ 队列系统中到达顾客的分配 …… 42
2.1.4 两个 M/M/1 队列还是单个 M/M/2 队列? …… 43
2.1.5 两队列自由独立系统 …… 44
2.1.6 两队列溢流系统 …… 45
2.1.7 复杂排队系统的预处理 …… 46
2.2 搜索引擎 …… 48
2.2.1 PageRank 算法 …… 50
2.2.2 乘幂法 …… 51
2.2.3 例子 …… 52
2.2.4 逐次超松弛/雅可比超松弛法与混合方法 …… 53
2.2.5 收敛性分析 …… 55
2.3 总结 …… 59
2.4 习题 …… 59

第 3 章 制造与再制造系统 …… 62

3.1 引言 …… 62
3.2 制造系统 …… 63
3.2.1 机器可靠的制造系统 …… 63
3.3 退货的库存模型 …… 66
3.4 横向转运模型 …… 69
3.5 混合再制造系统 …… 70
3.5.1 混合系统 …… 71
3.5.2 系统的生成矩阵 …… 71
3.5.3 直接方法 …… 73
3.5.4 计算的成本 …… 75
3.5.5 特殊情况分析 …… 75
3.6 总结 …… 76
3.7 习题 …… 76

第 4 章 客户分类的隐马尔可夫模型 …… 77

4.1 引言 …… 77

4.1.1 简单的例子 …… 77
4.2 参数估计 …… 78
4.3 方法的推广 …… 79
4.4 特殊情况的分析 …… 80
4.5 隐马尔可夫模型在客户分类中的应用 …… 81
4.6 总结 …… 83
4.7 习题 …… 84

第5章 客户终身价值的马尔可夫决策过程 …… 85

5.1 引言 …… 85
5.2 客户行为的马尔可夫链模型 …… 86
5.2.1 转移概率的估计 …… 87
5.2.2 保留概率与客户终身价值 …… 88
5.3 随机动态规划模型 …… 89
5.3.1 无穷视野无约束 …… 89
5.3.2 有限视野硬约束 …… 92
5.3.3 无穷视野有约束 …… 92
5.4 推广到多周期促销 …… 97
5.4.1 随机动态规划模型 …… 98
5.4.2 无穷视野无约束 …… 99
5.4.3 有限视野硬约束 …… 101
5.5 高阶马尔可夫决策过程 …… 104
5.5.1 平稳策略 …… 105
5.5.2 在客户终身价值计算中的应用 …… 107
5.6 总结 …… 111
5.7 习题 …… 111

第6章 高阶马尔可夫链 …… 112

6.1 引言 …… 112
6.2 高阶马尔可夫链 …… 113
6.2.1 新模型 …… 113
6.2.2 参数估计 …… 116
6.2.3 例子 …… 119

6.3 一些应用 …… 120
6.3.1 销售需求数据 …… 121
6.3.2 网页预测 …… 123
6.4 模型的扩展 …… 125
6.5 报童问题 …… 128
6.5.1 报童问题的马尔可夫链模型 …… 129
6.5.2 数值例子 …… 131
6.6 风险管理的高阶马尔可夫体制转换模型 …… 132
6.6.1 马尔可夫体制转换模型简介 …… 132
6.6.2 基于高阶马尔可夫体制转换模型的风险管理的框架 …… 134
6.6.3 风险价值预测 …… 137
6.7 总结 …… 138
6.8 习题 …… 139

第 7 章 多元马尔可夫链 …… 140

7.1 引言 …… 140
7.2 多元马尔可夫链模型的构造 …… 140
7.2.1 模型参数的估计 …… 143
7.2.2 例子 …… 144
7.3 在多种产品需求估计中的应用 …… 146
7.4 在信用评级模型中的应用 …… 148
7.4.1 信用转移矩阵 …… 149
7.5 扩展到高阶多元马尔可夫链 …… 150
7.6 改进的多元马尔可夫链及其在信用评级中的应用 …… 152
7.6.1 模型的收敛性质 …… 153
7.6.2 模型参数的估计 …… 155
7.6.3 实际实施、精度和计算效率 …… 157
7.7 总结 …… 158
7.8 习题 …… 158

