高等师范教学资料

# 解析几何学习指导

湖南师范大学数学系
郴州地区教师进修学院数学科 编

郴州地区教师进修学院

高等师范教学资料

# 解析几何学习指导

湖南师范大学数学系
郴州地区教师进修学院数学科 编

郴州地区教师进修学院

# 编者的话

江苏师院数学系编的《解析几何》，是目前高等师范院校普通班及函授班广为采用的教材。该书内容充实，题型新颖，部分题目的技巧度较高。为了帮助学生学好这门课程，特别是为了满足函授自学的需要，我们两所院校合编了《解析几何学习指导》。

本书按教材体系分章节编写，重在解题：对教材所列396道习题，逐一解答；对技巧性强的题目，作了一题多解；对难度较大的题目，给以必要的分析。此外，每节题解之前，对该节内容及解题要领，予以撮要介绍；每章题解之后，设计了"自我测验题"，以检验自学，弥缺补漏；全书末尾，编有"自我综合测验题"，以举一反三，广拓思路。

本书的题解，主要由何国梁、龚少茵老师编撰；参加本书编写工作的还有陈圣济、王仁由、曹庆刚老师。长沙水电师院黄贵卿副教授审阅了全稿。湖南师大数学系和郴州地区教师进修学院的领导对本书的编印给予多种支持和鼓励；进修学院数学科的一些同志对本书的校对也作了大量的工作。在此，我们一并表示诚挚的谢意。

由于我们水平有限，时间仓促，本书难免有些纰漏，恳请读者批评指正。

编　者　　1985年10月

# 目 录

# 谈谈学习解析几何的一般程序

解析几何学是应用代数方法研究几何图形的一门数学学科。坐标系是实现数形结合的桥梁；矢量是把代数运算引用到几何中来的重要工具。

解析几何学不仅为研究几何找到了一种很好的方法．而且，它本身是高等数学的许多重要分支（如分析学、空间论、高等几何学以及拓扑学，等等）的重要基础。同时，学习解析几何是培养逻辑思维能力和空间想像能力的重要途径。

下面，谈谈学习解析几何的一般程序，予函授学员及自学本课程的同志以参考。

**一、注重预习，提出问题**。解析几何内容多，讲课进度快。尤其函授学员集中面授的时间短，要使听课能收到较好的效果，一定要先预习：了解教材的基本体系和内容，找出疑难问题，作出标记，留待听课解决。

**二、带题听课，提高效率**．听课应力求达到：弄清教材内容的来龙去脉；解决教材中的疑难问题；明确知识的主要应用。记听课笔记也应围绕这三个方面，而不是完全照抄老师的板书。

**三、深入钻研，理解消化**。课堂上不可能彻底解决问题，因此，课后还要仔细钻研教材，并结合教材整理好课堂笔记，务必做到理解消化。要注意抓主干，理脉络。如对空间解析几何，要抓住矢量方法这条主干；并明确空间解析

几何是平面解析几何的拓广与发展。

**四、重视练习，培养能力。**作练习一定要认真，要按规矩写在本子上，不能随便画画了事。对难题要仔细分析、推敲，不要过早地翻阅本书的习题解答。每完成一份习题，要注意总结解题规律，提高解题能力。

**五、反复温习，巩固记忆。**看了书，做了作业，不能认为学习就结束了。还应注意反复温习，巩固记忆。可以先看笔记，再自我复述，重点内容甚至要默写。如直线、平面方程的各种形式，二次曲线、二次曲面的有关公式等，一定要能准确地默写出来。

**六、自我评估，查缺补漏。**学习的效果怎样？应经常自我评估。自我测验是一种较好的方式。本书的每章末尾编有“自我测验题”；书末编有“自我综合测验题”，就是提供自我评估用的。应在规定时间内完成，并对照参考答案自我评分，然后及时进行查缺补漏。

只要我们能认真学习，又善于学习，就一定能学好解析几何这门课程。

# 第一章 矢量与坐标

## §1.1 矢 量

1°**矢量** 我们称既有大小又有方向的量叫**矢量**，记作 $\vec{a}$。以A为始点、B为终点的矢量记作 $\overrightarrow{AB}$。**矢量的长度**(或模)是指矢量的大小，记作 $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$。模等于零的矢量叫**零矢量**，用 $\vec{o}$ 表示（其方向为任意方向）。模等于1的矢量叫**单位矢量**，与矢量 $\vec{a}$ 具有相同的方向的单位矢量记作 $\vec{a}^{\circ}$。

