

智能教育丛书

文科

# 智能数学高考特训教程

(问中学与例中学)

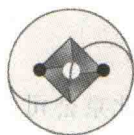
齐智华 齐新 / 著

智能数学



挑战高考

世界图书出版公司



智能教育丛书

文科

# 智能数学高考特训教程

(问中学与例中学)

齐智华 齐新/著

## 智能数学一二三

一个中心:数学思想方法

两个基本点:

1. 基础知识傻瓜化
2. 解题方法明确化

三步学:学会自我总结,摧毁题海战术

- S1 问中学(总结基础秘诀与数学方法)
- S2 例中学(范例评注)
- S3 做中学与用中学(自我检测)

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

智能数学高考特训教程. 文科 / 齐智华, 齐新著. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2013.8(2014.8 重印)

(智能教育丛书)

ISBN 978-7-5100-6855-3

I. ①智… II. ①齐… ②齐… III. ①中学数学课—高中—升学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 197580 号

智能教育丛书·智能数学高考特训教程(文科)

著 者: 齐智华 齐 新

责任编辑: 夏 丹 翟 蕾

装帧设计: 中公教育图书设计中心

出 版: 世界图书出版公司北京公司

出 版 人: 张跃明

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(地址: 北京朝内大街 137 号 邮编: 100010 电话: 64077922)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 三河市海新印务有限公司

开 本: 787 mm×1092 mm 1/16

印 张: 13.5

字 数: 208 千

版 次: 2013 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5100-6855-3

定 价: 38.00 元

版权所有 翻印必究

# 前言

## PREFACE

读懂并研究下列各问：

### 问1 什么是智能数学？智能数学的新思想新方法是什么？

解 从国家的领袖，直到广大的学生家长，在教育与学习的领域中最憎恨的是什么？最憎恨的就是中小学的题海战术！这是国家发展中的大问题，它捆绑着中国人追赶并超越先进世界的脚步。这也是现代素质教育的最大问题，是压在青少年头上的一座大山。究其根源，是传统数学造成的！

传统数学(美国人称为“机械数学”)是以“基础知识加题海”为中心的三步学习：

S1 死记硬背 (机械记忆)

S2 照猫画虎 (机械模仿)

S3 题海战术 (机械练习)

时至今日的新社会 (信息社会)，我国仍有很多学校，更有很多重点高中和课外辅导机构，他们留恋传统数学，热衷于操作这种落后于时代的老办法，题海战术愈炒愈烈，致使风华正茂的少年天天演解无数的烂题和没有实际价值的人造难题，沉溺题海，成绩低下，苦不堪言。对此严重危害我国向前发展的考试逆流，我们就针锋相对，就创立适合新社会的新数学——智能数学。那么，什么是智能数学？

智能数学是以“数学思想方法”为中心的三步学习：

S1 提出问题

S2 探究解题

S3 自我总结，摧毁题海战术

智能数学对传统数学的主要变革是：第一，转变学习的中心；第二，抓住学习的基本点；第三，改造学习方法，摧毁题海战术。我们将智能数学这三个方面的新思想新方法概括为：

### 智能数学一二三

一个中心：以数学思想方法为中心开发解题智慧

两个基本点：

1. 总结基础秘诀,使基础知识系统化,傻瓜化(简称“基础知识傻瓜化”)
2. 总结解题技术,使数学方法系统化,明确化(简称“解题方法明确化”)

三步学:学会自我总结——摧毁题海战术

S1 问中学(总结基础秘诀与数学方法)

S2 例中学(范例评注)

S3 做中学与用中学(自我检测)

智能数学的新理念就是国际上最大研究课题“问题解决”的新思想,新方法,这是对传统数学在思维领域中的一场深刻革命.本书将智能数学的新思想,新方法应用于高考,使你茅塞顿开,高考解题发生天翻地覆的变化,数学成绩飞速提高.随之,你也就快乐起来,聪明起来,整个身心洋溢着大智慧!

● 请注意:“智能数学”不是新的数学学科,而是数学教育与数学学习的新概念新思想新方法,为了便于传播,我们简称为“智能数学”,它是针对旧数学教育(“传统数学”)的变革而命名的.

### 问2 怎样领悟智能数学关于学习的四个关键词?

解 智能数学强调关于学习的四个关键词是

1. 智能数学的学习中心是“数学思想方法”:普遍认为高考问题解决的中心是数学能力.但在我看来,能力说法有两个弊端:第一,能力过于抽象,难以操作;第二,能力的种种说法是学究式的行话赘语,留于表层,只是空喊口号而已.因为数学能力的中心是数学思想方法,所以“以能力为中心”改为“以思想方法为中心”不仅人人明白,并且可以深入操作,所以本书认为高考问题解决的中心是数学思想方法,而不要空喊能力为中心的口号了!

我们将旧数学的“以基础知识为中心”转变为“以数学思想方法为中心”.这里,又特别注意:智能数学强调“数学思想方法为中心”,并不是不要基础知识,而是对基础知识的要求更强更透更高!我们要盖一座世界上最高的智能摩天大厦,你想,它对基础的要求会是怎样?

2. 基础知识傻瓜化:“傻瓜化”是人类文化与现代科技发展的新的里程碑!傻瓜化不是空喊口号,更不是“真傻”,而是“智能傻瓜”.达到傻瓜化是艰难的,需要努力研究和用力气总结.

