扫一扫 找学霸

微信号：chinastar01

刷百题 做学霸

2016

百题大过关

修订版

高考数学

第三关

压轴题

张瑞炳◎编著

上海市著名商标

ECNUP

华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

2016

百题大过关

高考数学

第三关　压轴题（修订版）

张瑞炳　编　著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学第三关压轴题/张瑞炳编著. —修订本.
—上海:华东师范大学出版社,2015.2
(百题大过关)
ISBN 978-7-5675-3112-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①中学数学课—高中—习题集—升学参考资料 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 034958 号

百题大过关

高考数学·第三关 压轴题(修订版)

编　　著　张瑞炳
总 策 划　倪　明
项目编辑　舒　刊
审读编辑　马超群
装帧设计　卢晓红
责任发行　高　峰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟市文化印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　15
字　　数　384 千字
版　　次　2015 年 4 月第 5 版
印　　次　2015 年 4 月第 1 次
印　　数　40000
书　　号　ISBN 978-7-5675-3112-3/G·7965
定　　价　28.00 元

出 版 人　王　焰

《百题大过关》编委会

致小伙伴们

我不是学霸，不过，中考数学神奇地拿了A，之前一直是B来着. 不知道是不是考前一个半月狂刷百题大过关的第一关（基础题）和第二关（核心题）的原因，反正刷完了上战场，就拿了A.

狂刷百题，倒床便睡！

一日刷百题，考试九十九！

愿得一学神，白首不相离，带我上自习，每日刷百题.

与其考羡自主招生，不如平时多刷百题.

换了新同桌，与学霸做起了同桌，从此开启日刷百题模式！

称你们是小伙伴，我们是你们的大朋友. 让我们一起分享上面这些刷过百题的小伙伴们的经历.

每天背着5公斤的书包上学、每天喝8杯水睡 $n(n<8)$ 小时的小伙伴们，你们一定都有过刷题的经历！那经历是不是像上面的学兄学姐一样有点苦又有点High?

关于刷题，下面的一则新闻或许能给我们带来启示：上海学生在PISA（国际学生评估项目）测试中连续两次夺得第一，但每周作业时间同样位列世界第一. 对此，专家说了，做作业对于提高成绩非常有效，但并非越多越好. 算上周末，15岁学生平均每周最佳作业时间在11小时左右. “在最佳作业时间内作业时间越长成绩越好，但是超过最佳作业时间后成绩提高程度很小.”

看来，刷题的确能提高成绩，刷题是小伙伴们的必修课，但刷得不好也会成为灾难的. 我们就是把刷题当做专业课来上的，目标是提升小伙伴们刷题的幸福指数，高效刷题.

必修课——轻松高效不拖堂

作为专业的出版单位，我们要做的，是将小伙伴们要刷的题精选再精选，在确保训练质量的前提下尽量控制题量，让必修课轻松高效、不会拖堂. 为此，我们邀请了经验丰富的一线教师担纲编写，每本书或每个考点精心设计百道互不重复且具有一定梯度的训练题，题目排列杜绝杂乱无章和随意性. 希望能帮助小伙伴们顺利过关.

幸福课——查询方便不伤眼

为了方便使用本丛书的小伙伴们，提高大家的幸福指数，对有一定难度的题目，我们不仅提供参考答案，还力求作最为详尽的解析，以供小伙伴们查询，让小伙伴们知其然，更知其所以然. 为了不摧残小伙伴们的眼睛，我们在图书的编排上尽量简洁明了，字号适中，以提高小伙伴们刷题的速度.

专业课——紧跟考情不落伍

对于刷题，大朋友们是用专业的精神来对待的. 每年的考试一结束，我们都会组织老师认真研究考题，把握考试变化的趋势，并提醒老师们要将最新的考试变化反映到图书上，也经常收集小伙伴们的改进建议，所以，我们的图书每年都会修订. 有些图书，已经修订到第13版了，是不是很有生命力？

愿所有刷过百题的小伙伴们，轻松上考场，快乐做学霸！

一群大朋友

编写说明

数学是高考中“含金量”很高的一个学科，必须认真面对数学科高考，勇敢闯过高考数学这个重要的关口. 机遇与挑战并存，希望与困难同在.

