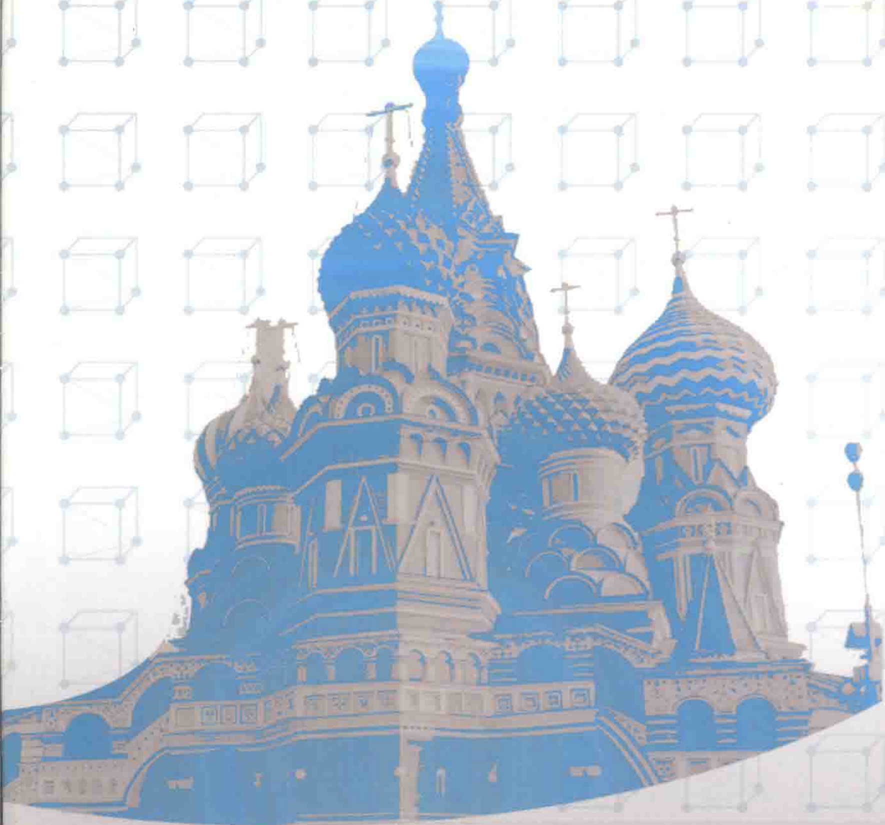
中国科学技术大学出版社



第51—76届

莫斯科数学奥林匹克

苏　淳　编译
申　强　校对

第51—76届
莫斯科
数学奥林匹克

苏　淳　编译
申　强　校对

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书包含了1988—2013年举办的第51—76届莫斯科数学奥林匹克的全部试题.书中对每一道试题都给出了详细解答，对有些试题还作了延伸性的讨论.对于一些我国读者难以理解的内容和一些较为陌生的数学概念，都以编译者注的形式给出了注释.为便于阅读，还在书中的专题分类中对有关数学知识和解题方法作了介绍.

本书可供对数学奥林匹克感兴趣的学生阅读，也可供教师、数学小组的指导者、各种数学竞赛活动的组织者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

第51—76届莫斯科数学奥林匹克/苏淳编译. —合肥:中国科学技术大学出版社,2015.6

ISBN 978-7-312-03544-9

Ⅰ. 第… Ⅱ. 苏… Ⅲ. 数学—竞赛题—题解 Ⅳ. O1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第275763号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,230026
http://press.ustc.edu.cn

印刷 合肥万银印刷有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×1000 mm 1/16

印张 33.5

字数 657千

版次 2015年6月第1版

印次 2015年6月第1次印刷

定价 68.00元

前　言

自从《苏联中学生数学奥林匹克试题汇编 (1961—1992)》一书脱稿以后, 就转到这本《第 51—76 届莫斯科数学奥林匹克》的编译工作之中了, 迄今已有两年时光.