第 8 章 隐马尔可夫链 …… 160

8.1 引言 …… 160
8.2 高阶隐马尔可夫模型 …… 160

8.2.1　问题 1 …… 161
8.2.2　问题 2 …… 163
8.2.3　问题 3 …… 164
8.2.4　期望最大化算法 …… 165
8.2.5　高阶隐马尔可夫模型的启发式方法 …… 167
8.3　双重高阶隐马尔可夫模型 …… 168
8.4　交互隐马尔可夫模型 …… 169
8.4.1　例子 …… 169
8.4.2　参数估计 …… 170
8.4.3　扩展到一般情况 …… 172
8.5　由交互隐马尔可夫模型调制的组合信用风险的二项展开模型 …… 173
8.5.1　例子 …… 175
8.5.2　由交互隐马尔可夫模型调制的二项展开模型的估计 …… 176
8.5.3　数值例子与比较 …… 178
8.6　总结 …… 184
8.7　习题 …… 184
参考文献 …… 185
索引 …… 197

第1章 绪　论

马尔可夫链以安德雷·安德耶维齐·马尔可夫(Andrei A. Markov,1856—1922)教授的姓氏命名.马尔可夫于1856年6月14日在俄罗斯梁赞(Ryazan)出生,于1922年7月20日在俄罗斯圣彼得堡(St. Petersburg)逝世.马尔可夫曾就读于圣彼得堡大学,在那里获得硕士和博士学位,他是圣彼得堡大学的教授,也是俄罗斯科学院成员,1905年马尔可夫教授退休,但仍继续在圣彼得堡大学任教直至逝世.马尔可夫因其对马尔可夫链的研究而被世人铭记,而针对具有大量应用的**随机过程**的研究也因他在马尔可夫链上的工作而展开.读者从下面这个有趣的网址①可以了解到有关马尔可夫及其工作的更多细节.

本章首先简要介绍有关离散和连续时间马尔可夫链的经典理论,然后说明有限状态马尔可夫链与矩阵理论之间的关系和求解线性系统的经典迭代方法,这些迭代方法可以用来求马尔可夫链的平稳分布;我们还会介绍有关标准隐马尔可夫模型(Hidden Markov Models,HMMs)以及马尔可夫决策过程(Markov Decision Processes,MDPs)的基础理论和算法.

1.1　马尔可夫链

本节简要介绍离散时间马尔可夫链,感兴趣的读者可参考Ross[181]和Häggström[111]编写的教材.

马尔可夫链模型是一个随机变量序列,它与某个系统的状态相对应,而此系统在某个时刻的 状态只依赖于它在前一时刻的状态,我们会讨论马尔可夫链的一些基本性质,还会介绍这个领域中的一些重要定理,对基本概念和符号的解释将贯穿本章.

让我们从一个实际的问题开始.假设某个城市中只有两家超市,比如惠康和百佳,市场调查显示惠康的顾客在下一次采购时会以概率$\alpha(>0)$转到百佳,同时百佳的顾客会以概率$\beta(>0)$转到惠康,决策者关心下面两个重要而有趣的问题:①现在属于惠康的顾客在其第n次采购时仍然会去惠康购物的概率是多少?②从长远来看,这两个超市的市场份额各是多少?此问题的一个重要性质是顾客的未来行为依赖于其现在的情况.在后面我们会看到可以用马尔可夫链模型描述这个营销问题.

---

① http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Markov.html

1.1.1 马尔可夫链的例子

考虑随机过程

$$\{X^{(n)}, n = 0,1,2,\cdots\}$$

它的取值为一个**有限**或**可数**的集合 M.

例 1.1 令 $X^{(n)}$ 是第 n 天的天气,其可取值的集合为

$$M = \{\text{晴},\text{刮风},\text{有雨},\text{阴}\}.$$

我们可以有下面的实现:

$$X^{(0)} = \text{晴},\quad X^{(1)} = \text{刮风},\quad X^{(2)} = \text{有雨},\quad X^{(3)} = \text{晴},\quad X^{(4)} = \text{阴},\quad \cdots.$$

例 1.2 令 $X^{(n)}$ 表示第 n 天产品的销量,其可取的值为

$$M = \{0,1,2,\cdots\}.$$

可以有下面的实现:

$$X^{(0)} = 4,\quad X^{(1)} = 5,\quad X^{(2)} = 2,\quad X^{(3)} = 0,\quad X^{(4)} = 5,\quad \cdots.$$

注 1.3 为简单起见,我们假设**状态空间**[①] M 为

$$\{0,1,2,\cdots\}.$$

M 中的元素称为随机过程的**状态**.