综观各地的高考数学卷，满分一般是 150 分，考试用时大多是 2 小时，题量(包括解答题中的小题)大概为 22 题左右，题型有“选择题”、“填空题”、“解答题”三类，题目按难度区分又有“容易题”、“中档题”、“稍难题”三种(整卷“容易题”、“中档题”、“稍难题”的分值之比约为 6∶3∶1). 许多同学的高考成绩不理想，其原因不外有两个，或者因为自身基础知识薄弱，运算、推理、应用能力欠缺；或者由于对高考产生紧张、畏难情绪导致看错、理解错题意，对各种难度题目平均用力导致考试用时不够. 为了帮助高中毕业生更好地闯过高考数学这一大关，我们编写了这套《百题大过关·高考数学》丛书，目的是让各位读者读完全套丛书，研究、做完书中的例题、练习题后，能了解高考数学卷的结构，发挥自己的最大潜能，顺利解答高考数学试卷，取得好成绩，考上理想的学校.

本着为考生服务的宗旨，丛书的编写顺应高中毕业生的实际学习状况，选题力求全面性与典型性，注意根据高考数学命题的统计分布来确定各知识点、各题型的题量，尽量涵盖多年来高考常见的各种题型；同时注意高考数学命题的变化趋势，尽量选取近年来高考的创新题型.

学生在学习程度上有差异，有好、中、差之分，学习的过程从容易逐渐加大难度. 为适合不同学生不同阶段的学习需要，我们按照高考数学试题的难易程度，把这套丛书分为五册书来编写，它们分别为《第一关　基础题(文科版)》，《第一关　基础题(理科版)》，《第二关　核心题》(文科版)，《第二关　核心题(理科版)》，《第三关　压轴题》. 各册简介如下：

《第一关　基础题》所选的题目为容易题，若按整卷满分 150 分计，高考容易题分值在 90 分左右，基础较差的考生认真用好该册书后，能确保拿到容易题(即基础题)的分数，高考成绩便超过 90 分. 该书按知识点来编排，对高中阶段数学科基础知识进行全面的复习，总题量有 500 题.

《第二关　核心题》所选的题目为中档题，若按整卷满分 150 分计，高考中档题分值在 40 分左右，基础一般的考生认真用好该册书后，能确保拿到中档题(即核心题)的分数，高考成绩便可达到 130 分以上. 该书按知识整合和数学思想方法来编排，体现数学的核心本质与应用价值，总题量有 300 题.

《第三关　压轴题》所选的题目为稍难题，若按整卷满分 150 分计，高考稍难题分值在 15 分左右. 基础较好的考生认真用好该册书后，能确保拿到稍难题(即压轴题)的分数，高考成绩便可达 140 分以上. 该书按“题型”和能力要求来编排，对每一类型的压轴题作详尽的介绍，总题量有 100 题.

当然，上述各类同学在用完相应的一本丛书后，可根据自己的具体情况，再选取其他一本或两本丛书来研读，这对进一步夯实基础知识，提高解题能力，取得更好成绩大有裨益.

本书《第三关　压轴题》按照考试大纲对各种能力及数学思想方法的要求，对压轴题进行了适当的梳理. 本书共九讲，在各讲的评述中，详尽讲解了该讲的压轴题所涉及的知识在高考中的表现形式与命题趋势，并通过典型例题加以说明. 对各讲内容，本书还选取相应的即时巩

固试题(题型有选择题、填空题、解答题等)让读者练习巩固,以检验自己对该专题知识掌握的程度.相信大家认真阅读本书并做好相关试题(书末附有答案与提示)后会受益匪浅,特别是基础较好的同学一定会过好“压轴”关.

吃透百题,胜券在握.愿读者增强信心,闯过“基础题”、“核心题”、“压轴题”三关,在数学高考中打个漂亮仗!