傻瓜化有两个层面:

(1) 大众傻瓜:连傻子都会用的快捷方式,想错都难,就像傻瓜相机一样.其实中国人很早就搞傻瓜化,如小学的“九九表”,大学的“积分表”等等.科学家在发明一项专利技术之后,为了大众共享,扩大市场,首要任务就是把他的技术傻瓜化,他才能创造财富,对人类

作出更大的贡献。

(2) 创造傻瓜:这是傻瓜化的高级模式. 高等数学的最大特征就是傻瓜化,程式化. 谁都想成为发明家,但发明家只有少数人,而且这一技术的发明家却是另一技术的傻瓜. 在高考数学中,每个同学都要学会自我总结基础秘诀,发明“傻瓜”. 这也是人生尝试发明的乐趣和良机. 本书帮你建构一套少而精、最好用的傻瓜公式和傻瓜法则,请你特别注意将这些“傻瓜”宝贝收入囊中,它们是高速解题的法宝,是发明新思想新方法的基础.

### 3. 解题方法明确化:

普遍认为“数学思想只能是渗透”,与此相反,本书并不认同“数学思想渗透式”,主张数学思想方法明确化和系统化(当然是相对的和开放的). 我们不能模模糊糊地解题,应使解题方法明确化. 为此,本书特别给出高中与大学基础阶段的“六种数学思想方法表”. 这张表是“解题小词典”,是高考复习的中心和突破高分的法宝. 请同学们结合各章节的问题解决,刻苦地研究,领悟和总结. 达到解题方法明确化是艰难的,就开发大脑而言,必须经历两个认识发展过程:第一过程是由“小巧”到“中巧”,再到“大巧”;达到“大巧”境界之人就会反过来进入第二过程,运用“大巧”(比较全面的掌握了各种数学思想方法)以不变应万变,无招胜有招,高速而轻巧地解决问题.(见数学家张景中之论:小巧一题一法,中巧一法解决一类问题,大巧法无定法)

### 4. 自我总结是摧毁题海战术的法宝.

“题海战术”是高考复习的大敌,无数考生淹没在题海中. 当代世界著名的问题解决专家舍费尔德(A. Schoenfeld)教授说:

我希望教给学生 25 个问题,学生就会解决 500 个问题;

不希望教给学生 500 个问题,学生却解不出 25 个问题!

“反对题海战术,快乐高考”是本书的主要特征与乐趣,我们与人挑战的是“看谁解题少,又要成绩好!”. 智能数学深刻地揭露了“摧毁题海战术的法宝是自我总结”. 于是本书精选范例,每一问题,每一例题,每一章节都要自我总结. 学过本书之后,你将进一步领悟到:人的一生,总得不断地总结经验,有所发现,有所发明,有所创造,有所前进. 自我总结是人生走向成功的法宝,是人类进步的阶梯! 为什么每天半夜 12 点还做不完作业呢? 就是因为没有学会自我总结,无法解决老师发来的题海.

## 问 3 最好的学习方法是什么? 怎样学习本书?

解 最好的学习方法就是智能数学的“三步学”:

第一步问中学:总结基础秘诀和解题方法;

第二步例中学:范例评注;

第三步做中学与用中学:自我检测与自我总结. 自我总结什么呢? 总结三点:(1)基础傻瓜化了吗?(2)解题方法明确化了吗?(3)有没有新发现,新结论,新方法?

这个“三步学”不但是学习数学的最好方法,也是学习各门学科的最好方法. 请同学们试试看,应用“三步学”去学习物理,化学等其他学科吧!

下面说说怎样应用“三步学”学习本书?

本书《智能数学高考特训教程》分为正本和副本两册.

正本是“问中学与例中学”:作者站在老师的地位上,向你讲授高考两个基本点:(1)基础傻瓜化;(2)解题方法明确化.在每章之首都写明该章的高考基本点和学习中心,这就是本章的最高学习目标.“问中学”和“例中学”以老师为主导,但读者要夺取主动权,即自我独立作答问1,问2,……,自我独立作答例1,例2,……,然后对照和研究本书的解答和讲解.(独立思考的小技巧:读书前做一个20 cm×10 cm的硬纸卡,读书时先用硬纸卡盖上书上的解答,自我充分作答后再看解答)

副本是“做中学与用中学”,书名叫《自我检测问题集》.正本和副本必须同步配套学习.副本,读者是主角了.读者要同步地独立地像考试一样地完成检测,然后对照副本的答案和讲解,进行自我评注与总结,使每一节的学习都达到“基础傻瓜化”“解题方法明确化”!

欢迎同学们跨进智能数学的新世界,打开我的书,我就把你带入智能数学的乐园.在这里,没有滥题,没有题海,没有忧愁,没有绝望.有的是精题范例,有的是傻瓜宝贝,有的是精良的数学思想方法和高端的解题技术.让我们充满快乐,充满信心,共同创造人间的数学奇迹!

我们的解题口号是:

推理最高! 解决最快! 表述最简!

本书为中国梦而写,希望中国青年:

人人学习智能数学,奋力征服新世界,为复兴中华而奋斗.

齐智华 齐 新 2013年6月

## 高考新题解法示例

前言各问务必读懂,最好加以研究.下面用高考范例加以评注,你就会深入地领悟前言了.高考复习的硬道理是快速提分.智能数学提分的法宝是两个基本点:“基础知识傻瓜化”和“解题方法明确化”.下面选解高考最新真题,深度地说明这两个基本点在高考解题中的决定性作用.

