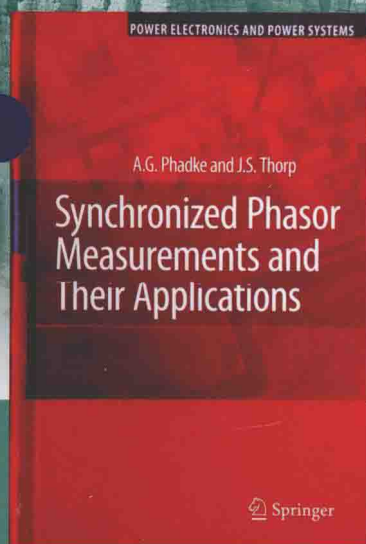


■ 国外电力名著译丛

Synchronized Phasor
Measurements and
Their Applications

广域同步相量测量 技术及其应用

[美] A.G. Phadke [美] J.S. Thorp 著
毕天姝 译



Springer



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



国家电网公司
电力科技著作出版项目

■ 国外电力名著译丛

**Synchronized Phasor
Measurements and
Their Applications**

广域同步相量测量 技术及其应用

[美] A.G. Phadke [美] J.S. Thorp 著
毕天姝 译



Springer



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书作为世界广域同步相量测量技术(PMU)领域的开山之作,从电力系统相量等基本概念入手,结合数字信号处理技术,全面系统地论述了额定频率及偏离额定频率情况下的相量计算方法、相量测量单元的暂态响应、电力系统动态监测系统构成,以及同步相量信息在状态估计、反馈控制、继电保护和机电波传播等方面的应用,内容丰富,论述详细。

本书可供从事电力系统监测、保护与控制的技术人员及PMU研发人员参考,也可作为大专院校电气专业教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

广域同步相量测量技术及其应用/(美)斐克(Phadke, A. G.),
(美)索普(Thorp, J. S.)著;毕天姝译. —北京:中国电力出版社, 2014. 12

书名原文: Synchronized phasor measurements and their applications

ISBN 978-7-5123-6235-2

I. ①广… II. ①斐… ②索… ③毕… III. ①相量测量-测量技术 IV. ①TM933. 3

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第168614号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街19号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2014年12月第一版 2014年12月北京第一次印刷

710毫米×1000毫米 16开本 11.75印张 219千字

印数0001—3000册 定价55.00元

敬告读者

本书封底贴有防伪标签,刮开涂层可查询真伪
本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

译者序

基于 GPS 的新一代动态安全监测系统技术是当今电力系统中具有巨大变革性影响的前沿技术之一，也是发展智能电网的核心技术之一。它无论对我国电力系统学科的发展还是对我国电力系统未来的发展都具有重大意义。

目前，我国安装了大约 2500 台 PMU 装置，覆盖了全部 500kV 变电站、100MW 及以上发电机组和部分重要 220kV 变电站，其实测相量信息已成为智能电网重要数据源之一。与此同时，2006 年发布了 PMU 国家电网公司企业标准，规范了相量测量装置在系统稳态条件下的测量精度与通信协议；2011 年发布了 PMU 国家标准，探讨相量测量装置在系统动态条件下的测量精度问题；当前，已修订完成 PMU 国家电网公司企业标准，明确了动态条件下相量测量装置的测量精度要求，即将于 2015 年发布。这有助于提升 PMU 量测精度，进一步推动 PMU 应用技术发展。

本书原作者是美国弗吉尼亚理工大学的 A. Phadke 教授与 J. Thorp 教授。他们是美国工程院院士，也是世界广域同步相量测量技术领域的开创者，曾因在广域同步相量测量技术领域中的杰出贡献荣获 2008 年富兰克林奖章（工程领域的诺贝尔奖）。作为世界广域同步相量测量技术领域的第一本专著，该书从电力系统相量等基本概念出发，结合数字信号处理技术，详细讨论了额定频率及偏离额定频率情况下的相量计算方法、相量测量单元的暂态响应、电力系统动态监测系统构成，以及同步相量信息在状态估计、反馈控制、继电保护和机电波传播等方面的应用，内容丰富，论述详细。