苏联是开展中学生数学竞赛活动最早, 内涵最丰富, 并且也是水平最高的国家. 苏联及苏联解体后俄罗斯的中学生数学竞赛资料具有很高的学术价值, 搜集、整理、编译、出版其中学生数学竞赛资料, 不仅具有重要意义, 而且也使自己得到升华.

在苏联和俄罗斯所开展的各种有代表性的数学竞赛活动中, 莫斯科数学奥林匹克具有难得的延续性. 由于苏联的解体, 城市的更名, 一些竞赛不得不重新命名和从头计算届数, 然而莫斯科数学奥林匹克却能够从 1935 年的第 1 届竞赛一直延续计数, 除了 1942—1944 年间由于第二次世界大战停办 3 年之外, 到 2013 年为止一共举办了 76 届. 我们曾经把 1987 年及其以前的资料翻译出来, 在 1990 年由科学出版社出版了中文版《第 1—50 届莫斯科数学奥林匹克》, 现在要奉献给读者的则是冠名《第 51—76 届莫斯科数学奥林匹克》的后续 26 届竞赛的全部试题和完整的解答.

在俄罗斯目前还找不到这样一本关于莫斯科数学奥林匹克的完整资料. 我们于 1990 年出版的中文版《第 1—50 届莫斯科数学奥林匹克》主要是根据莫斯科教育出版社 1986 年的俄文版翻译的, 该版仅收录到第 49 届为止 (其中第 49 届是放在附录中的), 后面的第 50 届 (1987 年) 则是我们根据《量子》杂志上的资料翻译后补入的. 接下来的资料就更不完整了. 2006 年, 莫斯科不间断数学教育中心所属的出版社出版了一本《莫斯科数学奥林匹克 (1993—2005)》, 其中仅收录了第 56—68 届的资料. 为了保持资料的完整性, 我们决定按照自己的思路进行编译, 即把 1988 年以后举办的各届竞赛资料全都汇编起来. 为此, 我们多方搜集资料. 其中, 对第 51—55 届, 我们主要依据在莫斯科数学会工作的俄罗斯朋友所提

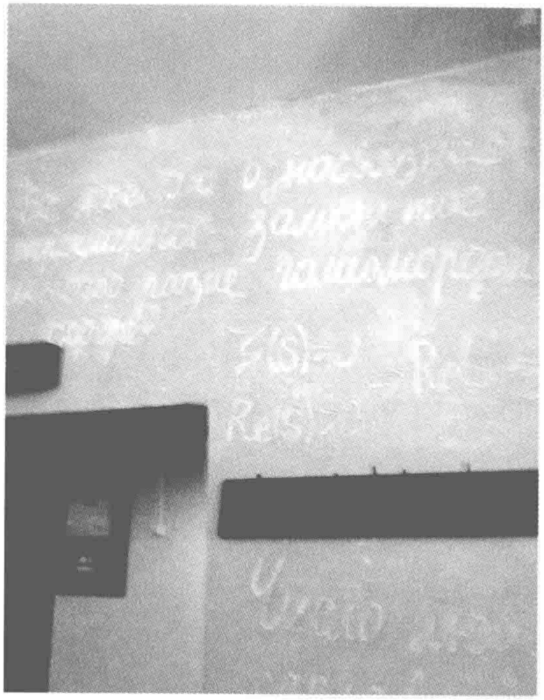
供的打印件翻译, 部分地参考了当年国内出版的相关资料, 对其中一些未解答的试题我们补做了解答. 至于第 69—76 届资料的搜集就比较容易了, 莫斯科数学会每年都会在他们的网站上公布完整的电子版, 只要有心搜集, 总是可以下载到的. 与《第 1—50 届莫斯科数学奥林匹克》相比, 最大的不同是: 前 50 届中的试题没有全部给出解答, 特别是一些有深度的题目都没有作解; 而在后 26 届资料中, 不仅对每道题都给出了解答, 对于一些学术背景较深, 内容较为新颖的题目, 还进行了延伸性的讨论, 使得读者在无形中开阔了眼界, 提高了境界.