定义 1.4 假设存在一个独立于时间的固定的概率 P_{ij} 使得

$$P(X^{(n+1)} = i \mid X^{(n)} = j, X^{(n-1)} = i_{n-1}, \cdots, X^{(0)} = i_0) = P_{ij},\quad n \geqslant 0,$$

其中 $i,j,i_0,i_1,\cdots,i_{n-1} \in M$,则称此随机过程为马尔可夫链.

注 1.5 上面这个概率可以这样理解:给定过去的状态

$$X^{(0)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(n-1)}$$

和当前状态 $X^{(n)}$,未来状态 $X^{(n+1)}$ 的条件分布**独立于过去状态**而仅**依赖于当前状态**.

注 1.6 概率 P_{ij} 代表从给定的当前状态 j 转移到状态 i 的概率,显然

$$P_{ij} \geqslant 0,\quad \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} = 1,\quad j = 0,1,\cdots.$$

为简单起见,我们在本书中采用这种有别于传统的约定.

定义 1.7 由**转移概率** P_{ij} 组成的矩阵

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

称为此过程的一步**转移概率矩阵**.

---

① 状态空间是包含马尔可夫链的所有可能状态的集合.

例 1.8　我们再来考虑营销问题. 设 $X^{(n)}$ 为具有两个状态的过程(取值于集合{0,1}),用它来描述顾客的行为,如果顾客在第 n 日是去惠康购物,记 $X^{(n)}=0$;如果在第 n 日是去百佳购物,就 记 $X^{(n)}=1$. 由于未来状态(下一次去哪一个超市购物)仅依赖于当前状态,这是一个马尔可夫链,我们很容易得到其转移概率

$$P_{00}=1-\alpha,\quad P_{10}=\alpha,\quad P_{11}=1-\beta \quad \text{和} \quad P_{01}=\beta.$$

此过程的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta\end{pmatrix}.$$

例 1.9(随机游走)　多年以来,许多物理学家和数学家一直在研究随机游走,随着时间的推移,随机游走理论在许多研究领域都得到扩展和应用[181],因此我们在这里讨论随机游走的思想. 如图 1.1 所示,一个人在带有数值标记的实线上随机游走,则

$$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$$

为状态空间,每次处在状态 i 时会以概率 $p(0<p<1)$向前移动一步(+1)或以概率 $1-p$ 向后移动一步(−1),因此,当 $j=0,\pm1,\pm2,\cdots$时的转移概率为

$$P_{ij}=\begin{cases}p, & \text{如果 } i=j+1,\\ 1-p, & \text{如果 } i=j-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

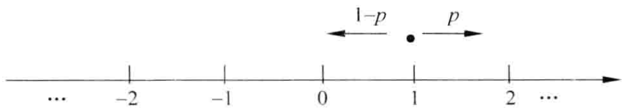

图 1.1　随机游走

例 1.10(赌徒的破产)　一个赌徒在赌博时每局或者以概率 $p(0<p<1)$赢得一块钱,或者以概率 $1-p$ 输掉一块钱,当输掉所有的钱或者赢得 N 块钱时赌博就结束,如图 1.2 所示. 令此赌徒的财产为赌博过程的状态,则赌博过程为马尔可夫链,对于 $j=1,2,\cdots,N-1$,其转移概率为

$$P_{ij}=\begin{cases}p, & \text{如果 } i=j+1,\\ 1-p, & \text{如果 } i=j-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且 $P_{00}=P_{NN}=1$.

我们这里称状态 0 和状态 N 为**吸收态**,过程到达 0 或 N 的任一状态后会永久停留在此状态.

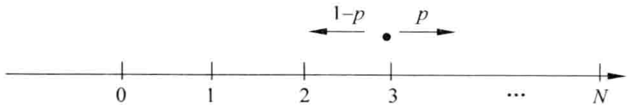

图 1.2 赌徒的破产

1.1.2 n 步转移矩阵

在前一节中定义了马尔可夫链的一步转移概率矩阵 P，本节我们探讨马尔可夫链的 n 步转移概率 $P_{ij}^{(n)}$.

定义 1.11 定义 $P_{ij}^{(n)}$ 为过程在状态 j 经过 n 步转移后到达状态 i 的概率，特别地，有 $P_{ij}^{(1)}=P_{ij}$.