编者

目录

第一讲 函数与导数

命题特点与趋势

从最近几年全国及各省市新课程数学高考试卷的考查内容来看，函数与导数这部分内容在高考中的考查可以说是全方位的，从考查要求来讲，它不仅有基础知识、基本技能的考查，更有数学思想、数学本质的考查，从考查内容来看，它不仅有函数知识内部的显性考查，更有与其他主干知识（数列、不等式、解析几何等）相结合的隐性考查. 涉及函数解析式、函数的定义域、函数的值域、函数的图象与性质等知识内容以及函数与方程、分类讨论、数形结合、等价转化等思想方法都是函数与导数这部分内容高考考查的热点.

解题要领

本讲的知识载体主要是三次函数、指数函数与对数函数等综合题. 主要题型：(1)利用导数研究函数的单调性、极值与最值问题；(2)考查以函数为载体的实际应用题，主要是首先建立所求量的目标函数，再利用导数进行求解；(3)灵活应用函数图象与性质等.

一、探究导函数与原函数图象之间的关系

如果原函数在定义域内可导，则原函数 $f(x)$的图象与其导函数 $f'(x)$的图象有密切的关系：

1. 导函数 $f'(x)$在 x 轴上、下方图象与原函数图象上升、下降的对应关系

(1) 若导函数 $f'(x)$在区间 D 上恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在区间 D 上为增函数，由此进一步得到导函数 $f'(x)$图象中在 x 轴上方的图象对应的区间 D 为原函数图象中的上升区间 D；

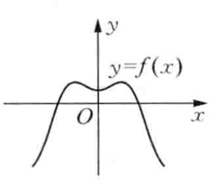
(2) 若导函数 $f'(x)$在区间 D 上恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在区间 D 上为减函数，由此进一步得到导函数 $f'(x)$图象中在 x 轴下方的图象对应的区间 D 为原函数图象中的下降区间 D.

(3) $|f'(x)|$的大小决定了 $f(x)$变化的快慢.

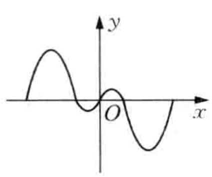
2. 导函数 $f'(x)$的零点与原函数的极值点的对应关系

如果导函数在零点的左侧为正、右侧为负，则导函数的零点为原函数的极大值点；如果导函数在零点的左侧为负、右侧为正，则导函数的零点为原函数的极小值点.

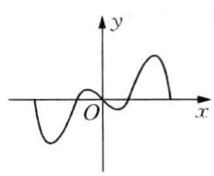
001 如果函数 $y=f(x)$ 的图象如图 1，那么导函数 $y=f'(x)$ 的图象可能是(　　).



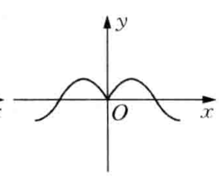
第 001 题图 1



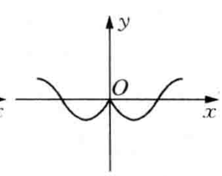
(A)



(B)



(C)



(D)

【命题意图】考查导函数与原函数图象之间的关系.

【答题要旨】根据原函数 $y=f(x)$ 的图象可知，$f(x)$有两个上升区间，有两个下降区间，且第一个区间为上升区间，然后相间出现，则反映在导函数图象上就是有两部分图象在 x 轴的上方，有两部分图象在 x 轴的下方，且第一部分在 x 轴上方，然后相间出现.

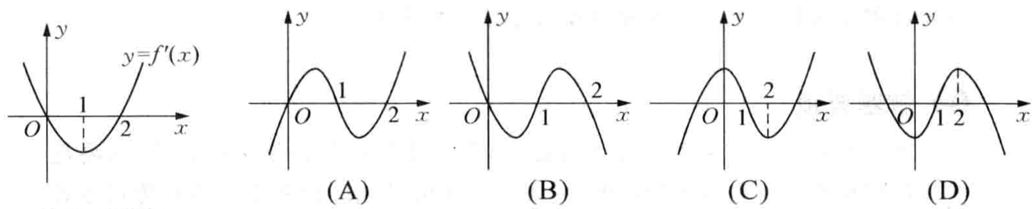
【满分解答】

解析 由原函数的单调性可以得到导函数的正负情况依次是正→负→正→负，只有答案 A 满足.

