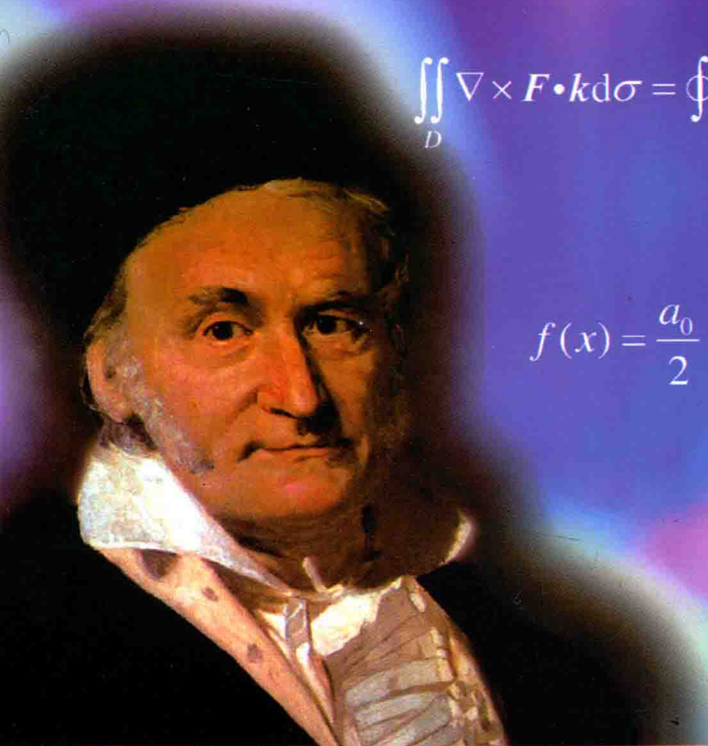

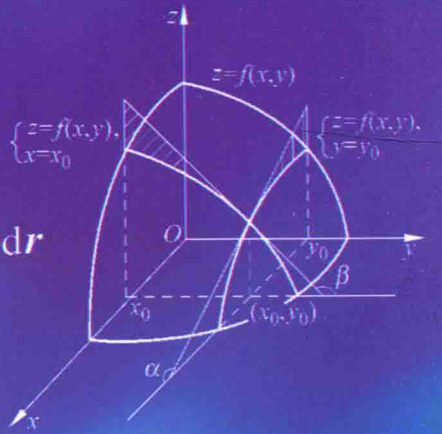

$$\iint_D \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k} \mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial D^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

高等数学

（下册）

张万雄　主编 / 王晓宏　胥斌　副主编

清华大学出版社

高等数学

（下册）

张万雄　主编 / 王晓宏　胥斌　副主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是为了适应新形势下高等院校通识教育类课程改革的需要，按照高层次工科专门人才的能力与素质要求及所必须具有的微积分知识编写而成．全书以提高学生的数学素质，培养学生自我更新知识及创造性地应用数学知识解决实际问题的能力为宗旨．

本书分上下两册．上册内容包括：预备知识，极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用；下册内容包括：常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分以及无穷级数等．书末附有常用函数及其性质、几种常用平面曲线及其方程和习题答案等．

本书可作为高等学校理工类各专业，尤其是工科电子信息类各专业本科生的高等数学教材或教学参考书，也可供学生自学使用．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/张万雄主编．--北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-39144-9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 011809 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：19.5　　**字　　数**：472 千字
版　　次：2015 年 2 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 2 月第1次印刷
定　　价：35.00 元

产品编号：062942-01

前　言

经过多年的教学改革实践，随着高等院校本科教学质量工程的推进及工科通识教育类课程的要求，重庆大学对高等数学的教学提出了更高的目标.为满足新形势下培养高素质工科专门人材所必须具有的微积分知识的实际需要，迫切需要编写新的微积分教材以适应工科大类分类教学的要求.本书是编者在多年教学的基础上，按照突出数学思想和数学方法、淡化运算技巧、强调应用实例的原则，在经典教材的理论框架下编写而成.同时，从对学生的“知识贡献、能力贡献、素质贡献”出发，精心设计和安排了教材的内容体系和框架，以突出“培养创新精神和应用能力为核心”的指导思想.从而为工科类，尤其是电子信息类各专业的学生奠定更加牢固的数学基础，以适应新形势下国家和社会的需要.