俄罗斯数学奥林匹克的举办经历了若干个不同的阶段. 在最早的年代里, 由于莫斯科的首都地位, 莫斯科数学奥林匹克与列宁格勒数学奥林匹克并列为苏联的两大数学竞赛, 竞赛组委会都是由当年苏联最著名的数学家组成的, 这些专家们不仅参与命题, 而且参与竞赛辅导, 一直保持着很高的学术水平. 1960 年莫斯科数学奥林匹克还一度成为全俄罗斯竞赛的替代品, 被称为 “第 0 届全俄罗斯数学奥林匹克”. 在接下来的年代里, 莫斯科数学奥林匹克都兼具双重功能: 既是独立的数学竞赛, 又是全苏和全俄数学奥林匹克中的一轮比赛, 承担着选拔参加全苏和全俄竞赛的莫斯科选手的功能. 这一状况到了第 72 届 (2009 年) 有所改变. 根据俄罗斯教育与科学部的决定, 莫斯科竞赛不再作为全俄竞赛的一个阶段. 这不能不说是莫斯科数学竞赛活动中的一个重大转折点.

完全独立后的莫斯科数学奥林匹克不仅没有退化, 相反地, 却是越办越好, 越办越出彩, 不仅题目出得越来越漂亮, 而且解答做得越来越深刻. 它已经超越了为竞赛而竞赛的境界, 到达了让学生享受数学之美的层面. 学生参加这个竞赛完全是出于对数学的热爱. 因为它不再兼具选拔功能, 即使考了第一, 也不能取得参加全俄竞赛的决赛资格, 完全去除了功利色彩. 或许正因为如此, 它才有了昂首绽放的机会!

支撑着这个竞赛的不仅是莫斯科数学会, 不仅是莫斯科大学, 而且还有一个闻名遐迩的莫斯科不间断数学教育中心. 这个中心不仅为中学生开设讲座, 拥有自己的书店和出版社, 而且是莫斯科数学界精英们的聚会场所. 每当闲暇时光, 尤其是到了周末, 莫斯科的数学爱好者们纷纷云集这里, 开设讨论班, 甚或是毫无拘束地闲聊, 他们海阔天空地高谈阔论, 随心所欲地道古论今. 其中不乏争论, 不乏独到的见解, 一些极具创新性的想法便在这种争论之中涓涓流出. 他们不拘小节, 不拘形式, 就像一群数学疯子. 只要看看他们是如何布置餐厅的墙壁的 (参阅下图), 就可以知道他们是何等热爱数学、何等痴迷数学了. 正是这样一批一心热爱数学的人引导了这样一个丝毫不带功利色彩的竞赛活动, 才使得它办得越来越精

彩, 越来越生动活泼.



这几年我一直在做着搜集—整理—翻译—汇编苏联和俄罗斯数学竞赛资料的工作, 随着年龄的增长, 每每产生力不从心之感. 加之莫斯科资料的遣词造句中带有更多的口语色彩, 每每感觉难以确切遵循原作者的用意, 一直渴望能有一个既精通俄语又热爱数学的人助我一臂之力. 现在这一愿望实现了, 年富力强的申强先生担负起了本书的校对工作. 他不仅数学功底好, 思维敏捷, 而且具有极好的语言天赋, 自学了好几门外语. 他的俄语水平非同一般, 对俄语语法甚为精通, 对结构复杂的俄文长句具有很好的理解能力. 他的加盟, 大大提高了本书译文的准确性.

苏　淳

2014 年 3 月

合肥, 科大花园东苑

符 号 说 明

$\mathbf{N}_+$ —— 正整数集;

$\mathbf{Z}$ —— 整数集;

$\mathbf{Q}$ —— 有理数集;

$\mathbf{R}$ —— 实数集;

$a \in A$ —— 元素 a 属于集合 A;

$\varnothing$ —— 空集;

$B \subset A$ —— 集合 B 是集合 A 的子集;

$A \cup B$ —— 集合 A 与 B 的并集;

$A \cap B$ —— 集合 A 与 B 的交集;

$A \backslash B$ —— 集合 A 与 B 的差集 (由集合 A 中所有不属于集合 B 的元素构成的集合);