【易错分析】没有把握原函数图象与导函数图象之间的对应关系，以为导函数的图象与原函数的图象走势一致，误选 C.

【即时巩固】

001′ 设 $f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数，$y=f'(x)$ 的图象如图 2 所示，则 $y=f(x)$ 的图象可能是(　　).



第 001 题图 2

二、探讨切线问题

众所周知，导数 $f'(x_0)$的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 上以 $P(x_0,\ f(x_0))$为切点所作切线的斜率. 相对于传统知识而言，由导数所衍生出的“曲线的切线问题”，在思路、方法及过程上，都使人耳目一新，彰显出其别具一格的魅力. 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，切线与曲线的综合，可以出现多种变化，在解题时，要抓住切线方程的建立、切线与曲线的位置关系展开推理. 对于两条曲线的公切线，要抓住切点处的函数值相等，且导数相等这两个条件求解.

002 已知函数 $f(x)=x^3+3x^2-1\ (x\in\mathbf{R})$，记 $y=f(x)$ 的图象为曲线 C.

(1) 求证：若以曲线 C 上的任意一点 $P(x_0,\ y_0)$为切点作 C 的切线，则切线的斜率存在最小值-3；

(2) 求证：以曲线 C 上的两个动点 A、B 为切点分别作 C 的切线 l_1、l_2，若 $l_1\parallel l_2$ 恒成立，则动直线 AB 恒过某定点 M；

(3) 在(2)条件下，当直线 AB 的斜率 $k_{AB}=2$ 时，求$\triangle OAB$ 的面积(其中 O 是坐标原点).

【命题意图】在导数背景下的切线问题，远不止仅停留在“求解”的层面上. 导数的几何意义，促使函数与解析几何等知识在知识网络的交汇处产生了“共鸣”，为我们在知识的掌握与方法的运用上，提供了可进一步拓展的空间. 本题通过以曲线上任意一点为切点的切线斜率，来体现导数的“函数性”，并通过导数的相等关系，生动地刻画了函数的“对称性”. 而其中所蕴含的整体代换的数学方法，以及化归与转化的数学思想，又使试题具有较强的考查功能.

【答题要旨】第(1)小题先求导函数 $f'(x)$，然后转化为求二次函数的最值问题；第(2)小题通过“设而不求”的思想，对问题进行整体代换；第(3)小题利用弦长公式进行计算.

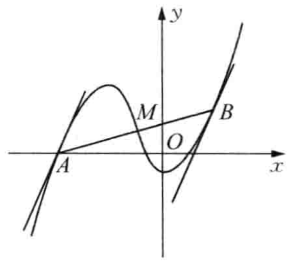
【满分解答】

解 (1) 由 $f(x)=x^3+3x^2-1$ 得 $f'(x)=3x^2+6x$.

所以，曲线 C 在 $P(x_0,\ y_0)$ 处的切线的斜率为

$$f'(x_0)=3x_0^2+6x_0=3(x_0+1)^2-3\geqslant -3.$$

当且仅当 $x_0=-1$，即当切点 P 为 $(-1,\ 1)$ 时，切线斜率取得最小值 -3.



第002题

(2) 如图，设点 A、B 坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$，则 $x_1\neq x_2$. 因为 $l_1\ /\!/\ l_2$，所以 $f'(x_1)=f'(x_2)$，即

$$3x_1^2+6x_1=3x_2^2+6x_2\Rightarrow 3(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)=0.$$

又因为 $x_1\neq x_2$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-1$，故

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}&=\frac{(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)+3(x_1^2+x_2^2)-2}{2}\\&=\frac{(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]+3[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-2}{2}\\&=\frac{-2\times[(-2)^2-3x_1x_2]+3[(-2)^2-2x_1x_2]-2}{2}\\&=1.\end{aligned}$$

从而得知，点 $(-1,\ 1)$ 是线段 AB 中点，即动直线 AB 恒过定点 $M(-1,\ 1)$.