译者长期从事广域同步相量测量技术及其应用研究，与 A. Phadke 和 J. Thorp 教授长期开展学术科研合作。在研究过程中，译者深感本书论述系统全面，对从事相关研究与应用的工作者或相关领域的研究生具有重要参考价值，故在两位美国教授鼓励下，在高等学校学科创新引智计划项目（“111”项目）和优秀青年科学基金项目的资助下，翻译完成本书。

本书的翻译得到了杨奇逊院士和韩英铎院士的推荐，同时翻译过程得到了刘灏、燕跃豪、陈亮、钱程、秦骏达等同志的帮助，在此深表谢意。

由于本书涉及面较广，限于译者水平，不妥或疏漏之处在所难免，恳请读者指正。

毕天姝

2014 年 12 月于北京

同步相量测量已成为电力系统中一项重要的量测技术。它的诞生得益于全球定位系统（GPS）的出现与电力系统微机保护信号采样及数据处理技术的发展。同步相量测量系统可提供同步精度为 $1\mu\text{s}$ 的正序电压和正序电流测量值，也可测量本地频率和频率变化率。它还可定制测量谐波、负序或零序量、相电压和相电流等。目前，世界上已有二十多个同步相量测量单元（PMU）的制造商。IEEE 电力系统继电保护分委会制定了 PMU 的工业标准，以保证不同制造厂商所生产 PMU 的互操作性。

近年来，世界上大停电事故频繁发生，极大地促进了 PMU 的推广应用。PMU 可直接量测电力系统任一瞬间的状态，目前已出现了很多基于同步量测的应用，未来毫无疑问将会发展更多基于 PMU 的应用。

我们在这项技术的研发阶段就开始了相关研究，我们的同事、学生在同步相量测量技术及其应用方面有大量的研究成果。世界上的其他学者在这一领域也有很大贡献。我们写这本书的目的是希望为感兴趣的读者系统介绍这项技术的发展及应用；帮助电力工程师理解其中的基础知识。我们相信同步相量测量技术必将开创电力系统监测、保护与控制的一个新纪元。

Arun G. Phadke
James S. Thorp
弗吉尼亚黑堡
2008 年 1 月

译者序

原书序

第 1 篇 同步相量测量技术	1
第 1 章 概述	3
1.1 同步相量测量技术发展简史	3
1.2 正弦信号的相量表示方法	4
1.3 傅里叶级数与傅里叶变换	5
1.3.1 傅里叶级数	5
1.3.2 傅里叶变换	7
1.4 采样与频率混叠	12
1.5 离散傅里叶变换 (DFT)	14
1.5.1 DFT 与傅里叶级数	17
1.5.2 DFT 与相量表示	18
1.6 频谱泄漏现象	20
参考文献	22
第 2 章 额定频率输入信号的相量计算方法	24
2.1 额定频率信号的相量计算	24
2.2 相量更新计算方法	25
2.2.1 非递归更新计算方法	25
2.2.2 递归更新计算方法	26
2.3 信号噪声与数据窗长的影响	28
2.3.1 采样时间误差的影响	30
2.4 分数周波数据窗的相量计算方法	31
2.5 计算相量质量与暂态监视器	32
2.6 输入信号中衰减直流分量的影响	36
2.7 非 DFT 相量计算方法	38
参考文献	38
第 3 章 偏离额定频率输入信号的相量计算方法	39
3.1 电力系统频率偏移情况分类	39
3.2 输入信号偏离额定频率时 DFT 算法行为分析	39

3.2.1 输入信号偏离额定频率	40
3.3 偏离额定频率信号相量计算的后处理方法	46
3.3.1 对于 $2f_0$ 分量的数字均值滤波方法	46
3.3.2 再采样滤波方法	47
3.4 纯正序信号的相量计算方法	48
3.4.1 对称分量	48
3.5 不对称输入信号的相量计算方法	51
3.5.1 偏离额定频率的不对称输入信号	51
3.5.2 一种计算图表	54
3.6 跟踪系统频率的采样时钟	56
3.7 非 DFT 的相量计算方法	58
参考文献	58
第 4 章 频率计算方法	60
4.1 频率测量方法回顾	60
4.2 三相对称输入的频率计算方法	61
4.3 三相不对称输入的频率计算方法	64
4.4 非线性拟合频率计算方法	64
4.5 其他频率测量技术	67
参考文献	67
第 5 章 同步相量测量单元与相量数据集中器	69
5.1 引言	69
5.2 PMU 结构	69
5.3 全球定位系统	70
5.4 广域同步测量系统的层次化结构	71
5.5 PMU 通信系统概述	72
5.6 PMU 及 PDC 的功能要求	75
5.6.1 PMU 标准发展历程概述	75
5.6.2 同步相量传输的标准文件结构	76
5.6.3 PDC 文件	77
参考文献	77
第 6 章 同步相量测量单元的暂态响应	79
6.1 引言	79
6.2 电力系统暂态过程分析	80
6.2.1 电磁暂态过程	80