高等数学课程的教学与教材改革，一直是重庆大学各级领导与教师们的工作重点.为了更好地满足当前理工类各专业对微积分的实际需求及配合其专业课程教学，提高学生应用数学知识解决实际问题的能力，我们以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，以“必需、够用”为原则确定内容和深度，在知识点的覆盖面与“基本要求”相一致的基础上，力求将电子信息类各专业的相关应用实例融入到高等数学的教材中，培养学生应用数学知识解决专业实际问题的能力.

本书的特色主要体现在以下三个方面：

1. 内容编排新颖，对高等数学教材的内容进行了较大幅度的调整，适当精简了初等函数的内容，将基本初等函数的图像及性质放在附录中以方便读者查阅和供教学参考.同时，将定积分及定积分的应用合并在一章中讲述，将常微分方程放在下册的第一章，力求与电子信息类各专业的专业课程教学相衔接.

2. 鉴于工科电子信息类各专业对微积分的实际需求，选取了大量具有电子信息实际背景的例题和习题，将数学建模思想和数学在工程技术中的应用贯穿始终，以培养学生运用数学知识提出问题、分析问题和解决问题的能力.

3. 面对高等教育大众化的现实，同时兼顾学生的可接受性及与中学数学教学的衔接，适当降低了部分内容的深度和广度的要求，特别是淡化了各种运算技巧，但提高了数学思想和数学应用方面的要求.

本书由重庆大学数学与统计学院具有丰富教学经验的一线教师编写完成。上册由田玉芳副教授主编，预备知识、第 1、2 章及附录由田玉芳副教授编写，第 3 章由胥斌副教授编写，第 4、5 章由王克金讲师编写；下册由张万雄副教授主编，第 6 章、第 9、10 章由张万雄副教

授编写，第 7、8 章由王晓宏副教授编写，第 11 章由胥斌副教授编写. 田玉芳副教授和张万雄副教授负责全书的统稿及修改定稿，穆春来教授审定全书.

本书的出版得到了重庆大学教务处、重庆大学数学与统计学院和清华大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请广大同行、读者批评指正.

编　者

2014 年 4 月

目　录

第6章

常微分方程

常微分方程是随着微积分的产生以及生产实践的需要而出现的，有着深刻而生动的实际背景，已成为现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具. 在许多实际问题中，往往不能直接找出所需要的函数关系，而只能根据问题的具体情况建立需要找到的未知函数及其导数（或微分）所满足的方程，通过求解或分析方程的特征，得到所需要的函数或其性质，这就是本章我们将要讨论的常微分方程.

6.1 常微分方程的基本概念

下面通过几个具体实例来说明常微分方程的基本概念.

例 6.1 已知一条曲线通过点(0,1)，且曲线上任意点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $2x$，求此曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，由题意和导数的几何意义，知 $y=y(x)$ 应满足方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x, \tag{6.1}$$

此外，由曲线过点(0,1)，可知未知函数 $y=y(x)$ 还应满足条件 $y(0)=1$.

将(6.1)式改写为

$$\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x,$$

上式两端积分，得

$$y=\int 2x\mathrm{d}x,$$

即

$$y=x^2+c, \tag{6.2}$$

其中 c 为任意常数.

将条件 $y(0)=1$ 代入 $y=x^2+c$，得 $1=0^2+c$，即 $c=1$. 再把 $c=1$ 代入(6.2)式，即得所求曲线的方程为 $y=x^2+1$.

例 6.2 设质量为 m 的物体，在时间 $t=0$ 时自由下落，忽略空气阻力，求物体下落距离与时间的关系.