(3) 由(2)可知，直线 AB 恒过点 $M(-1,\ 1)$，且斜率为 2. 所以，直线 AB 的方程为 $y-1=2(x+1)$，即 $2x-y+3=0$. 故原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

又因为 $k_{AB}=2$，即
$$\begin{aligned}\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}&=\frac{(x_1^3-x_2^3)+3(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}\\&=(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)+3(x_1+x_2)\\&=(x_1+x_2)^2+3(x_1+x_2)-x_1x_2\\&=(-2)^2+3\times(-2)-x_1x_2\\&=2,\end{aligned}$$

所以 $x_1x_2=-4$.

从而 $|AB|=\sqrt{1+2^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\times\sqrt{4+16}=10.$

故 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}d\cdot|AB|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\times 10=3\sqrt{5}.$

【易错分析】对三次函数图象对称性的理解不到位.

【即时巩固】

002′ 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}\ln x$，$g(x)=\mathrm{e}^{-1}\cdot f(x)-(x+1)$. ($\mathrm{e}=2.718\cdots$)

(1) 求函数 $g(x)$ 的极大值；

(2) 对于函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 定义域上的任意实数 x，若存在常数 k、b，使得 $f(x)\leqslant kx+b$ 和 $h(x)\geqslant kx+b$ 都成立，则称直线 $y=kx+b$ 为函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的“分界线”. 设函数 $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2$，试探究函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 是否存在“分界线”？若存在，请加以证明，并求出 k、b 的值；若

不存在，请说明理由.

三、求函数的单调性问题

若函数 $f(x)$在区间上可导，则由 $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) 可推出 $f(x)$在区间 D 上为增(减)函数，但反之则不一定，如：函数 $f(x)=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而 $f'(x)\geqslant 0$. 函数 $f(x)$在区间 D 内单调递增(减)的充要条件是 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$，且 $f'(x)$在区间 D 的任意子区间上都不恒为零. 利用导数求解函数单调性的主要题型：(1)根据函数解析式，求函数的单调区间；(2)根据函数的单调性求解参数问题；(3)求解与函数单调性相关的其他问题，如函数的零点、不等式恒成立等问题.

003 已知 a、b 是实数，函数 $f(x)=x^3+ax$，$g(x)=x^2+bx$，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的导函数. 若 $f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在区间 I 上恒成立，则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上单调性一致.

(1) 设 $a>0$，若函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间$[-1,+\infty)$上单调性一致，求实数 b 的取值范围；

(2) 设 $a<0$，且 $a\neq b$，若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在以 a、b 为端点的开区间上单调性一致，求 $|a-b|$ 的最大值.

【命题意图】 在考生理解了函数的单调性的基础上，新定义了“单调性一致”的概念，考生需要把新的定义与自己已有的知识融合，这种解决新问题的能力是考生在今后学习中非常重要的. 解决问题的过程中所用到的知识和方法并不深奥，但分析问题、解决问题的能力要求很高，属于对高层次数学思维和数学素质的考查.

【答题要旨】 第(1)小题可利用分离参变量法进行求解；第(2)小题要对 a、b 之间的大小关系进行分类讨论.

【满分解答】

解 $f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2x+b$.

(1) 因为函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间$[-1,+\infty)$上单调性一致，所以对于任意的 $x\in[-1,+\infty)$，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$，即对于任意的 $x\in[-1,+\infty)$，$(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0$.

因为 $a>0$，所以，任取 $x\in[-1,+\infty)$，$2x+b\geqslant 0$，即 $b\geqslant -2x$.

由 x 在$[-1,+\infty)$ 取值的任意性得 $b\geqslant 2$.