**例 1** (新课标全国 II 文.小轴题) 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ ,  $a_8=2$ , 则  $a_1 =$  \_\_\_\_\_.

**解** (周期性/秒杀) 按递推式  $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$  计算:  $a_8=2$ ,  $a_9=-1$ ,  $a_{10}=\frac{1}{2}$ ,  $a_{11}=2$ , 以下以 3 为周期循环, 故答  $a_1=a_{10}=\frac{1}{2}$ .

**评注** 该题出在本书之中, 见本书《自我检测问题集》[检测 6.2]第 2 题.

**例 2** (全国文.小轴题) 奇函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 若  $f(x+2)$  为偶函数, 且  $f(1)=1$ , 则  $f(8)+f(9)=$

- A. -2                      B. -1                      C. 0                      D. 1

**解** (类比猜想 / 秒杀) 由奇函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 得  $f(0)=0$ , 即知函数  $f(x)$  有对称中心  $(0, 0)$ ; 由  $f(x+2)$  为偶函数  $\Rightarrow f(-x+2)=f(x+2)$ , 即知  $f(x)$  又有对称轴  $x=2$ . 类比正弦函数知  $f(x)$  是周期函数, 周期  $T=4(2-0)=8$ . 所以  $f(8)+f(9)=f(0)+f(1)=0+1=1$ , 故选 D.

**评注** 见本书 1.4 节问 4 类比推理.

**例 3** (浙江文.小轴题) 设  $a>0$ ,  $b>0$ ,  $e$  是自然对数的底数

- A. 若  $e^a+2a=e^b+3b$ , 则  $a>b$                       B. 若  $e^a+2a=e^b+3b$ , 则  $a<b$   
C. 若  $e^a-2a=e^b-3b$ , 则  $a>b$                       D. 若  $e^a-2a=e^b-3b$ , 则  $a<b$

**解** (构造函数 / 秒杀) 由  $e^a+2a=e^b+3b (b>0) \Rightarrow e^a+2a>e^b+2b$ , 构造函数  $f(x)=e^x+2x$ , 因为  $f'(x)=e^x+2>0$ , 所以函数  $f(x)=e^x+2x$ , 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 由  $f(a)>f(b) \Rightarrow a>b$  成立. 故选 A. (因为高考选择题是单选题, 只有唯一选项正确, 所以本题已秒杀完毕)

作为深入学习, 我们讲解其余选项的排除: 选项 B 与 A 相悖, 由 A 正确推出 B 不正确.

对于选项 C 和 D, 构造函数  $g(x)=e^x-2x$ , 因为  $f'(x)=e^x-2$  可正可负, 所以函数  $f'(x)=e^x-2x$  在  $(0, +\infty)$  上不单调, 故选项 C 和 D 都不正确.

**例 4** (新课标全国 I 文·小轴题) 已知函数  $f(x)=ax^3-3x^2+1$ , 若  $f(x)$  存在唯一的零点  $x_0$ , 且  $x_0>0$ , 则  $a$  的取值范围是

- A.  $(2, +\infty)$       B.  $(1, +\infty)$       C.  $(-\infty, -2)$       D.  $(-\infty, -1)$

**解法 1 (检验特值)** (1) 检验  $a=-2$ , 则  $f(x)=-2x^3-3x^2+1$ . 由  $f(-1)=0$  知  $f(x)$  有零点  $-1$ , 所以  $a \neq -2$ , 故排除 D.

(2) 检验  $a=3$ , 则  $f(x)=3x^3-3x^2+1$ . 由  $f(-1) \times f(0)=(-5) \times 1 < 0$  知  $f(x)$  在区间  $(-1, 0)$  内有零点, 所以  $a \neq 3$ , 故排除 A 和 B. 由 (1) 和 (2) 故选 C.

**评注** 解法 1 叫特殊化猜想——检验特值, 要注意根据选项选取恰当的特值, 可 1 分钟解完.

**解法 2 (零点个数判别法——极值点法)** 显然  $a \neq 0$ , 否则  $f(x)$  有两个零点, 不合题意.

由  $f'(x)=3ax^2-6x=3ax(x-\frac{2}{a})$ , 知  $f(x)$  有两个极值点  $x_1=0, x_2=\frac{2}{a}$ , 所以  $f(x)$  有唯一零点  $\Rightarrow f(0) \times f(\frac{2}{a}) > 0 \Rightarrow a > 2$  或  $a < -2$ .

由图可知  $a > 2$  时,  $f(x)$  的零点为负, 故舍去;  $a < -2$  是解, 故选 C.

**评注** 解法 2 要求考生的基础知识达到高度的傻瓜化. 本书在“4.2 导数的应用/问 4”中将三次函数的图象和性质傻瓜化. 用此傻瓜解答本题易如反掌, 可 1 分钟解完. 由此解法可见: 本题出的相当的好, 把三次函数的图象和性质考得深透而美妙, 区分度很大: 高手可以秒杀, 低者难以得分.

本题解到这里, 完全可以住手, 但我解题还要追求最高最好, 所以再给出两个解法, 使你领悟“解题方法明确化”是发现解题思路和快速解题的法宝.