解 建立坐标系，如图 6-1 所示，设在时刻 t 时下落的距离为 $x=x(t)$，于是物体下落的速度和加速度分别为 $v=\frac{dx}{dt}$和 $a=\frac{d^2x}{dt^2}$，根据牛顿第二定律 $F=ma$，可得物体应满足方程

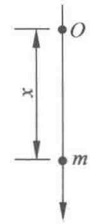

图 6-1

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg,$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g. \tag{6.3}$$

此外，由题意，可知未知函数 $x=x(t)$还应满足条件

$$x(0)=0,\quad v(0)=x'(0)=0.$$

将(6.3)式两端积分一次，得

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\int g\,dt=gt+c_1, \tag{6.4}$$

再积分一次，得

$$x(t)=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2, \tag{6.5}$$

其中 c_1 与 c_2 为两个任意常数. 把条件 $v(0)=0$，$x(0)=0$ 分别代入(6.4)式和(6.5)式，可解得 $c_1=0, c_2=0$. 因此自由下落物体的距离公式为 $x=\frac{1}{2}gt^2$.

例 6.3 如图 6-2 所示的 RLC 电路，它是由电容 C，电感 L 和电阻 R 串联组成的闭合回路. 设在某时刻将电容器充电，使之得到一个电位差以后，便将电源切断，这时由于有电感存在，回路中会产生振荡电流，试建立电容器两端的电位差所满足的微分方程.

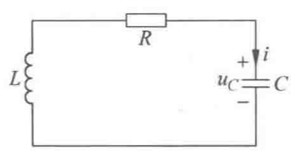

图 6-2

解 设 $u=u_C(t)$表示在时刻 t 时电容器两极间的电位差，$i=i(t)$表示电流强度. 根据基尔霍夫第二定律，沿任一闭合回路的电位差的代数和等于 0，故有

$$L\frac{di}{dt}+iR+u_C=0. \tag{6.6}$$

又因为

$$i=\frac{dQ}{dt},\quad u_C=\frac{Q}{C},$$

其中 $Q=Q(t)$表示在时刻 t 时电容器上的电荷，故可得

$$i=C\frac{du_C}{dt},\quad \frac{di}{dt}=C\frac{d^2u_C}{dt^2},$$

代入(6.6)式，得

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0. \tag{6.7}$$

这就是所讨论回路中 $u=u_C(t)$所满足的方程.

方程(6.1),方程(6.3)及方程(6.7)的一个共同特点是都含有未知函数的导数,**称含有未知函数的导数或微分的方程为微分方程**.因此方程(6.1),方程(6.3)与方程(6.7)都是微分方程.

如果未知函数是一元函数,称为常微分方程;如果未知函数是多元函数,则称为偏微分方程.本章只讨论常微分方程,并将其简称为微分方程.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶**.例如,方程(6.1)是一阶微分方程,方程(6.3)和方程(6.7)是二阶微分方程,又如 $y'''+2y'-3y=e^x$ 是三阶微分方程.

一般地,n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{6.8}$$

称为 n 阶隐式微分方程,其中 F 是关于 $n+2$ 个变元的已知函数,如果能从方程(6.8)解出 $y^{(n)}$,即

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{6.9}$$

则上式称为 n 阶显式微分方程.

如果将某个函数 $y=y(x)$,$x\in I$ 代入微分方程(6.8)或方程(6.9)能使其成为恒等式,则称该函数为微分方程(6.8)或方程(6.9)在区间 I 上的解.

容易验证函数 $y=x^2$,$y=x^2+1$,$y=x^2+c$(其中 c 是任意常数)都是一阶微分方程 $y'=2x$ 在$(-\infty,+\infty)$上的解.

函数 $y=\cos x$,$y=\dfrac{1}{2}\sin x$,$y=c_1\cos x+c_2\sin x$(其中 c_1,c_2 是任意常数)都是二阶微分方程 $y''+y=0$ 在$(-\infty,+\infty)$上的解.

如果 n 阶微分方程的解中含有独立的任意常数的个数与方程的阶数相同(n 个独立的任意常数是指它们不能合并而使得任意常数的个数减少),则称这样的解 $y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$为 n 阶微分方程的**通解**.例如,$y=ce^x$ 为一阶微分方程 $y'=y$ 的通解,$y^2=x^2+cx$ 是 $2xyy'=x^2+y^2$ 的通解.