6.2.2 机电暂态过程	81
6.3 电力互感器的暂态响应	84
6.3.1 电压互感器	84
6.3.2 电流互感器	85
6.4 滤波器的暂态响应	85
6.4.1 浪涌抑制滤波器	85
6.4.2 抗混叠滤波器	86
6.5 电磁暂态过程中 PMU 的暂态响应	87
6.6 电力系统振荡时 PMU 的暂态响应	88
6.6.1 幅值调制	88
6.6.2 频率调制	90
6.6.3 幅值频率同时调制	91
6.6.4 相量上传过程中的频率混叠	93
参考文献	94
第 2 篇 同步相量量测应用	97
第 7 章 电力系统状态估计	99
7.1 历史——调度员潮流	99
7.2 加权最小二乘算法	99
7.2.1 最小二乘算法	99
7.2.2 线性加权最小二乘算法	100
7.2.3 非线性加权最小二乘算法	102
7.3 静态状态估计	103
7.4 坏数据检测	106
7.5 含有相量量测的状态估计	108
7.5.1 线性状态估计	110
7.5.2 含有相量量测的状态估计新方法	112
7.5.3 不完全可观状态估计	113
7.5.4 分区状态估计	116
7.6 校准	119
7.7 动态状态估计	123
参考文献	124
第 8 章 基于相量量测的闭环反馈控制	126
8.1 引言	126
8.2 线性最优控制	126

8.3	应用于非线性系统的线性最优控制	127
8.4	振荡协调阻尼控制	132
8.5	离散事件控制	139
8.5.1	决策树	140
参考文献		142
第9章 引入同步相量信息的保护系统		144
9.1	引言	144
9.2	线路差动保护	144
9.3	多端线路距离保护	146
9.4	自适应保护	147
9.4.1	自适应失步保护	148
9.4.2	安全性与可靠性	150
9.4.3	变压器	151
9.4.4	自适应系统恢复	151
9.5	后备保护性能控制	153
9.5.1	隐性故障	153
9.6	智能解列技术	155
9.7	智能减负荷控制	157
参考文献		158
第10章 机电波传播理论		161
10.1	引言	161
10.2	电网连续体模型	162
10.3	机电波报务员方程	166
10.4	连续体电压幅值	168
10.5	对继电保护系统的影响	169
10.5.1	过流保护	170
10.5.2	距离保护	170
10.5.3	失步保护	170
10.5.4	自动切负荷装置	171
10.6	频散效应	172
10.7	电网参数分布方法	172
参考文献		174
索引		175

第1篇

同步相量测量技术

第1章 概述

1.1 同步相量测量技术发展简史

电力系统母线电压相角对于电力系统分析与运行控制具有重要意义。众所周知,输电线路上传输的有功功率与线路两端母线电压相角差的正弦函数值近似成正比,而系统规划与运行中的许多问题都与有功潮流直接相关,所以如何量测输电线路两端母线电压的相角差一直极受关注。早在1980年左右,就有文献[1, 2, 3]尝试直接测量线路两端电压的相角差。它们分别采用LORAN-C^①、GOES卫星系统^②与HBG广播系统(欧洲)获取电网内不同位置处的同步信号,并且通过捕捉相电压正向过零点相对于同步时间信号的时间差,来计算当地的相角,进而得到不同位置之间的相角差。这些系统的测量精度在 $40\mu\text{s}$ 左右,且仅考虑测量单相电压相角,未尝试测量电压相量幅值及谐波分量。上述相角差测量方法并不适用于广域范围内的相角测量,因此未投入工业应用。