$f: A \to B$ —— 定义在集合 A 上的, 其值属于集合 B 的函数 f;

$\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ —— 10 进制 (或其他进制)n 位数, 它的各位数字依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$;

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ —— 数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的和;

$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ —— 数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的积;

$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ —— 实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大值;

$\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\} = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ —— 实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最小值;

$[x]$ —— 实数 x 的整数部分, 即不超过实数 x 的最大整数;

$\{x\}$ —— 实数 x 的小数部分 ($\{x\} = x - [x]$);

$b|a$ ——b 整除 a, 即 a 可被 b 整除;

$b \equiv a \pmod{n}$—— 整数 a 与 b 对 n 同余 (即整数 a 与 b 被 n 除的余数相同);

(a,b) —— 正整数 a 与 b 的最大公约数;

$[a,b]$ —— 正整数 a 与 b 的最小公倍数;

$\overset{\frown}{AC}$ ($\overset{\frown}{ABC}$) —— 弧 AC(有点 B 在其上面的弧 AC);

$P(M)$ 或 P_M —— 多边形 M 的周长;

$S(M)$ 或 S_M —— 多边形 M 的面积;

$V(M)$ 或 V_M —— 多面体 M 的体积;

$\boldsymbol{u}=\overrightarrow{AB}$ —— 以 A 为起点、以 B 为终点的向量 $\boldsymbol{u}$;

$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ —— 向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的内积;

$\angle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ —— 向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角;

$n!$ —— n 的阶乘, 即前 n 个正整数的乘积, $n!=1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot n$;

C_n^k —— 自 n 个不同元素中取出 k 个元素的组合数, 亦即 n 元集合的不同的 k 元子集的个数, $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\,(0\leqslant k\leqslant n)$.

目　次

前言 …… i

符号说明 …… v

第一部分　第 51—76 届莫斯科数学奥林匹克试题 …… 1

第 51 届莫斯科数学奥林匹克 (1988) …… 3
第 52 届莫斯科数学奥林匹克 (1989) …… 5
第 53 届莫斯科数学奥林匹克 (1990) …… 7
第 54 届莫斯科数学奥林匹克 (1991) …… 9
第 55 届莫斯科数学奥林匹克 (1992) …… 12
第 56 届莫斯科数学奥林匹克 (1993) …… 14
第 57 届莫斯科数学奥林匹克 (1994) …… 17
第 58 届莫斯科数学奥林匹克 (1995) …… 20
第 59 届莫斯科数学奥林匹克 (1996) …… 22
第 60 届莫斯科数学奥林匹克 (1997) …… 25
第 61 届莫斯科数学奥林匹克 (1998) …… 28
第 62 届莫斯科数学奥林匹克 (1999) …… 30
第 63 届莫斯科数学奥林匹克 (2000) …… 33
第 64 届莫斯科数学奥林匹克 (2001) …… 36
第 65 届莫斯科数学奥林匹克 (2002) …… 39
第 66 届莫斯科数学奥林匹克 (2003) …… 41
第 67 届莫斯科数学奥林匹克 (2004) …… 45
第 68 届莫斯科数学奥林匹克 (2005) …… 48
第 69 届莫斯科数学奥林匹克 (2006) …… 51
第 70 届莫斯科数学奥林匹克 (2007) …… 54
第 71 届莫斯科数学奥林匹克 (2008) …… 57

第 72 届莫斯科数学奥林匹克 (2009) ············ 60
第 73 届莫斯科数学奥林匹克 (2010) ············ 63
第 74 届莫斯科数学奥林匹克 (2011) ············ 66
第 75 届莫斯科数学奥林匹克 (2012) ············ 69
第 76 届莫斯科数学奥林匹克 (2013) ············ 72