命题 1.12 $P^{(n)}=P^n$，这里 $P^{(n)}$ 是 n 步转移概率矩阵，P 是一步转移矩阵.

证明 我们用数学归纳法来证明此命题. 显然，当 $n=1$ 时，命题成立. 假设对 n，命题成立，由于

$$P^n = \underbrace{PP\cdots P}_{n次}.$$

则(见图 1.3)

$$P_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in M} P_{ki}^{(n)} P_{jk}^{(1)} = \sum_{k\in M} P_{ki}^{n} P_{jk} = [P^{n+1}]_{ij}.$$

由数学归纳法原理，对所有非负整数 n 命题都成立.

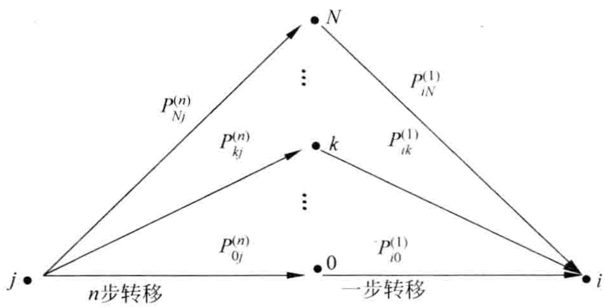

图 1.3 $n+1$ 步转移概率

注 1.13 容易看出

$$P^{(m)}P^{(n)} = P^mP^n = P^{m+n} = P^{(m+n)}.$$

例 1.14 我们再来考虑营销问题，在其模型中有

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

如果 $\alpha=0.3,\beta=0.4$,则

$$P^{(4)}=P^4=\begin{pmatrix}0.7 & 0.4\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0.5749 & 0.5668\\ 0.4351 & 0.4332\end{pmatrix}.$$

如果是惠康(百佳)的顾客,顾客状态就为 0(1),这里,$P_{00}^{(4)}=0.5749$ 表示惠康的顾客在第 4 次采购时会到惠康购物的概率,而 $P_{10}^{(4)}=0.4351$ 表示惠康的顾客在第 4 次采购时会到百佳购物的概率,$P_{01}^{(4)}=0.5668$ 表示百佳的顾客在第 4 次采购时会到惠康购物的概率,而 $P_{11}^{(4)}=0.4332$ 表示百佳的顾客在第 4 次采购时会到百佳购物的概率.

注 1.15 考虑具有状态$\{0,1,2,\cdots\}$的马尔可夫链.假设我们已知在时刻 $n=0$,过程处于状态 i 的概率为 $a_i(i=0,1,2,\cdots)$,一个有趣的问题是:n 步转移后,过程处于状态 j 的概率是多少?事实上,已知过程处于状态 i,在 n 步转移后将会到达状态 j 的概率为 $P_{ji}^{(n)}=[P^n]_{ji}$,这里 P_{ji} 是过程从状态 i 到状态 j 的一步转移概率,因此,所求的概率为

$$\sum_{i=0}^{\infty}P(X^{(0)}=i)P_{ji}^{(n)}=\sum_{i=0}^{\infty}a_i[P^n]_{ji}.$$

令

$$\mathbf{X}^{(n)}=(\widetilde{X}_0^{(n)},\widetilde{X}_1^{(n)},\cdots)$$

为马尔可夫链在第 n 步转移的状态的概率分布,这里$\widetilde{X}_i^{(n)}$ 是过程在n 步转移后处于状态i的概率,且

$$\sum_{i=0}^{\infty}\widetilde{X}_i^{(n)}=1.$$

很容易验证

$$\mathbf{X}^{(n+1)}=P\mathbf{X}^{(n)}$$

以及

$$\mathbf{X}^{(n+1)}=P^{(n+1)}\mathbf{X}^{(0)}=P^{n+1}\mathbf{X}^{(0)}.$$

例 1.16 参见前一个例子.如果当 $n=0$,某个顾客属于百佳,可以把此信息表示为

$$\mathbf{X}^{(0)}=(\widetilde{X}_0^{(0)},\widetilde{X}_1^{(0)})^{\mathrm{T}}=(0,1)^{\mathrm{T}}.$$

这位顾客在其第 4 次采购时会去哪个超市呢?

$$\mathbf{X}^{(4)}=P^{(4)}\mathbf{X}^{(0)}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.4\\ 0.3 & 0.6\end{pmatrix}^4(0,1)^{\mathrm{T}}=(0.5668,0.4332)^{\mathrm{T}}.$$

这意味着在第 4 次采购时,这位顾客会去百佳购物的概率是 0.4332,去惠康的概率则为 0.5668.