**解法 3 (反解法——两函数图解法)**

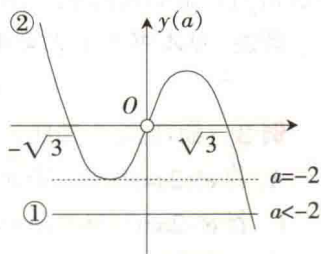
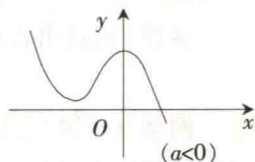
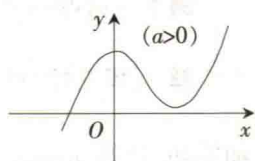
$$ax^3-3x^2+1=0 \Leftrightarrow a=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3},$$

令  $t=\frac{1}{x} \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 则

$$a=3t-t^3 \Leftrightarrow \begin{cases} y=a, \\ y=g(t)=3t-t^3. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{---①} \\ \text{---②} \end{matrix}$$

$g'(t)=3-3t^2=-3(t+1)(t-1)$ , 所以  $g(t)_{\text{极小}}=g(-1)=-2$ .

画出动直线①与三次曲线  $y=g(t)=-t(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$  (零点式) 的图象②, 如图. 由图可知, 当  $a \in (-\infty, -2)$  时, 方程  $a=g(t)$  有唯一的正零点, 故选 C.



## 解法 4 (两函数图解法)

$$\text{方程 } ax^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 - ax = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - ax, & \text{---①} \\ y = \frac{1}{x^2}. & \text{---②} \end{cases}$$

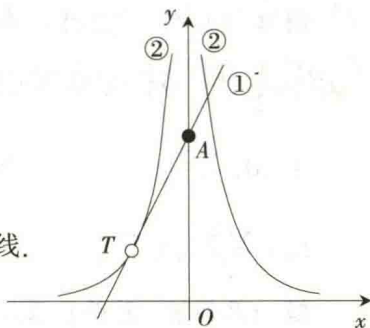
作直线①和曲线②如图, 直线①是过定点  $A(0, 3)$  的动直线.

设直线①和曲线②相切于点  $T(t, \frac{1}{t^2})$ ,  $t < 0$

$$\text{函数 } y = \frac{1}{x^2} \text{ 的导数为 } y' = -\frac{2}{x^3}, \text{ 于是切点 } T \text{ 满足 } \begin{cases} -\frac{2}{t^3} = -a, \\ \frac{1}{t^2} = 3 - at \quad (t < 0) \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} t = -1, \\ a = -2. \end{cases}$$

由图可知, 直线①绕定点  $A(0, 3)$  从切线开始逆时针旋转, 即得两曲线有唯一交点  $(x_0, y_0)$  ( $x_0 > 0$ )  $\Leftrightarrow -a > 2 \Leftrightarrow a < -2$ , 故选 C.



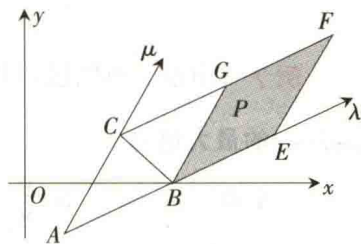
**例 5** (北京文小轴题) 向量  $A(1, -1), B(3, 0), C(2, 1)$ , 若平面区域  $D$  由所有满足  $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$  ( $1 \leq \lambda \leq 2, 0 \leq \mu \leq 1$ ) 的点  $P$  组成, 则  $D$  的面积为\_\_\_\_\_.

**解** (广义坐标系——基底法)

取基底  $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ , 建立斜坐标系  $A-\lambda\mu$ , 则

点  $P$  的区域  $D$  显然是  $\square BEFG$ ,

$$D \text{ 的面积为 } S_D = 2S_{\triangle ABC} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3. \text{ 答}$$



**评注** 本题是小轴题, 难题. 特别注意:

(1) 解法明确为基底法, 解题时间  $t < 1$  分钟,

甚至秒杀! 本题的傻解是用直角坐标法: 多数考生都是用  $\lambda, \mu$ , 表示点  $P(x, y)$  的坐标, 再解出  $\lambda, \mu$ , 代入  $1 \leq \lambda \leq 2, 0 \leq \mu \leq 1$  中, 获得点  $P$  的可行域  $D$  的线性约束, 再计算  $D$  的面积. 这种线性规划解法的工作量是上述解法的 5 倍, 真是又傻又慢!

(2) 计算  $S_{\triangle ABC}$  的行列式公式, 意在指引解题高等化. 如果你不会行列式, 就用下法, 也很快:

$$\cos A = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2 \times 1 + 1 \times 2}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{5},$$

$$\therefore 2S_{\triangle ABC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin A = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = 3.$$

**例 6** (重庆小轴题) 在平面上,  $\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{AB_2}$ ,  $|\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OB_2}| = 1$ ,  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_2}$ . 若  $|\overrightarrow{OP}| < \frac{1}{2}$ , 则  $|\overrightarrow{OA}|$  的取值范围是

A.  $(0, \frac{\sqrt{5}}{2}]$

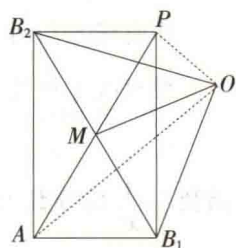
B.  $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}]$

C.  $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2}]$

D.  $(\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{2}]$

**解** (几何法/秒杀) 重庆的小轴题竟能秒杀? 却看解法:

由已知推出  $AB_1PB_2$  是矩形, 其对角线相交于  $M$ , 由  $M$  是两条对角线的中点及“平行四边形等式”推出



$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 &= \frac{1}{2} [(2|\overrightarrow{OM}|)^2 + |\overrightarrow{AP}|^2] = \frac{1}{2} [(2|\overrightarrow{OM}|)^2 + |\overrightarrow{B_1B_2}|^2] \\ &= |\overrightarrow{OB_1}|^2 + |\overrightarrow{OB_2}|^2 = 2, \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OA}|^2 = 2 - |\overrightarrow{OP}|^2 \in (\frac{7}{4}, 2] \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| \in (\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{2}]. \text{ 故选 D.}$$

**评注** 你知道“平行四边形等式”吗? 这就是基础傻瓜化问题. 你若没有傻瓜化, 解题想快似比登天! **平行四边形等式**: 平行四边形两条对角线的平方和等于四边平方和.

很多高手解答本题几乎都用坐标法, 很麻烦, 很慢. 本解法是精明几何演绎, 出神入画. 这个解题故事告诉我们, 遇到几何问题必须首先想好: 是用坐标法, 还是几何法? 并非总是坐标法好, 数形结合才是最好.