第二部分 解答或提示 ············ 77

第 51 届莫斯科数学奥林匹克 (1988) ············ 79
第 52 届莫斯科数学奥林匹克 (1989) ············ 84
第 53 届莫斯科数学奥林匹克 (1990) ············ 94
第 54 届莫斯科数学奥林匹克 (1991) ············ 102
第 55 届莫斯科数学奥林匹克 (1992) ············ 111
第 56 届莫斯科数学奥林匹克 (1993) ············ 118
第 57 届莫斯科数学奥林匹克 (1994) ············ 137
第 58 届莫斯科数学奥林匹克 (1995) ············ 153
第 59 届莫斯科数学奥林匹克 (1996) ············ 167
第 60 届莫斯科数学奥林匹克 (1997) ············ 180
第 61 届莫斯科数学奥林匹克 (1998) ············ 197
第 62 届莫斯科数学奥林匹克 (1999) ············ 209
第 63 届莫斯科数学奥林匹克 (2000) ············ 223
第 64 届莫斯科数学奥林匹克 (2001) ············ 241
第 65 届莫斯科数学奥林匹克 (2002) ············ 254
第 66 届莫斯科数学奥林匹克 (2003) ············ 269
第 67 届莫斯科数学奥林匹克 (2004) ············ 289
第 68 届莫斯科数学奥林匹克 (2005) ············ 308
第 69 届莫斯科数学奥林匹克 (2006) ············ 325
第 70 届莫斯科数学奥林匹克 (2007) ············ 341
第 71 届莫斯科数学奥林匹克 (2008) ············ 358
第 72 届莫斯科数学奥林匹克 (2009) ············ 378
第 73 届莫斯科数学奥林匹克 (2010) ············ 395
第 74 届莫斯科数学奥林匹克 (2011) ············ 414
第 75 届莫斯科数学奥林匹克 (2012) ············ 433
第 76 届莫斯科数学奥林匹克 (2013) ············ 466

附录　专题分类 …… **496**

组合 …… 496
数论 …… 498
几何 …… 501
多项式 …… 503
各种事实 …… 505

关于第 119 b) 题的解答 …… **509**

本书资料来源 …… **514**

参考文献 …… **515**

第一部分　第 51—76 届莫斯科数学奥林匹克试题

苏联于 1991 年 12 月 25 日解体. 我们所搜集的试题跨越两个阶段, 其中: 第 51—54 届 (1988—1991 年) 属于苏联时期; 从第 55 届 (1992 年) 开始属于独立后的俄罗斯时期. 有意思的是, 俄罗斯人普遍认为他们的新阶段是从 1993 年开始的, 所以第 55 届 (1992 年) 莫斯科数学奥林匹克并未收录在他们自己出版的文集中.

莫斯科数学会举办的数学竞赛活动按年级进行. 其中, “莫斯科数学奥林匹克” 为中学的最高四个年级举办, “莫斯科数学节” 为接下来的两个较低年级举办.

苏联的中小学原为十年制, 所以 “莫斯科数学奥林匹克” 原先都在七至十年级举办; 从 1990 年开始, 苏联的学制延长一年, “莫斯科数学奥林匹克” 的举办年级也相应地改为八至十一年级, 这一局面一直延续至今.

“莫斯科数学节” 不与 “莫斯科数学奥林匹克” 同时进行.

第 51 届莫斯科数学奥林匹克 (1988)

七年级[①] 第 1—4 题

八年级 第 5—8 题

九年级 第 9—13 题

十年级 第 14—18 题

1. 证明, 当质数 $p \geqslant 7$ 时, 数 p^4-1 可被 240 整除.

2. 在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱 AB 和 $B'C'$ 上分别取定内点 M 和 P. 试在侧面 $BCC'B'$ 中找出所有这样的点来: 由它们沿着正方体的表面到达点 M 和点 P 的最短距离相等.

3. 试用直尺和分规[②] 过一给定点作一直线平行于已知直线.

4. 20 部电话机之间用导线接通, 每一根导线连接两部电话机, 每两部电话机之间至多连接一根导线, 自每部电话机至多连出两根导线. 现在要给这些导线染色 (每一根导线从头到尾染为一种颜色), 使得自每部电话机所连出的都是颜色两异的导线. 试问, 为此最少需要用多少种不同的颜色?