1.1.3 不可约马尔可夫链与状态的分类

下面给出有关马尔可夫链的状态的两个定义.

定义 1.17　在马尔可夫链中,状态 i 称为由状态 j **可达**,如果对于某个 $n \geqslant 0$ 有 $P_{ij}^{(n)} > 0$,这意味着从状态 j 开始,它有可能(以正的概率)经过有限步转移到状态 i.

定义 1.18　如果状态 i 和状态 j 互为可达,则称状态 i 和状态 j **相通**.

注 1.19　相通定义了一个等价的关系.

(1) 状态 i 与状态 i 在 0 步相通,因为

$$P_{ii}^{(0)} = P(X^{(0)} = i \mid X^{(0)} = i) = 1 > 0.$$

(2) 如果状态 i 与状态 j 相通,则状态 j 与状态 i 也相通.

(3) 如果状态 i 与状态 j 相通且状态 j 与状态 k 也相通,则状态 i 与状态 k 相通.因为对某个 m 和 n, $P_{ji}^{(m)} P_{kj}^{(n)} > 0$,故有

$$P_{ki}^{(m+n)} = \sum_{h \in M} P_{hi}^{(m)} P_{kh}^{(n)} \geqslant P_{ji}^{(m)} P_{kj}^{(n)} > 0.$$

所以,状态 k 由状态 i 可达,互换 i 和 k 的角色,可知状态 i 由状态 k 可达,故 i 与 k 相通,证毕.

定义 1.20　称两个相通的状态是在相同的类中.如果马尔可夫链所有的状态都属于同一类,即它们相互之间是相通的,则马尔可夫链称为**不可约的**.

例 1.21　考虑转移概率矩阵

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

此马尔可夫链是不可约的.

例 1.22　考虑另一个转移概率矩阵

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \end{pmatrix}.$$

我们注意到从状态 1,2,3,不可能访问状态 0,即

$$P_{01}^{(n)} = P_{02}^{(n)} = P_{03}^{(n)} = 0.$$

所以此马尔可夫链不是不可约的(或它是**可约的**).

定义 1.23　对马尔可夫链中的任一状态 i,令 f_i 表示过程从状态 i 开始,将来重新回到状态 i 的概率,如果 $f_i = 1$,则状态 i 称为**常返态**;如果 $f_i < 1$,则状态 i 称为**瞬时态**.

关于常返态我们有下面的命题.

命题 1.24　对于有限马尔可夫链,状态 i 是常返态当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty.$$

此命题意味着瞬时态仅会被访问有限次,因此,我们很容易看出有限状态的马尔可夫链的状态不能全都是瞬时态,利用命题 1.24 能够证明下面的命题.

命题 1.25 对于有限马尔可夫链,如果状态 i 是常返态(瞬时态)并且状态 i 与状态 j 相通,则状态 j 也是常返态(瞬时态).

1.1.4 对随机游走的分析

回顾**随机游走**的范例(在 Ross 的书[181]中有对随机游走的分析). 一个人在带有计数的实线上随机游走,在每个时间点,处于状态 i 的这个人分别以概率 $p(0<p<1)$ 或 $1-p$ 朝前移一步(+1)或向后移一步(−1),因为所有状态都相通,由命题 1.25,所有状态都是常返态或都是瞬时态.

考虑状态 0,为了给此状态分类我们分析下面的总和:

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_{00}^{(m)}.$$

我们知道

$$P_{00}^{(2n+1)} = 0.$$

因为要回到状态 0,朝前移动的次数应该与向后移动的次数相等,所以移动的次数应该是偶数,且

$$P_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

因此有

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} P_{00}^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n.$$

由前面的讨论知,如果 I 有限,则状态 0 是瞬时态,否则状态 0 为常返态. 我们利用斯特灵公式就可以得到结论. **斯特灵公式**称,如果 n 很大,则

$$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi}.$$

因此,可以近似地得到

$$P_{00}^{(2n)} \approx \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

考虑下面两种情况. 如果 $p=\frac{1}{2}$,有

$$P_{00}^{(2n)} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

如果 $p \neq \frac{1}{2}$,则