**例 7** (山东文小轴题) 设正实数  $x, y, z$  满足  $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$ , 则当  $\frac{z}{xy}$  取得最大值时,  $x + 2y - z$  的最大值为

A. 0

B.  $\frac{9}{8}$

C. 2

D.  $\frac{9}{4}$

**解** (对称猜想) 条件  $x^2 - \frac{3}{2}x(2y) + (2y)^2 - z = 0$ ,  $\frac{z}{xy} = \frac{2z}{x(2y)}$  和目标  $u = x + (2y) - z$ , 它们都是关于正实数  $x$  和  $2y$  的轮换对称式, 猜想  $x = 2y$  时目标取得最值, 此时

$$z = (2y)^2 - 3(2y)y + 4y^2 = 2y^2,$$

则当  $(\frac{z}{xy})_{\max} = \frac{2y^2}{(2y)y} = 1$  时, 目标  $u = 2y + 2y - 2y^2 = 2y(2 - y) \leq 2$  ( $y = 1$  时取得最值). 故选 C.

**评注** 本书 1.4 节例 4 将此题型的解法明确为“特殊化猜想——考察极端”: 当多个正变量轮换对称时, 则当它们相等时目标函数取得最值. 这是均值不等式的极端情形, 故称考察极端. 解题时间  $t < 1$  分钟, 甚至秒杀! 本题型属于小轴题难题, 近年各省试题雷同出现, 多数考生不会猜想, 都用演绎慢法, 解题时间  $t > 4$  分钟, 还会出错.

**例 8** (重庆文小轴题) 设双曲线  $C$  的中心为点  $O$ , 若有且只有一对相交于点  $O$  所成的角为  $60^\circ$  的直线  $A_1B_1$  和  $A_2B_2$ , 使  $|A_1B_1| = |A_2B_2|$ , 其中  $A_1, B_1$  和  $A_2, B_2$  分别是这对直线与双曲线  $C$  的交点, 则该双曲线的离心率的取值范围是

A.  $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2]$

B.  $[\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$

C.  $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

D.  $[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

**解** (离心率的三角公式)

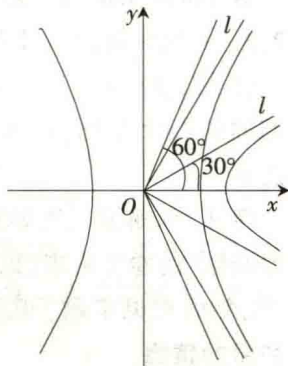
设渐近线的倾斜角为  $\alpha$  (锐角), 则离心率  $e = \frac{1}{\cos \alpha}$ .

所求离心率  $e$  的取值的充要条件是

$$30^\circ < \alpha \leq 60^\circ \Leftrightarrow \frac{1}{\cos 30^\circ} < e \leq \frac{1}{\cos 60^\circ} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} < e \leq 2.$$

故选 A.

**评注** 这是小轴题, 难题. 本书在 10.2 节的圆锥曲线性质表 (“三特”傻瓜表) 中总结了离心率的三角公式, 应用该公式解决本题就很容易了. 这就是基础傻瓜化问题, 一般书籍没有讲解.



**例 9** (课标全国 II 小轴题) 已知点  $A(-1, 0), B(1, 0), C(0, 1)$ , 直线  $y = ax + b$  ( $a > 0$ ) 将  $\triangle ABC$  分割为面积相等的两部分, 则  $b$  的取值范围是

A.  $(0, 1)$

B.  $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$

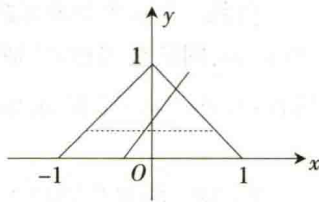
C.  $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3}]$

D.  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

**解** (齐新猜想——考察极端 / 秒杀) 截距  $b$  的取值由参数  $a \in (0, +\infty)$  确定.

如图, 当  $a$  取值由  $0 (a \neq 0)$  到  $a \rightarrow +\infty$  时,  $b$  取值的变化, 可知  $b$  的取值范围是开区间 (左右双开), 所以排除选项 C, D;

当  $a=0$  时, 存在截距  $b_0 \in (0, 1)$ , 使  $\forall b > b_0$ , 所以又排除 A, 故选 B.



**评注** 这道小轴题很厉害! 命题者独具匠心, 但露出破绽——区间的开闭. 针此, 考察极端, 即考察区间的端点是开还是闭, 猜而不算, 迎刃秒杀! 这是大智慧直觉猜想. 本书把数学猜想 (合情推理) 明确为五大猜想 (见 1.4 节), 学会后可以轻取本题.