由于通解中含有独立的任意常数,所以它还不能准确刻画客观事物的某个具体的变化过程.要得到确定的变化过程,必须确定出这些常数的值.因此,称不含有任意常数的解为微分方程的**特解**.如例 6.1 中 $y=x^2+1$ 是一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2x$ 的特解,例 6.2 中 $x=\dfrac{1}{2}gt^2$ 是二阶微分方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=g$ 的特解.

用于确定通解中任意常数的条件称为定解条件.常用的定解条件是**初始条件**,即描述或记录事物运动变化的初始状态的条件.n 阶微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的初始条件为

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y_1,\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1}.$$

求解带有初始条件的微分方程称为**初值问题**.n 阶微分方程的初值问题记为

$$\begin{cases}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,\\ y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y_1,\cdots,y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1},\end{cases}$$

其中 $x_0,y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}$ 为常数.由微分方程解的定义可知,其特解与通解在几何上是平面上的曲线或曲线簇,称为微分方程的**积分曲线**.如二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases}F(x,y,y',y'')=0,\\ y|_{x=x_0}=y_0,y'|_{x=x_0}=y_1\end{cases}$$

的几何意义是求微分方程的通过点(x_0, y_0)且在该点处的切线斜率为y_1的那条积分曲线.

例 6.4 已知 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的通解，求满足 $y|_{x=\frac{\pi}{4}}=1$，$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=-1$ 的特解.

解 因为方程的通解为 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$，两边同时求导得 $y'=c_1\cos x-c_2\sin x$. 将初始条件代入，得到方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}c_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}c_2=1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}c_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}c_2=-1,\end{cases}$$

解得

$$c_1=0,\quad c_2=\sqrt{2},$$

故所求特解为

$$y=\sqrt{2}\cos x.$$

例 6.5 求从原函数 $y=cx+c^2$ 消去 c 后满足的微分方程.

解 将函数 $y=cx+c^2$ 对 x 导数，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=c,$$

将上式代入原方程消去 c，得

$$y=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2.$$

这就是所求的微分方程，它是一个一阶微分方程.

习题 6-1

1. 指出下列微分方程的阶：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x+\sin x$； (2) $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=4$；

(3) $y^3=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+1$； (4) $\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}-2\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$.

2. 验证下面给出的函数是否为相应微分方程的解.

(1) $y''=x^2+y^2$，$y=\dfrac{1}{x}$；

(2) $y'=p(x)y$，其中 $p(x)$ 为连续函数，$y=ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，$c$ 为任意常数；

(3) $y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$.

3. 验证当 $c>0$ 时，$y=\dfrac{c}{2}x^2-\dfrac{1}{2c}$ 为方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的解；而当 $c<0$ 时，该函数为上述方程在 $(-\infty,0)$ 上的解.

4. 求从原函数 $y=Ax^2+Bx+C$ 消去 A,B,C 后所满足的微分方程.

5. 求从原函数 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ 消去 c_1,c_2 后所满足的微分方程.

6. 已知某微分方程的通解和初始条件分别为 $y=c_1\sin(x-c_2)$，$y|_{x=\pi}=1$，$y'|_{x=\pi}=0$. 求满足初始条件的解.

7. 若曲线的切线在 x 轴与 y 轴上的截距之和恒为 2,求该曲线所满足的微分方程.

8. 由电感 L,电阻 R 组成的电路如图 6-3 所示,当开关 K 合上时,因与电源 E 接通而有电流通过,设 $t=0$ 时,$i=0$,求电流 $i=i(t)$所满足的微分方程.

9. 设电路如图 6-4 所示,开始时($t=0$)电容器有电压 u_0,求开关 K 合上后,电容器两端电压 $u_C(t)$所满足的微分方程.

10. 设电路如图 6-5 所示,设开始时($t=0$)电容 C 上电荷 $Q=0$,当开关 K 合上时($t=0$),电容器被充电,求在任一时刻电容器的电板上积累的电荷 $Q=Q(t)$所满足的微分方程.