(2) 当$b<a$时，因为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间(b,a) 上单调性一致，所以对于任意的 $x\in(b,a)$，$f'(x)g'(x)\geqslant 0$，即对于任意的 $x\in(b,a)$，$(3x^2+a)(2x+b)\geqslant 0$.

因为 $b<a<0$，所以任取 $x\in(b,a)$，$2x+b<0$，故对于任意的 $x\in(b,a)$，$a\leqslant -3x^2$，

从而 $b < a \leqslant -3b^2$，于是 $-\frac{1}{3} < b < 0$，此时 $|a-b| = a-b \leqslant -3b^2 - b \leqslant \frac{1}{12}$.

当 $a < b \leqslant 0$ 时，因为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a, b) 上单调性一致，所以对于任意的 $x \in (a, b)$，$f'(x)g'(x) \geqslant 0$，即对于任意的 $x \in (a, b)$，$(3x^2+a)(2x+b) \geqslant 0$.

因为 $b \leqslant 0$，所以对于任意的 $x \in (a, b)$，$2x+b<0$，故对于任意的 $x \in (a, b)$，$a \leqslant -3x^2$，从而 $a \leqslant -3a^2$，解得 $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 0$.

又因为 $b \leqslant 0$，故 $|a-b| = b-a \leqslant \frac{1}{3}$，当且仅当 $a = -\frac{1}{3}$，$b=0$ 时取等号.

当 $a < 0 < b$ 时，因为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a, b) 上单调性一致，所以对于任意的 $x \in (a, b)$，$f'(x)g'(x) \geqslant 0$，即对于任意的 $x \in (a, b)$，$(2x+b)(3x^2+a) \geqslant 0$.

因为 $b>0$，故当 $x=0$ 时，$(3x^2+a)(2x+b) = ab < 0$，不符合题意.

综上可知，当 $a=-\frac{1}{3}$，$b=0$ 时，$|a-b|$ 取最大值，且最大值是 $\frac{1}{3}$.

【易错分析】 对 a、b 之间的大小关系进行分类讨论的分类标准不明确.

【即时巩固】

003′ 设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = e(x-1)+2$.

(1) 求 a，b 的值；

(2) 证明：$f(x) > 1$.

四、求函数的极值问题

极值点的导数一定为零，但导数为零的点不一定是极值点. 利用导数求函数极值的主要题型：(1)根据函数解析式求极值；(2)根据函数的极值求解参数问题. 解答时要注意准确利用导数求极值的原理进行求解.

004 已知函数 $f(x) = \frac{kx+1}{x^2+c}$（$c>0$，且 $c \neq 1$，$k \in \mathbf{R}$）恰有一个极大值点和一个极小值点，其中一个是 $x=-c$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的另一个极值点；

(2) 求函数 $f(x)$ 的极大值 M 和极小值 m，并求 $M-m \geqslant 1$ 时 k 的取值范围.

【命题意图】 以分式函数为背景，通过导数研究函数的极值，综合了函数、方程、不等式的

相关知识,考查分类讨论的思想.

【答题要旨】先求导函数 $f'(x)$,然后令 $f'(-c)=0$ 及一元二次方程根与系数的关系可解决第(1)小题;而解答第(2)小题须对 k 与 c 进行分类讨论.

【满分解答】

解 (1) $f'(x)=\dfrac{k(x^2+c)-2x(kx+1)}{(x^2+c)^2}=\dfrac{-kx^2-2x+ck}{(x^2+c)^2}$.

由题意知 $f'(-c)=0$,即得 $c^2k-2c-ck=0$.

因为 $c>0$,且 $c\neq 1$,所以 $k\neq 0$,且 $c=1+\dfrac{2}{k}$. (*)

由 $f'(x)=0$,得 $-kx^2-2x+ck=0$. 因此,由韦达定理知另一个极值点为 $x=1$.

(2) 由(*)式知 $c=1+\dfrac{2}{k}$.

当 $c>1$ 时,$k>0$;当 $0<c<1$ 时,$k<-2$.