**例 10** (课标全国 I. 小轴题) 设  $\Delta A_n B_n C_n$  的三边长分别为  $a_n, b_n, c_n$ ,  $\Delta A_n B_n C_n$  的面积为  $S_n, n=1, 2, 3, \dots$  若  $b_1 > c_1, b_1 + c_1 = 2a_1, a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}, c_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2}$ , 则

- A.  $\{S_n\}$  为递减数列
- B.  $\{S_n\}$  为递增数列
- C.  $\{S_{2n-1}\}$  为递增数列,  $\{S_{2n}\}$  为递减数列
- D.  $\{S_{2n-1}\}$  为递减数列,  $\{S_{2n}\}$  为递增数列

**解 (特殊化猜想 / 秒杀)** 不妨令  $a_1 = 5, b_1 = 7, c_1 = 3, \Delta A_n B_n C_n$  的三边长记为  $(a_n, b_n, c_n), n=1, 2, 3, \dots$ , 则由递推式计算各三角形的三边长, 依次为

$(5, 7, 3), (5, 4, 6), (5, 5.5, 4.5), (5, 4.75, 5.25), \dots$

它们的周长皆为 15, 且  $\Delta A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$  比  $\Delta A_n B_n C_n$  更接近正三角形, 根据等周原理猜想  $S_n < S_{n+1}$ , 故选 B.

**评注** 该解法是奇妙猜想, 是本题的最快解法. 本题是 2006 年高考题“5 根木棒围成三角形问题”的卷土重来 (见本书 1.3 节例 7). 当年齐新给出“等周猜想”的秒杀解法, 轰动北京. 七年后再见本题, 凡深悟齐新解法者均可七步答 B. 这就是高端解题方法——精明演绎和奇妙猜想.

**例 11** (浙江文. 16) 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 若  $x \geq 0$  时恒有  $0 \leq x^4 - x^3 + ax + b \leq (x^2 - 1)^2$ , 则  $ab$  等于\_\_\_\_\_.

**解 (猜必要 / 夹逼 / 秒杀)**

令  $f(x) = x^4 - x^3 + ax + b, x \in [0, +\infty)$ .

$\forall x \in [0, +\infty), 0 \leq f(x) \leq (x^2 - 1)^2$ . 令  $x=1$ , 夹逼得  $f(1)=0 \Rightarrow f(x)|_{\text{极小值}} = f(1) \Rightarrow f'(1)=0$ .

由  $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ (4x^3-3x^2+a)|_{x=1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=-1 \end{cases} \Rightarrow ab=-1$ . 答

**评注** 为求两个未知数  $a, b$ , 需猜测两个必要条件. 用“夹逼法”猜出  $f(x)$  的两个性质:  $f(1)=0, f'(1)=0$ , 问题迎刃秒杀! 请你回答: 为什么  $f(1)=f(x)|_{\text{极小值}} \Rightarrow f(1)=f(x)|_{\text{极小值}}$ ? (回答是: 连续函数  $f(x)=x^4-x^3+ax+b$  的非端点的最值点必是极值点.)

**例 12** (湖北小轴题) 已知  $a$  为常数, 函数  $f(x)=x(\ln x - ax)$  有两个极值点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 则

- A.  $f(x_1) > 0, f(x_2) > -\frac{1}{2}$
- B.  $f(x_1) < 0, f(x_2) < -\frac{1}{2}$
- C.  $f(x_1) > 0, f(x_2) < -\frac{1}{2}$
- D.  $f(x_1) < 0, f(x_2) > -\frac{1}{2}$

解  $f(x)=x(\ln x-ax), x>0$

$$f'(x)=(\ln x)-(2ax-1),$$

$$\therefore f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=2ax-1. \quad \text{---①}$$

由题意知方程①有二根  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 所以曲线  $W: y=\ln x$  与直线  $l: y=2ax-1$  应有两个交点, 如图.

将  $l$  绕定点  $B(0,1)$  逆时针旋转, 使  $l$  与  $W$  相切, 这时, 切点为  $A(0,1), a=\frac{1}{2}$ . 由图  $\Rightarrow 0 < x_1 < 1 < x_2$ .

再由图, 当  $x \in (x_1, x_2)$  时, 曲线  $W$  在直线  $l$  的上方, 所以  $f'(x)=(\ln x)-(2ax-1) > 0$ ,

于是,  $f(x_1) < f(1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < -\frac{1}{2} < f(x_2)$ , 故选 D.

**评注** 这是导数难题之最, 难在极值点  $x_1, x_2$  无法求出. 本题的最佳解法是图解法——两曲线位置关系法. 本题改成大题, 也是很有水平, 难度较大的压轴题. 我赞赏很多省市最后压轴题考查导数的应用, 而不考哪些没有实用价值的人造难题. 导数的应用是最有价值的数学, 英国人说得好, 他说: 21 世纪的文盲是不懂微积分. 请研究本书 4.2 节的例 8, 例 9 及本题.

**例 13** (辽宁小轴题) 为了考察某校各班参加课外书法小组的人数, 在全校随机抽取 5 个班级, 把每个班级参加该小组的人数作为样本数据. 已知样本平均数为 7, 样本方差为 4, 且样本数据互不相同, 则样本数据中的最大值为 \_\_\_\_\_.