现代同步相量测量技术起源于微机线路保护研究。早期的输电线路微机保护装置证明了当时(20世纪70年代)微处理器的计算能力完全能够满足线路保护功能的需要。

在微机线路保护装置中,计算工作量主要是在一个采样间隔内求解3个相间回路方程与3个接地回路方程,以判定三相输电系统中是否发生任一类型故障。为尽可能避免同时求解6个方程,最终促使发明了基于量测电压、电流序分量的继电保护技术。采用电压、电流的序分量及其派生物理量(如阻抗),就可以通过仅求解一个方程而完成所有的故障判断。1977年发表的文献[4]详细介绍了基于序分量的输电线路继电保护新算法,也给出了计算三相电压、电流序分量的有效算法。这篇文章中的正序电压、电流的计算方法推动了现代相量测量系统的发展。研究工作者很快意识到正序量测量的计算有着非常重要的价值,因为一个电网中的正序电压将组成系统状态向量,它是电力系统分析的基础。A. G. Phadke与J. S. Thorp于1983年发表了世界上第一篇关于PMU的文章^[5],分析了正序电压与电流相量量测的重要性,也介绍了相量量测的一

① LORAN-C为罗兰C导航系统。——译者

② GOES为geostationary operational environmental satellites的缩写,为地球静止轨道环境业务卫星。——译者

些应用。这篇文章标志着现代同步相量测量技术的诞生。此时，全球定位系统 (global positioning system, GPS)^[6] 开始全面投入使用。显然，借助 GPS 信号是使电力系统内不同位置的量测量保持同步的最有效的方法。世界上第一台基于 GPS 的现代相量测量单元 (phasor measurement unit, PMU) 的原型机在 20 世纪 80 年代早期于美国弗吉尼亚理工大学 (Virginia Tech) 研制成功，图 1.1 给出了该原型机的图片。由 Virginia Tech 研制的 PMU 原型机先后在邦那维尔电力管理局 (BPA)、美国电力公司 (AEP) 和纽约电力公司 (NYP) 投入运行。Macrodyne 公司与 Virginia Tech 合作，于 1991 年^[7] 推出了 PMU 商业化产品。目前，世界上已有很多 PMU 制造商，PMU 也已在许多国家投入运行。IEEE 于 1991 年发布了第一个 PMU 标准，用以规范 PMU 的数据格式与传输协议，2005 年发布了该标准的修订版^[8]。

伴随着 PMU 的发展，基于 PMU 量测信息的各种应用也成为研究的热点。在本书后续章节中还将专题详细讨论相关应用。可以说，同步相量测量技术的时代已经来临，世界上所有现代电力系统均在安装基于 PMU 的广域测量系统。

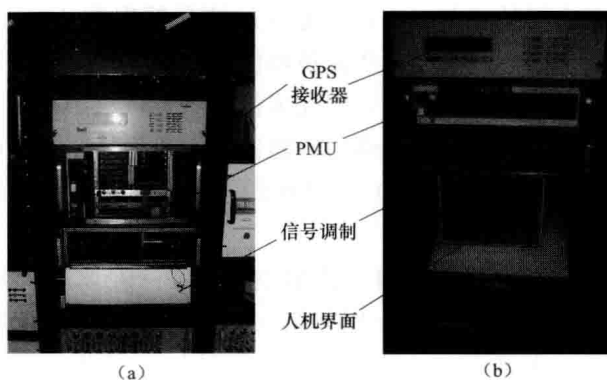


图 1.1 世界第一台基于 GPS 的 PMU 原型机

(a) PMU 装置后视图；(b) PMU 装置前视图

注：弗吉尼亚理工大学电力系统实验室研发的第一台相量测量单元，其中 GPS 接收器为外置式。

由于当时 GPS 卫星的数目还比较少，PMU 内部还配有高精度的晶振时钟，以保证没有 GPS 信号时时间的准确性。

1.2 正弦信号的相量表示方法

一个纯正弦信号可表示为

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \quad (1.1)$$

式中： ω 为信号的频率，rad/s； ϕ 为初相角，rad； X_m 为信号幅值的最大

值。信号的有效值为 $X_m/\sqrt{2}$ ，需注意信号有效值对于计算交流系统的有功功率和无功功率非常重要。

式 (1.1) 也可写作

$$x(t) = \operatorname{Re}\{X_m e^{j(\omega t + \phi)}\} = \operatorname{Re}[\{e^{j\omega t}\} X_m e^{j\phi}]$$