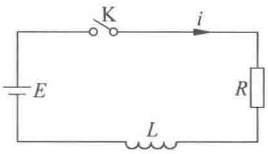

图 6-3

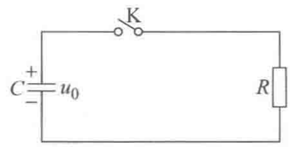

图 6-4

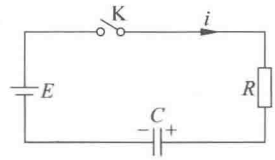

图 6-5

6.2 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程无论在理论上还是在实际应用中都很重要,同时也是进一步学习非线性微分方程的基础. 因此,我们首先讨论一阶线性微分方程的求解.

形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{6.10}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**.

如果 $Q(x)\equiv 0$,即

$$y' + P(x)y = 0, \tag{6.11}$$

则称方程(6.11)为**一阶齐次线性微分方程**; 否则,则称方程(6.10)为**一阶非齐次线性微分方程**.

6.2.1 一阶齐次线性微分方程

当 $y\neq 0$ 时,将一阶齐次线性微分方程(6.11)变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x,$$

两端积分,得

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + c_1.$$

令 $C=\pm \mathrm{e}^{c_1}$,即有 $y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}(C\neq 0)$.

易知 $y=0$ 也是一阶齐次线性微分方程(6.11)的解, 在上式中取 $C=0$ 即可得到该解. 故一阶齐次线性微分方程(6.11)的通解为

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \tag{6.12}$$

其中 C 为任意常数.

6.2.2 一阶非齐次线性微分方程

因为(6.12)式是一阶齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=0$ 的通解,而非齐次线性微分方

程(6.10)与齐次线性微分方程(6.11)左端完全一样,右端则多了一项 $Q(x)$,故猜想方程(6.10)的解也与 $e^{-\int P(x)dx}$ 有关,若设非齐次线性微分方程(6.10)的解为 $y=y(x)$,则 $u=\frac{y(x)}{e^{-\int P(x)dx}}$ 必是 x 的函数,因为若 $u\equiv C$,则可得 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$,它是一阶齐次线性微分方程的通解.故非齐次线性微分方程(6.10)的解的可能形式为 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$. 即将(6.12)式中常数 C 变易成函数 $u(x)$,再代入非齐次线性微分方程(6.10)中解出 $u(x)$,从而得到非齐次线性微分方程的通解,这种方法称为**常数变易法**.即令方程(6.10)的解为

$$y=u(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{6.13}$$

两端求导,得

$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{6.14}$$

将(6.13)式和(6.14)式代入方程(6.10),得

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx}-u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x),$$

即

$$u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

两端积分,得

$$u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c. \tag{6.15}$$

将(6.15)式代入(6.13)式得非齐次线性微分方程(6.10)的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right). \tag{6.16}$$

若把(6.16)式改写为两项之和,得

$$y=ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

上式右端第一项是对应的齐次线性微分方程的通解,第二项是非齐次线性微分方程的一个特解.故**一阶非齐次线性微分方程的通解等于对应的齐次线性微分方程的通解与非齐次线性微分方程的一个特解之和.**

注 如果非齐次线性微分方程的形式是 $\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$,则其通解就是把(6.16)式中的 x 与 y 互换.即

$$x=e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+c\right). \tag{6.17}$$

例 6.6 求方程 $\frac{dy}{dx}-2xy=e^{x^2}\cos x$ 的通解.

解 对应的齐次微分方程为 $\frac{dy}{dx}-2xy=0$,即

$$\frac{dy}{y}=2xdx.$$

将上式两端积分,得 $\ln|y|=x^2+c_1$,令 $C=\pm e^{c_1}$,即得对应的齐次微分方程的通解为 $y=Ce^{x^2}$,将常数 C 变易为待定函数 $u(x)$,即设 $y^*=u(x)e^{x^2}$ 为原方程的解,则

$$(y^*)'=u'(x)e^{x^2}+2xu(x)e^{x^2},$$

代入原方程，得

$$u'(x)e^{x^2}=e^{x^2}\cos x,$$

即

$$u'(x)=\cos x.$$

两端积分，得

$$u(x)=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+c,$$

将上式代入 y^*，得原方程的通解为

$$y=e^{x^2}(\sin x+c),$$

其中 c 为任意常数.