① 当 $k>0$ 时,$c>1$,$f(x)$在$(-\infty,\ -c)$和$(1,\ +\infty)$内是减函数,在$(-c,\ 1)$内是增函数,所以

$$M=f(1)=\frac{k+1}{c+1}=\frac{k}{2}>0,\ m=f(-c)=\frac{-kc+1}{c^2+c}=\frac{-k^2}{2(k+2)}<0.$$

由 $M-m=\dfrac{k}{2}+\dfrac{k^2}{2(k+2)}\geqslant 1$ 及 $k>0$,解得 $k\geqslant\sqrt{2}$.

② 当 $k<-2$ 时,$0<c<1$,$f(x)$在$(-\infty,\ -c)$和$(1,\ +\infty)$内是增函数,在$(-c,\ 1)$内是减函数,所以

$$M=f(-c)=\frac{-k^2}{2(k+2)}>0,\ m=f(1)=\frac{k+1}{c+1}=\frac{k}{2}<0.$$

此时 $M-m=\dfrac{-k^2}{2(k+2)}-\dfrac{k}{2}=1-\dfrac{(k+1)^2+1}{k+2}\geqslant 1$ 恒成立.

综上可知,k 的取值范围为$(-\infty,\ -2)\cup[\sqrt{2},\ +\infty)$.

【易错分析】把握分式函数 $f(x)=\dfrac{kx+1}{x^2+c}$ ($c>0$ 且 $c\neq 1$)的图象随着 k 的变化而改变的情况.

【即时巩固】

004 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+m)$.

(1) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,求 m 的值并讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $m\leqslant 2$ 时,证明 $f(x)>0$.

五、求函数的最值问题

函数在闭区间上的最值是比较所有极值点与端点的函数值所得结果.另外求解函数的最值问题,还可以直接结合函数的单调性来求解.利用导数求解函数最值问题的主要题型:(1)根据函数的解析式求函数的最大值;(2)根据函数在一个区间上的最值情况求解参数问题.

005 已知函数 $f(x)=x^3+3|x-a|\ (a\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$在$[-1,1]$上的最大值和最小值分别记为 $M(a)$, $m(a)$,求 $M(a)-m(a)$;

(2) 设 $b\in\mathbf{R}$ 若$[f(x)+b]^2\leqslant 4$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立,求 $3a+b$ 的取值范围.

【命题意图】 利用导数研究函数的单调性、最值的求法.

【答题要旨】 第(1)小题利用导数判断函数的单调性,进而可求最大值与最小值,注意需对 a 的大小进行讨论;第(2)小题构造函数 $h(x)=f(x)+b$,原题转化为 $-2\leqslant h(x)\leqslant 2$ 在$[-1,1]$上恒成立,又转化为 $h(x)$的最值问题,利用导数可求.

【满分解答】

解 (1) 因为 $f(x)=\begin{cases}x^3+3x-3a, & x\geqslant a,\\ x^3-3x+3a, & x<a,\end{cases}$ 所以 $f'(x)=\begin{cases}3x^2+3, & x\geqslant a,\\ 3x^2-3, & x<a.\end{cases}$ 由于$-1\leqslant x\leqslant 1$,

① 当 $a\leqslant -1$ 时,有 $x\geqslant a$,故 $f(x)=x^3+3x-3a$,

此时 $f(x)$在$(-1,1)$上是增函数,因此 $M(a)=f(1)=4-3a$, $m(a)=f(-1)=-4-3a$, $M(a)-m(a)=4-3a-(-4-3a)=8$.

② 当 $-1<a<1$ 时,

若 $x\in(a,1)$, $f(x)=x^3+3x-3a$,在$(a,1)$上是增函数,

若 $x\in(-1,a)$, $f(x)=x^3-3x+3a$,在$(-1,a)$上是减函数,

所以 $M(a)=\max\{f(-1),f(1)\}$, $m(a)=f(a)=a^3$,由于 $f(1)-f(-1)=-6a+2$,

因此,当 $-1<a\leqslant\dfrac{1}{3}$ 时, $M(a)-m(a)=-a^3-3a+4$;当$\dfrac{1}{3}<a<1$ 时, $M(a)-m(a)=-a^3+3a+2$.