2°**相等矢量**和**反矢量** 模与方向都相同的矢量叫**相等矢量**。在这个意义下，矢量的始点可以放在空间的任一点，因此，又称它为**自由矢量**。而确定了始点的矢量叫**定矢量**。

两个模相等、方向相反的矢量叫互为**反矢量**。

3°**共线矢量**和**共面矢量** 平行于同一直线的一组矢量叫**共线矢量**。三个或三个以上平行于同一平面的一组矢量叫**共面矢量**。

显然，零矢量与任何共线的矢量组共线，也与任何共面的矢量组共面。而且，一组共线矢量一定是共面矢量；三矢量中如果有两矢量是共线的，这三矢量一定是共面的。

**1. 下列情形中矢量的终点各构成什么图形？**

**1）把空间中一切单位矢量归结到共同的始点；**

**2）把平行于某一平面的一切单位矢量归结到共同的始**

点；

3）把平行于某一直线的一切矢量归结到共同的始点；

4）把平行于某一直线的一切单位矢量归结到共同的始点。

**解** 1）构成空间中以共同始点为球心，以1为半径的球面。

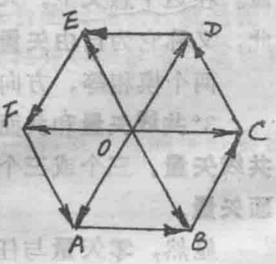
2）构成平行于已知平面的平面上的以共同始点为圆心的单位圆周。

3）构成的图形为与已知直线平行的直线。

4）构成直线上到共同的始点的距离为1的两个点。

**2.** 设点O是正六边形ABCDEF的中心，在矢量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$和$\overrightarrow{FA}$中，哪些矢量是相等的？

**解** $\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{CD}$和$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{DE}$和$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{EF}$和$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{FA}$和$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{OC}$分别为相等的矢量。



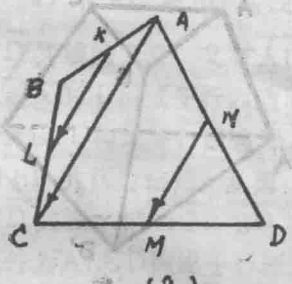

（第2题）

**3.** 设在平面上给了一个四边形ABCD，点K、L、M、N分别是边AB、BC、CD、DA的中点，求证：$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$。当ABCD是空间四边形时，这等式是否也成立？

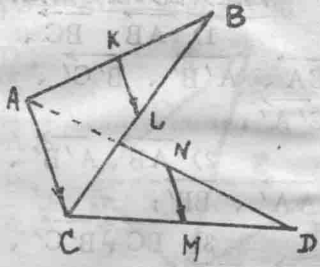
**证** $\because \overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$。

当ABCD为空间四边形时，上述证明及结论仍然成立。



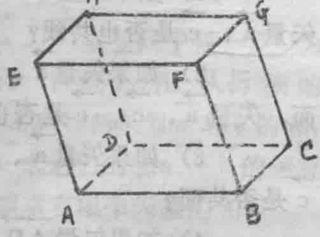
(a)



(b)

（第3题）

**4.** 设ABCD－EFGH是一个平行六面体，在下列各对矢量中，找出相等矢量和互为反矢量的矢量：1) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$；2) $\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{CG}$；3) $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{EG}$；4) $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{GF}$；5) $\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CH}$。



（第4题）

**解** 相等的有 2)、3)、5)；

互为反矢量的有1)、4)．

**5.** 设△ABC和△A′B′C′分别是三棱台ABC－A′B′C′的上、下底面，试在矢量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$中找出共线矢量和共面矢量。

**解** 三组共线矢量分为是：$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A'B'}$；$\overrightarrow{BC}$和

$\overrightarrow{B'C'}$；$\overrightarrow{CA}$ 和 $\overrightarrow{C'A'}$。

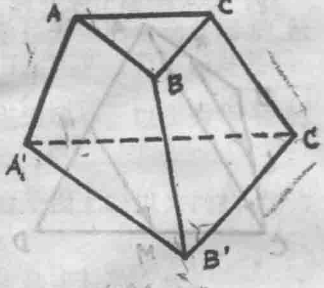
四组共面矢量分别是：

1) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{C'A'}$；

2) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{A'B'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$；