一般对于频率为 ω 的纯正弦量，若忽略 $e^{j\omega t}$ 项，则该正弦量可用一个复数 X 表示，并称其为信号的相量表示形式，即

$$x(t) \leftrightarrow X = (X_m/\sqrt{2})e^{j\phi} = (X_m/\sqrt{2})[\cos\phi + j\sin\phi] \quad (1.2)$$

一个正弦信号及其相量表示形式的示意图如图 1.2 所示。

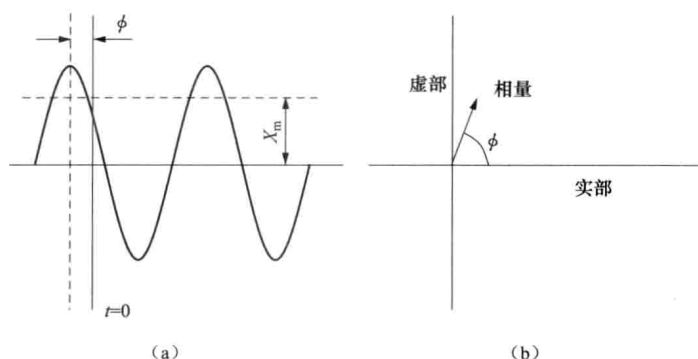


图 1.2 正弦信号 [图 (a)] 及其相量表示 [图 (b)]。相量的初相角与 $t=0$ 时刻的选取直接相关，可能为任意值。相量的长度等于正弦信号的有效值。

如前所述，只有纯正弦信号才能表示成相量形式。而实际电力系统中，信号波形往往是几个频率信号的叠加，因此，从信号波形中提取单一频率信号（在电力系统中，通常是基频信号），进而表示为相量形式是非常必要的。傅里叶变换常用于抽取某一频率信号。在离散系统中，即为离散傅里叶变换 (DFT) 或快速傅里叶变换 (FFT)。这些信号处理方法将在下节予以介绍。另外，相量表示还意味着该正弦信号是稳定的，不随时间而变化。然而，在电力系统中，正弦信号随时间变化，某一相量表示仅在一段时间内是有效的。该有效时间段又被称作“数据窗”，在电力系统相量计算中是一个非常重要的概念，也将在后续章节中进行详细介绍。

1.3 傅里叶级数与傅里叶变换

1.3.1 傅里叶级数

假设 $x(t)$ 是时间 t 的周期函数，且周期为 T ，则 $x(t+kT)=x(t)$ (k 为任意整数)。一个周期函数可以被分解为傅里叶级数，即

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \quad (1.3)$$

其中常数 a_k 与 b_k 为

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

傅里叶级数也可写作指数形式

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \quad (1.5)$$

其中

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} dt, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

注意：式 (1.5) 中和式是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ ，而式 (1.3) 中和式则是从 1 到 $+\infty$ 。这主要是由于余弦和正弦函数分别是关于 k 的偶函数和奇函数，将和式的上、下限拓展到 $(-\infty, +\infty)$ ，同时去掉 a_k 与 b_k 积分计算式前的常数 2，结果不变，且可将傅里叶级数变形为预期的指数形式。

例 1.1

假设周期为 T 的方波信号如图 1.3 所示。由图可知，它是关于时间的偶函数。则傅里叶级数的系数（指数形式）为

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{+T/4} e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} dt, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$= \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

其中 $\alpha_0 = 1/2$,

$\alpha_1 = 1/\pi$, $\alpha_{-1} = 1/\pi$,

$\alpha_3 = -1/(3\pi)$, $\alpha_{-3} = -1/(3\pi)$,

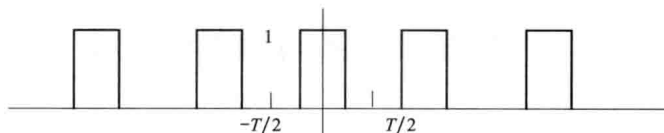


图 1.3 周期为 T 的方波函数图，其占空比为 0.5，且选取时间轴使得该函数为偶函数。

$$\alpha_5 = 1/(5\pi), \alpha_{-5} = 1/(5\pi), \dots$$

所有偶系数均为 0。

因此, 该方波信号的傅里叶级数为

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(\frac{10\pi t}{T}\right) - \dots \right]$$