例 6.7 求 $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解.

解 因为 $P(x)=-\dfrac{2}{x+1}$，$Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$. 由通解公式(6.16)，得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)\\&=e^{\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\left(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)\\&=(x+1)^2\left(\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x+c\right)\\&=(x+1)^2\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c\right).\end{aligned}$$

例 6.8 求微分方程 $(y^3+xy)y'=1$ 满足 $y|_{x=0}=0$ 的特解.

解 因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{y^3+xy}$，从而 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-yx=y^3$. 于是 $P(y)=-y$，$Q(y)=y^3$，由通解公式(6.17)得

$$\begin{aligned}x&=e^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c\right)=e^{\int y\mathrm{d}y}\left(\int y^3e^{\int -y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c\right)\\&=e^{\frac{y^2}{2}}\left(\int y^3e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y+c\right)=e^{\frac{y^2}{2}}\left(-y^2e^{-\frac{y^2}{2}}+2\int ye^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y+c\right)\\&=e^{\frac{y^2}{2}}(-y^2e^{-\frac{y^2}{2}}-2e^{-\frac{y^2}{2}}+c)=-y^2-2+ce^{\frac{y^2}{2}}.\end{aligned}$$

又 $y(0)=0$，所以有 $-2+c=0$，解得 $c=2$. 故

$$x=2e^{\frac{y^2}{2}}-y^2-2.$$

6.2.3 伯努利(Bernoulli)方程

形如

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n,\quad n\neq 0,1 \tag{6.18}$$

的方程称为**伯努利方程**. 伯努利方程是在一阶非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的右端添加了一个乘积因子 $y^n(n\neq 0,1)$，因此，它不是线性微分方程，但可通过变量代换化为一阶非齐次线性微分方程进行求解.

将方程(6.18)的两端同时除以 y^n，得

$$y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x), \tag{6.19}$$

令 $z=y^{1-n}$，则有$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}y'$，即 $y^{-n}y'=\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，代入方程(6.19)，得

$$\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+P(x)z=Q(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x). \tag{6.20}$$

方程(6.20)是一个关于 $z=z(x)$的一阶非齐次线性微分方程，求出通解后，再将 $z=y^{1-n}$代入通解中便得到伯努利方程(6.18)的通解. 此外若 $n>0$，易知方程还有特解 $y=0$.

例 6.9 求微分方程 $y'=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}$的通解.

解 将原方程两端同乘以 $2y$，得

$$2yy'-\frac{1}{x}y^2=x^2, \tag{6.21}$$

令 $y^2=z$，则 $2yy'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，将它们代入(6.21)式，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=x^2. \tag{6.22}$$

记

$$P(x)=-\frac{1}{x},\quad Q(x)=x^2,$$

根据一阶非齐次线性微分方程的通解公式(6.16)，得方程(6.22)的通解为

$$z=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)$$

$$=x\left(\int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+c\right)=x\left(\frac{x^2}{2}+c\right)=cx+\frac{x^3}{2},$$

故原方程的通解为

$$y^2=cx+\frac{x^3}{2}.$$

例 6.10 求微分方程$(y^4-3x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=0$ 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解 原方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y^4-3x^2}{xy}=-\frac{y^3}{x}+\frac{3x}{y},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}x=-\frac{y^3}{x},$$

将上式两端同时乘以 x，得

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}x^2=-y^3. \tag{6.23}$$

令 $x^2=z$，则 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$，即 $x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$. 于是方程(6.23)变为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}z=-y^3,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\frac{6z}{y}=-2y^3. \tag{6.24}$$