3) $\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{B'C'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$；

4) $\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{C'A'}$、$\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{CC'}$。




（第5题）

6. 回答下列问题：

1) 如果矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线，矢量 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 也共线，矢矢量 $\vec{a}$、$\vec{c}$ 是否也共线？

2) 如果矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面，矢量 $\vec{c}$、$\vec{d}$、$\vec{e}$ 也共面，矢量 $\vec{a}$、$\vec{c}$、$\vec{e}$ 是否也共面？

3) 如果矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 中 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线，矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 是否共面？

4) 如果矢量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 共线，在什么条件下 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$ 也共线？

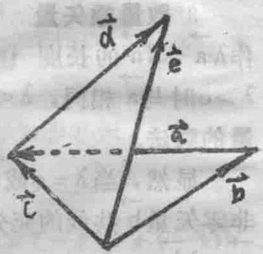
**解** 1) 因为此时 $\vec{a}$、$\vec{c}$ 平行于同一直线 b，故它们是共线矢量。（由此可见，"矢量共线"有传递性）。

2) 此时 $\vec{a}$、$\vec{c}$、$\vec{e}$ 不一定共面。反例如图。

3) 因为 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 共线时，可以只考虑其中的一个矢量，而空间任意两个矢量是共面的，故此时 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 是共

面。

4）若$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}$共线，则$\overrightarrow{AC} /\!/ \overrightarrow{BD}$，而由$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$共线的条件，又有$\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{CD}$，从而ABCD构成平行四边形；反之，若ABCD构成平行四边形，则有$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{BD}$共线的结论，从而，若$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$共线，则$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$共线的充要条件为ABCD构成平行四边形。




（第6（2）题）

## §1.2—1.3 矢量的线性运算

1°**矢量的加法** 设已知矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$，以空间中任一点O为始点接连作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$得一折线OAB，从折线的端点O到另一端点B的矢量$\overrightarrow{OB}=\vec{c}$叫做两矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，记作$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$。由两矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$求它们的和$\vec{a}+\vec{b}$的运算叫**矢量加法**。这个法则可以推广到求有限个矢量的和。

矢量的加法的运算则是：

1）$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$；$\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$；

2）交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

3）结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$．

2°**矢量的减法** 当矢量$\vec{b}$与矢量$\vec{c}$的和等于矢量$\vec{a}$，即$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$时，矢量$\vec{c}$叫矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$之差，记作$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$。由两矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$求它们的差$\vec{a}-\vec{b}$的运算叫**矢量减法**。

与数的加减法类似，矢量的加法和减法满足等式：

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-(-\vec{b})$；$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$。

3°**数量乘矢量**　实数$\lambda$与矢量$\vec{a}$的乘积是一个矢量，记作$\lambda\vec{a}$，$\lambda\vec{a}$的长度$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$，其方向规定为$\lambda>o$时与$\vec{a}$相同，$\lambda<o$时与$\vec{a}$相反。这种运算叫做**数量与矢量的乘法**。

显然，当$\lambda=o$或$\vec{a}=\vec{o}$时，$\lambda\vec{a}=\vec{o}$。同时，矢量$\vec{a}$与非零矢量$\vec{b}$共线的充分必要条件是存在唯一的实数$\lambda$，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$。

数乘矢量的运算法则是：

1) $1\vec{a}=\vec{a}$；　　　　$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$；

2) 结合律：$\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}$；

3) 第一分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

4) 第二分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$。

这里$\vec{a}$、$\vec{b}$是矢量，$\lambda$、$\mu$为任意实数。

**1.要使下列各式成立，矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$应满足什么条件？**

1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；

2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

3) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$；

4) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$；

5) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$；

6) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$。

**答：** 1) 矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角应为$\frac{\pi}{2}$。

2) 矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$(共线且)方向一致。

3）矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$(共线且)方向相反，同时$|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$.