傅里叶级数的前 7 项之和如图 1.4 所示。

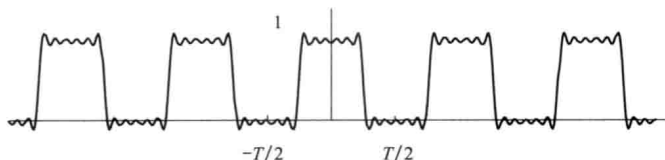


图 1.4 傅里叶级数前 7 项之和得到的近似方波波形图。如果包含项数越多, 则波形越逼近理想方波波形。波形上的振荡是由 Gibbs 现象^❶造成的。对于采用傅里叶级数逼近阶跃函数来说, 该现象是不可避免的。

1.3.2 傅里叶变换

关于傅里叶变换, 有几本非常好的教科书^[9,10], 读者可以从中获得全面的傅里叶变换理论。这里仅介绍与电力系统相量计算直接相关的部分内容。

关于时间 t 的连续函数 $x(t)$, 若满足一定的可积条件^[9], 则其傅里叶变换为

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.7)$$

傅里叶反变换为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.8)$$

在采样数据计算中, 常用到的一个重要函数是冲击函数 $\delta(t)$, 其定义为

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt \quad (1.9)$$

当按照式 (1.9) 计算积分时, 冲击函数 (又被称作分配函数或 Dirac delta 函数) 可看作是一个采样函数, 积分结果等于函数 $x(t)$ 在 $t=0$ 时刻的采样值。式 (1.9) 中的积分形式被称作卷积。因此, 以时间 ΔT 为周期的定间隔采样过程可

❶ Gibbs 现象即吉布斯现象: 将具有不连续点的周期函数 (如矩形脉冲) 进行傅里叶级数展开后, 选取有限项进行合成。当选取的项数越多, 在所合成的波形中出现的峰起越靠近原信号的不连续点。当选取的项数很大时, 该峰起值趋于一个常数, 大约等于总跳变值的 9%。这种现象称为吉布斯现象。——译者



看作是输入信号与一串冲击函数 $\delta(t-k\Delta T)$ (k 为从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整数) 的卷积。

令 $z(t)$ 为两个时间函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的卷积, 即

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau-t)d\tau \equiv x(t) * y(t) \quad (1.10)$$

两个时间函数的卷积具有下述性质。

性质 1: 两个时间函数卷积的傅里叶变换等于这两个时间函数傅里叶变换之积, 可写作

$$\text{如果 } s(t) = x(t) * y(t), \text{ 则 } S(f) = X(f)Y(f)$$

同样, 两个时间函数傅里叶变换的卷积的傅里叶反变换等于这两个时间函数之积, 即

$$\text{如果 } Z(f) = X(f) * Y(f), \text{ 则 } z(t) = x(t)y(t)$$

下面举例说明上述第二个命题。令函数 $x(t) = \cos(\omega t)$, $y(t) = \sin(\omega t)$, 且 $\omega = 2\pi f_0$, 则函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j2\pi(f-f_0)t} + e^{-j2\pi(f+f_0)t}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \end{aligned}$$

同理

$$Y(f) = \frac{j}{2} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$$

由此可见, 幅值为 1 的纯余弦函数的傅里叶变换在频域内为 $\pm f_0$ 处的一对实冲击函数; 而幅值为 1 的纯正弦函数的傅里叶变换在频域内为 $\pm f_0$ 处的一对方向相反的虚冲击函数。

频域内上述两个傅里叶变换的卷积为

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [\delta(\phi-f_0) + \delta(\phi+f_0)] \frac{j}{2} [\delta(f+f_0-\phi) - \delta(f-f_0-\phi)] d\phi \\ &= \frac{j}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\phi-f_0)\delta(f+f_0-\phi) + \delta(\phi+f_0)\delta(f+f_0-\phi) \\ &\quad - \delta(\phi-f_0)\delta(f-f_0-\phi) - \delta(\phi+f_0)\delta(f-f_0-\phi)] d\phi \end{aligned}$$

应用冲击函数积分的采样性质, 则

$$S(f) = \frac{j}{4} [\delta(f+2f_0) - \delta(f-2f_0)]$$

显然, $S(f)$ 的傅里叶反变换为

$$s(t) = \frac{1}{2} \sin(4\pi f t) = \sin(2\pi f t) \cos(2\pi f t) = x(t)y(t)$$