5. 开始时, 1,9,8,8 四个数自左至右写成一行. 对于每两个相邻的数, 都用右边的一个数减去左边的一个数, 并将所得的差写在两个数之间, 得到由 7 个数所列成的行, 称为进行了一次操作. 再对该行数进行所述的操作, 并一直如此进行下去, 共进行 100 次操作. 试求最后所得的一行数的和.

6. 今有一根无刻度的直尺和一件专用仪器, 利用该仪器可以量取任意两点之间的距离, 并可以任何已作直线上的任意一点为起点, 在直线上截取这段距离. 试问, 如何利用铅笔和这两件仪器将所给线段二等分?

7. 证明, 任何四个正整数 x, y, z, t 都不能满足如下的等式:

$$3x^4+5y^4+7z^4=11t^4.$$

---

① 苏联的中小学原为十年制, 莫斯科数学奥林匹克为七至十年级举办.—— 编译者注

② 分规的形状与圆规类似, 但两只脚都是针, 用它可以截取等长的线段, 但不能画出图形 (例如, 不能作圆、画弧以及作圆弧之交等).—— 编译者注

8. 在所给的四枚硬币中可能混有假币. 现知真币每枚重 10 g, 假币每枚重 9 g. 今有一台具有一个秤盘的台秤, 可以称出盘中物体的总重量. 为了鉴别出哪些是真币, 哪些是假币, 最少需要作多少次称量?

9. 凸四边形被两条对角线分为 4 个三角形. 今知这些三角形的面积都是整数. 证明, 这 4 个整数的乘积不可能以 1988 结尾.

10. 设 $p_1,p_2,\cdots,p_{24}$ 都是不小于 5 的质数. 证明, $p_1^2+p_2^2+\cdots+p_{24}^2$ 可被 24 整除.

11. 平面上有两条相互垂直的已知直线. 试用分规在该平面上确定 3 个点, 使它们构成正三角形. 分规的作用参阅第 3 题附注.

12. 设 x 与 y 为正整数, 考察函数

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-1)(x+y-2)+y.$$

证明, 函数 $f(x,y)$ 的值域是全体正整数, 并且对于每一正整数 $k=f(x,y)$, 数 x 与 y 之值是唯一确定的.

13. 20 部电话机之间用导线接通, 每 1 根导线连接两部电话机, 每两部电话机之间至多连 1 根导线, 自每一部电话机至多连出 3 根导线. 现在要给这些导线染上颜色 (每根导线只染 1 种颜色), 使得自每部电话机所连出的数根导线均颜色各异. 试问, 至少需要多少种不同的颜色?

14. 利用计算器可以完成 5 种运算: 加、减、乘、除和求平方根. 试给出一个公式, 使得可利用计算器按该公式运算, 求出任意两个实数 a 与 b 中的较大者.

15. 试问, 坐标平面上是否存在一条直线 ℓ, 使得函数 $y=2^x$ 的图像关于 ℓ 对称?

16. 试问, 是否对所有的平行六面体, 都可用某个平面相截, 使得所截出的截面是矩形?

17. 今有一根没有刻度的直尺和一个长度规, 利用长度规可在任何已有直线上, 自其上任意一点起截取某一定长的线段. 试问, 如何利用这两件工具和铅笔, 求作已给直线的垂线?

18. 取两个正整数, 作其中较大者对较小者的带余除法 (如果两个数相等, 也用其中一者除以另一者). 再用所得的商和余数作为一对新的数, 继续进行上述运算, 直到其中一个数变为 0 为止. 证明, 如果最初所取两个数均不超过 1988, 则所作运算不可能超过 6 次.

第 52 届莫斯科数学奥林匹克 (1989)

七年级　第 19—23 题

八年级　第 24—29 题

九年级　第 30—34 题

十年级　第 35—40 题

19. 今有一个 4×4 方格表 (见图 1). 试在表中放入字母 A, B, C, D, 每个方格中放一个字母, 使得每一行、每一列及两条主对角线上均无相同的字母.