**探路** 设 5 个数据及其大小为  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5, a_i \in \mathbf{N}$ , 则

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=35, \\ (a_1-7)^2+(a_2-7)^2+(a_3-7)^2+(a_4-7)^2+(a_5-7)^2=20. \end{cases}$$

令  $a_i-7=x_i, i=1, 2, 3, 4, 5$ , 则

所求问题化为: 求  $x_5$  的最大值, 约束条件是

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=20. \end{cases} \text{ 且 } x_i \neq x_j (i \neq j), x_i \in \mathbf{Z}.$$

**解法 1** (华罗庚猜想 / 秒杀) 5 维球与 5 维平面相交, 其  $x_5$  的最大值当  $x_1=x_2=x_3=x_4$  时取得, 于是  $\begin{cases} 4x_1+x_5=0, \\ 4x_1^2+x_5^2=20. \end{cases} \Rightarrow x_5 \leq 4$ , 但数据  $x_i$  互不相同, 且  $x_5 \in \mathbf{Z} \Rightarrow x_5 \leq 3 \Rightarrow a_5 \leq 3+7=10$ . 答

**评注** 当我第一眼看到本题时, 立刻想起华罗庚老师解答美国数学竞赛题的方法: 华老师把“5 维球与 5 维平面相交”类比于“3 维空间的球与平面相交”, 几秒内神奇地猜出结果. 而今我就用华罗庚猜想将本题秒杀! 这个“华罗庚猜想”包括两个要点: 第一是数形结合, 代数问题几何化; 第二是类比猜想, 高维类比低维. 本例精彩地表明: 猜证结合与数形结合是各种数学思想方法之首, 是本书提倡的数学学习中心的中心.

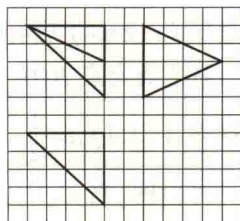
**解法 2** (大众解法: 方程的整数解) 设 5 个数据及其大小为  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5, a_i \in \mathbf{N}$ , 则

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=35, \\ (a_1-7)^2+(a_2-7)^2+(a_3-7)^2+(a_4-7)^2+(a_5-7)^2=20. \end{cases}$$

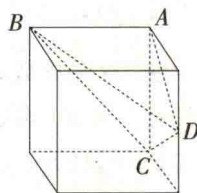
检验方程  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 20$  的整数解：由整数平方的个位数特征，只有  $(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 3^2 = 20$ ，  
所以  $a_5 = 3 + 7 = 10$ 。故答样本数据中的最大值为 10。

**例 14** (新课标全国 I 小轴题) 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为

- A. B. 6  
C. D. 4



**解 (辅助体法)** 这是不规则的多面体的三视图问题，很难，因而成为小轴题。观察三个视图分别在三个正方形之中，所以用棱长为 4 的正方体作为辅助体。先画正方体，再用三视图的规则画出多面体的直观图：三棱锥  $A-BCD$ ，如图。最长的棱为  $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + (4^2 + 2^2)} = 6$ 。故选 B。



**评注** (1) 把考查“立体化归”(三视图)作为小轴题是正确的命题走向。辅助体法是立体化归的高级方法，务必深度领悟。见本书 9.3 节的例 2，例 5，例 6。

(2) 用网格纸画三视图是工程师画图的好方法，省略了繁杂的尺寸线。

**例 15** (辽宁小轴题) 对于  $c > 0$ ，当非零实数  $a, b$  满足  $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$ ，且使  $|2a + b|$  最大时， $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$  的最小值为\_\_\_\_\_。

**解法 1 (柯西不等式)** 由已知得  $\frac{c}{4} = a^2 - \frac{1}{2}ab + b^2 = (a - \frac{b}{4})^2 + (\frac{\sqrt{15}}{4}b)^2$ ，为应用柯西不等式求  $|2a + b|$  取得最大的条件，取向量  $(a - \frac{b}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}b)$  和  $(x, y)$ ，设此二向量的数量积为

$$(a - \frac{b}{4})x + \frac{\sqrt{15}}{4}by = 2a + b, \text{ 解得 } (x, y) = (2, \frac{6}{\sqrt{15}}). \text{ 于是由柯西不等式得}$$

$$[(a - \frac{b}{4})^2 + (\frac{\sqrt{15}}{4}b)^2][2^2 + (\frac{6}{\sqrt{15}})^2] \geq [(a - \frac{b}{4}) \times 2 + (\frac{\sqrt{15}}{4}b)(\frac{6}{\sqrt{15}})]^2 = (2a + b)^2,$$

$$\text{故当 } |2a + b| \text{ 最大时，有 } \frac{a - \frac{b}{4}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}b}{\frac{6}{\sqrt{15}}}, \text{ 即得 } a = 1.5b, c = 10b^2.$$

所以  $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c} = \frac{3}{1.5b} - \frac{4}{b} + \frac{5}{10b^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{b} - 2)^2 - 2$ ，故当  $b = \frac{1}{2}$  时， $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$  的最小值为 -2。

**评注** 本题是 2014 年各省高考题的最难小轴题，但用构造向量的方法很易突破，由此可见用向量的数量积掌握柯西不等式是最好记最好用的方法。

**解法 2 (构造方程与构造函数: 以  $b$  为基本量)** 设  $2a+b=t$ , 则  $2a=t-b$ .

由已知  $4a^2-2ab+4b^2-c=0$  消去  $a$ , 并对  $b$  整理得  $6b^2-3tb+t^2-c=0$ , ———①

因为存在实数  $b$ , 所以判别式  $\Delta_b=9t^2-4\times 6(t^2-c)\geq 0\Rightarrow |t|\leq \sqrt{\frac{8c}{5}}\Rightarrow |t|_{\max}=\sqrt{\frac{8c}{5}}$ .