记

$$P(y)=-\frac{6}{y},\quad Q(y)=-2y^3,$$

根据一阶非齐次线性微分方程的通解公式可得(6.24)的通解为

$$\begin{aligned}z&=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c\right)=\mathrm{e}^{\int\frac{6}{y}\mathrm{d}y}\left(\int-2y^3\mathrm{e}^{-\int\frac{6}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+c\right)\\&=y^6\left(\int-2y^3\cdot\frac{1}{y^6}\mathrm{d}y+c\right)=y^6\left(\int-2y^{-3}\mathrm{d}y+c\right)\\&=y^6(y^{-2}+c)=y^4+cy^6,\end{aligned}$$

故原方程的通解为

$$x^2=y^4+cy^6.$$

除伯努利方程外,还有一些方程虽然不是线性微分方程,但可以通过变量代换化为线性方程来求解,下面举例说明.

例 6.11 求方程 $\sin y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-x\cos y)\cos y$ 的通解.

解 将原方程两端同乘以$\dfrac{1}{\cos^2 y}$,得

$$\frac{\sin y}{\cos^2 y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{\cos y}=-x.$$

令 $v=\dfrac{1}{\cos y}$,则$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin y}{\cos^2 y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,于是方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-v=-x.$$

这是一阶非齐次线性微分方程,由通解公式,得

$$v=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int-x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^x\left(\int-x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^x(x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}+c)=x+1+c\mathrm{e}^x,$$

故原方程的通解为

$$\frac{1}{\cos y}=c\mathrm{e}^x+x+1.$$

例 6.12 求方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=4\mathrm{e}^{-y}\sin x$ 的通解.

解 将原方程变形为

$$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^y=4\sin x,$$

令 $v=\mathrm{e}^y$,则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=4\sin x.$$

这是一阶非齐次线性微分方程，由通解公式(6.16)，得

$$v=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left(\int 4\sin x\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int 4\sin x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+c\right)=\mathrm{e}^{-x}(2\mathrm{e}^{x}(\sin x-\cos x)+c),$$

故原方程的通解为

$$\mathrm{e}^{y}=\mathrm{e}^{-x}(2\mathrm{e}^{x}(\sin x-\cos x)+c).$$

习题 6-2

1. 解下列微分方程：

(1) $xy'-y=\dfrac{x}{\ln x}$；　　(2) $y'+y\tan x=\sec x$；

(3) $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-6i=10\sin 2t$；　　(4) $xy'+y-\mathrm{e}^{x}=0, y(1)=\mathrm{e}$.

2. 已知 $\int_0^1 f(ux)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}f(x)+1$，求 $f(x)$.

3. 求曲线，使其切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标.

4. 解下列微分方程：

(1) $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ny+\mathrm{e}^{x}(x+1)^{n+1}$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+\sin x}$；

(3) $y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$；

(4) $xy'+(1-x)y=\mathrm{e}^{2x}(0<x<\infty), \lim\limits_{x\to 0^{+}}y(x)=1$.

5. 解下列伯努利方程：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=xy^{5}$；　　(2) $y'+2xy+xy^{4}=0$；

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^{2}(\cos x-\sin x)$；　　(4) $x\mathrm{d}y-\{y+xy^{3}(1+\ln x)\}\mathrm{d}x=0$.

6. 通过变量代换将下列方程化为线性微分方程并求解.

(1) $(2x+1)y'-4\mathrm{e}^{-y}+2=0$；

(2) $2yy'+2xy^{2}=x\mathrm{e}^{-x^{2}}, y(0)=1$.

7. 连接两点 $A(0,1)$，$B(1,0)$ 的一条凸曲线，它位于 AB 弦的上方，$P(x,y)$ 为曲线上任意一点，已知曲线与 AP 之间的面积为 x^{3}，求此曲线的方程.

8. 如图 6-6 所示的 RL 电路，试求：

(1) 当开关 S_1 合上 10s 后，电感 L 上的电流；

(2) S_1 合上 10s 后再将 S_2 合上，求 S_2 合上 20s 后，电感 L 上的电流.

9. 如图 6-7 所示的 RL 电路，试求电感 $I(t)$ 的变化规律，并解释其物理意义，设 $t=0$ 时，$I=0$.