A	B	C	D

图 1

20. 试利用直尺和圆规, 过线外一给定点作一直线平行于已知直线, 要求所画的辅助线 (圆弧或直线) 的总条数最少.

21. 黑屋中的抽屉里杂乱地放着 4 双袜子, 其中有两种颜色和两种尺寸 (每种颜色、每种尺寸各一双). 试问, 至少应当拿出多少只袜子, 才能保证其中有两双袜子, 它们的颜色不同, 尺寸也不同?

22. 游客在 10 时 15 分由码头划出一条小船, 他欲在 13 时回到码头. 河水的流速为 1.4 km/h (每小时 1.4 公里), 小船在静水中的速度为 3 km/h. 他每划 30 min 就休息 15 min, 中途不改变方向, 并在某次休息后往回划. 试问, 他最多可划离码头多远?

23. 试求满足如下条件的所有正整数 x, 其中 x 的各位数字之积等于 $44x-86868$, 而 x 的各位数字之和是完全立方数.

24. 求方程的实数解:

$$(x^2+x)^2+\sqrt{x^2-1}=0.$$

25. 今有一张无限大的方格纸, 其中有些方格被染为红色, 其余方格均为白色. 一只甲虫在红格之间跳跃, 一只跳蚤在白格之间跳跃, 每次跳跃可沿水平方向或竖直方向跳过任意多格. 证明, 它们可在总共至多跳过 3 次之后成为相邻.

26. 试利用直尺和圆规, 过一给定点求作已给直线的垂线, 要求所画的辅助线 (圆弧或直线) 的总条数最少, 其中:

a) 给定点在已给直线之外;

b) 给定点在已给直线之上.

27. 两位数集合 $\{00,01,\cdots,98,99\}$ 的子集合 X 满足性质: 在由数码①构成的任一无穷数列中, 均有两个相邻数码构成 X 的元素. 试问, X 最少应当含有多少个元素?

28. 证明, 任何一群人都可分成两组, 使得同组中的朋友总对数小于异组间的朋友对数.

29. 二次三项式 ax^2+bx+c 在区间 $[0,1]$ 上的绝对值均不超过 1. 试问, $|a|+|b|+|c|$ 的最大可能值是多少?

30. 空间中有 4 条直线, 其中两条被染为红色, 两条被染为蓝色. 今知任一红线均与任一蓝线垂直. 证明, 或者两条红线相互平行, 或者两条蓝线相互平行.

31. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB,BC,CA 上分别取点 M,K,L, 使得 $MK//AC$, $ML//BC$. 记 $BL\cap MK=P$, $AK\cap ML=Q$. 证明, $PQ//AB$.

32. 今知 $a_1,a_2,\cdots$ 与 $b_1,b_2,\cdots$ 都是等比数列. 试问, 能否由 $a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4$ 的值确定 a_5+b_5 的值?

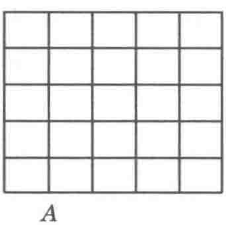


图 2

33. 某市的街道平面图是一个 5×5 方格表 (见图 2), 在图中 A 处 (下沿左数第 2 个结点处) 有一部扫雪机. 试求扫遍所有街道并回到出发点的最短路线的长度.

34. 由 10 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 构成的数组满足条件: 对 $k=1,2,\cdots,10$, 都有

$$(a_1+\cdots+a_k)(a_k+\cdots+a_{10})=1,$$

试求出所有这样的数组.

35. 解方程

$$\lg(x-2)=2x-x^2+3.$$

36. 试问, 是否存在这样的函数, 它在坐标平面上的图像与任何直线都有公共点?

37. 能否在无限大方格纸上的每个方格中都放上一个 "+" 或 "0", 使得在任一水平直线、竖直直线及对角线上都不出现 3 个相连的相同符号?

38. 给定 n 个互不相同的正整数, 试对

a) $n=5$;

b) $n=1989$.

---

① 数码, 又叫数字, 在 10 进制中指 $0,1,2,\cdots,9$.—— 编译者注