把  $t=\pm\sqrt{\frac{8c}{5}}$  代入①, 得  $b=\frac{t}{4}$ . 下面注意: 以  $b$  为自变量, 不必代入  $t=\pm\sqrt{\frac{8c}{5}}$ .

由  $2a=t-b$  得  $a=\frac{3}{2}b$ ,  $c=4a^2-2ab+4b^2=10b^2$ .

所以  $\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}=f(b)=\frac{2}{b}-\frac{4}{b}+\frac{5}{10b^2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{b}-2)^2-2$ , 故当  $b=\frac{1}{2}$  时,  $\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$  的最小值为  $-2$ .

**评注** 解法 2 要明确两个方法, 第一, 构造方程法: 求  $b$  为何值时  $|2a+b|$  最大, 为此设  $2a+b=t$ , 构造了关于  $b$  的二次方程①, 并用判别式法求得  $b=\frac{t}{4}$ . 第二, 构造函数法: 以  $b$  为自变量, 构造函数  $f(b)$ , 问题迎刃而解. 解法 2 的灵魂是基本量方法, 全程以  $b$  为基本量, 将  $a, c$  和目标都用  $b$  表示. 总之, 解法 2 凸现了函数与方程的数学思想方法, 值得回味.

**例 16** (北京解答题 19) 已知  $A, B, C$  是椭圆  $W: \frac{x^2}{4}+y^2=1$  上的三个点,  $O$  是坐标原点.

(1) 当点  $B$  是  $W$  的右顶点, 且四边形  $OABC$  为菱形时, 求此菱形的面积.

(2) 当点  $B$  不是  $W$  的顶点时, 判断四边形  $OABC$  是否可能为菱形, 并说明理由.

**解 (1) 答案:** 菱形的面积为  $\sqrt{3}$ .

**(2) 解法 1 (点差法)** 假设四边形  $OABC$  为菱形, 则设

$A(r\cos\alpha, r\sin\alpha), C(r\cos\beta, r\sin\beta), (r=|OA|=|OC|)$

代入椭圆方程  $x^2+4y^2=4$  中, 得

$$(r\cos\alpha)^2+4(r\sin\alpha)^2=4, \quad \text{——①}$$

$$(r\cos\beta)^2+4(r\sin\beta)^2=4, \quad \text{——②}$$

①-②, 注意  $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ , 得  $\cos^2\alpha=\cos^2\beta\Rightarrow\cos\alpha=\pm\cos\beta$

所以  $A(r\cos\alpha, r\sin\alpha), C(r\cos\beta, r\sin\beta)$  两点的横坐标相等或互为相反数, 点  $B$  必是  $W$  的顶点.

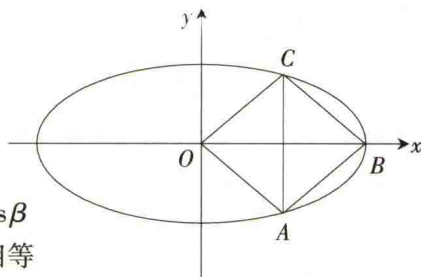
所以当点  $B$  不是  $W$  的顶点时, 四边形  $OABC$  不可能是菱形.

**解法 2 (点差法/斜率关系公式)** 假设四边形  $OABC$  为菱形, 因为点  $B$  不是  $W$  的顶点, 且  $AC\perp OB$ , 所以  $AC$  的斜率存在且非零.

设  $AC$  的斜率为  $k (k\neq 0)$ ,  $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ ,  $AC$  的中点为  $M(x_0, y_0)$ , 将  $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ , 分别代入椭圆方程  $x^2+4y^2=4$  中, 得

$$x_1^2+4y_1^2=4, \quad \text{——①} \quad x_2^2+4y_2^2=4, \quad \text{——②}$$

$$\text{①-②, 得 } (x_1^2-x_2^2)+4(y_1^2-y_2^2)=0\Rightarrow \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\times\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow \frac{y_0}{x_0}\times k=-\frac{1}{4},$$



因为菱形的对角线  $AC$  和  $OB$  互相平分于点  $M$ , 所以  $M$  也在  $OB$  上, 于是

$$k_{OB} \times k_{AC} = k_{OM} \times k_{AC} = \frac{y_0}{x_0} \times k = -\frac{1}{4} \neq -1. \text{ 这与 } AC \perp OB \text{ 相矛盾,}$$

所以当点  $B$  不是  $W$  的顶点时, 四边形  $OABC$  不可能是菱形.

评注 这是北京解析几何压轴题, 考生感到容易, 偷偷一笑, 但考后觉察没有答对, 留下了终身遗憾! 本书在 10.3 节明确了“解决直线和圆锥曲线位置关系的基本方法”, 特别在例 2 中加重讲解了“点差法”, 并发明了利于高考解题的弦径斜率关系公式. 高考命题专家啊, 就算你笑里藏刀, 我用“点差法”也易如反掌, 6 分钟内轻取本题. 所给解法 2 就是“点差法”的戏法表演.

好了, 前言评注就讲到这里. 更美秒的题解充满书中, 希望你以数学思想方法为中心到书中去追求两个解题法宝: “基础知识傻瓜化”和“解题方法明确化”!

请收视齐智华智能数学讲座 (在清华同方知好乐网校讲授. [www.zhihaole.net](http://www.zhihaole.net))

1. 《高考选择题与填空题的高速解决——25 = 500》
2. 《高考压轴题的走向与解法研究》

注意: 与数学高考一致, 本书选择题都是单选题.