4）矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$（共线且）方向相反.

5）矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$（共线且）方向相同，同时$|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|$.

6）矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角小于$\frac{\pi}{2}$，且都为非零矢.

**2.** 证明$-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$.

**证** $-(\vec{a}+\vec{b})=(-1)(\vec{a}+\vec{b})=(-1)\vec{a}+(-1)\vec{b}=-\vec{a}-\vec{b}$.

**3.** 试解下列各题：

1）化简 $(x-y)(\vec{a}+\vec{b})-(x-y)(\vec{a}-\vec{b})$；

2）已知$\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3$，$\vec{b}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2+2\vec{e}_3$，求$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$和$3\vec{a}-2\vec{b}$.

3）从矢量方程组$\begin{cases}3\vec{x}+4\vec{y}=\vec{a} & ①\\ 2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{b} & ②\end{cases}$

解出矢量$\vec{x}$、$\vec{y}$.

**解** 1）原式$=(x-y)[(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})]$

$=(x-y)(\vec{a}+\vec{b}-\vec{a}+\vec{b})$

$=2(x-y)\vec{b}$；

2）$\vec{a}+\vec{b}=4\vec{e}_1+\vec{e}_3$，

$\vec{a}-\vec{b}=-2\vec{e}_1+4\vec{e}_2-3\vec{e}_3$，

$3\vec{a}-2\vec{b}=-3\vec{e}_1+10\vec{e}_2-7\vec{e}_3$；

3）①×3＋②×4得 $17\vec{x}=3\vec{a}+4\vec{b}$，

①×2－②×3得　$17\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}$，

$\therefore \vec{x}=\frac{3}{17}\vec{a}+\frac{4}{17}\vec{b}$；$\vec{y}=\frac{2}{17}\vec{a}-\frac{3}{17}\vec{b}$．

**4．** 画图验证下面的等式：

1) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{a}$；2) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\vec{b}$。

**解**　如图：设$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，

则$\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\vec{b}$，　$\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{b}$。

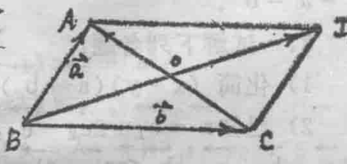
$\therefore \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BO}$，$\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}$

从而 $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$

$=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}=\vec{a}$；

$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$．




（第 4 题）

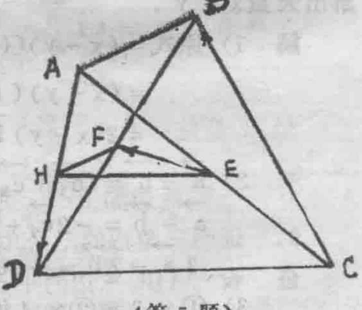
**5．** 已知四边形ABCD中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{c}$，$\overrightarrow{CD}=5\vec{a}+6\vec{b}-8\vec{c}$，对角线$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$的中点分别为E、F，求$\overrightarrow{EF}$。

**解**　取AD的中点H，连接HE、HF，

则 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HF}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})$

$=3\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}$．




（第 5 题）

6. 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$，证明A、B、D三点共线。

**证** $\because \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+5\vec{b}=\overrightarrow{AB}$，

故$\overrightarrow{BD}$与$\overrightarrow{AB}$共线，从而A、B、D三点共线。

7. 在四边形ABCD中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$，证明ABCD为梯形。

**证** $\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-8\vec{a}-2\vec{b}=2\overrightarrow{BC}$

故$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$共线，从而AD∥BC，

所以ABCD是梯形。

8. 证明三个两两不平行的矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$可以构成一个三角形（每个矢量的始点重合于另外两个矢量中一个矢量的终点）的充要条件是$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$。

**证** 1）充分性：若$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$，则$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，于是由矢量的加法，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$三矢量构成一个三角形。

2）必要性：若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$构成一个三角形，则$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$两边加上$\vec{c}$，则有$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{c}+\vec{c}=\vec{o}$.

9. 证明三角形的三个中线矢量可以构成一个三角形。

**证** 设△ABC三边的中点分别为D、E、F，则