③ 当 $a\geqslant 1$ 时,有 $x\leqslant a$,故 $f(x)=x^3-3x+3a$,此时 $f(x)$ 在$(-1,1)$上是减函数,因此 $M(a)=f(-1)=2+3a$, $m(a)=f(1)=-2+3a$,故

$$M(a)-m(a)=2+3a-(2+3a)=4.$$

综上可知, $M(a)-m(a)=\begin{cases}8, & a\leqslant -1,\\ -a^3-3a+4, & -1<a\leqslant\dfrac{1}{3},\\ -a^3+3a+2, & \dfrac{1}{3}<a<1,\\ 4, & a\geqslant 1.\end{cases}$

(2) 令 $h(x)=f(x)+b$,

则 $h(x)=\begin{cases}x^3+3x-3a+b, & x\geqslant a,\\ x^3-3x+3a+b, & x<a,\end{cases}$ 于是 $h'(x)=\begin{cases}3x^2+3, & x\geqslant a,\\ 3x^2-3, & x<a.\end{cases}$

因为$[f(x)+b]^2\leqslant 4$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立,即 $-2\leqslant h(x)\leqslant 2$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立,

所以由(1)知,

① 当 $a\leqslant -1$ 时,$h(x)$在$(-1,1)$上是增函数,$h(x)$在$[-1,1]$上的最大值是 $h(1)=4-3a+b$,最小值是 $h(-1)=-4-3a+b$,则 $-4-3a+b\geqslant -2$ 且 $4-3a+b\leqslant 2$,矛盾.

② 当 $-1<a\leqslant \dfrac{1}{3}$ 时,$h(x)$在$[-1,1]$上的最大值是 $h(1)=4-3a+b$,最小值是 $h(a)=a^3+b$,所以 $a^3+b\geqslant -2$ 且 $4-3a+b\leqslant 2$,从而 $-2-a^3+3a\leqslant 3a+b\leqslant 6a-2$ 且 $0\leqslant a\leqslant \dfrac{1}{3}$.令 $t(a)=-2-a^3+3a$,则 $t'(a)=3-3a^2>0$,$t(a)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$上是增函数,故 $t(a)\geqslant t(0)=-2$,因此 $-2\leqslant 3a+b\leqslant 0$.

③ 当 $\dfrac{1}{3}<a<1$ 时,$h(x)$ 在$[-1,1]$上的最大值是 $h(-1)=3a+b+2$,最小值是 $h(a)=a^3+b$,所以 $a^3+b\geqslant -2$ 且 $3a+b+2\leqslant 2$,解得 $-\dfrac{28}{27}\leqslant 3a+b\leqslant 0$.

④ 当 $a\geqslant 1$ 时,$h(x)$ 在$[-1,1]$上的最大值是 $h(-1)=3a+b+2$,最小值是 $h(1)=-2+3a+b$,所以 $3a+b+2\leqslant 2$ 且 $-2+3a+b\geqslant -2$,解得 $3a+b=0$.

综上,$3a+b$ 的取值范围$[-2,0]$.

【易错分析】利用图象把握对参数 a 的分类讨论标准.

【即时巩固】

005′ 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2$.

(1) 求 $f(x)$的解析式及单调区间;

(2) 若 $f(x)\geqslant \dfrac{1}{2}x^2+ax+b$,求$(a+1)b$ 的最大值.

六、求解某些简单的实际问题

此类试题主要是利用函数、不等式与导数相结合设计实际应用问题,旨在考查考生在数学应用方面阅读、理解陈述的材料,能综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力,这是高考中的一个热点.

006 水库的蓄水量随时间而变化,现用 t 表示时间,以月为单位,年初为起点,以 $i-1<t\leqslant i$ 表示第 i 月份 $(i=1,2,\cdots,12)$. 根据历年数据,某水库的蓄水量(单位:亿立方米)关于 t 的近似函数关系式为