

高校经典教材同步辅导丛书
配套清华版·耿素云等编著

教你用更多的自信面对未来！

离散数学

(第五版)

同步辅导及习题全解

主 编 焦艳芳

一书两用
同步辅导+考研复习

—— 习题超全解 ——
名师一线经验大汇集，解题步骤超详细，方法技巧最实用

新版



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

离散数学（第五版） 同步辅导及习题全解

主 编 焦艳芳



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与清华大学出版社出版、耿素云等编著的《离散数学》(第五版)一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。本书按教材内容安排全书结构,各章均包括学习要求、知识网络图、知识点归纳、典型例题、课后习题解答五部分内容。

全书按教材内容,针对各章节习题给出详细解答,思路清晰,逻辑性强,循序渐进地帮助读者分析并解决问题,内容详尽,简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《离散数学》(第五版)课程的辅导教材,也可作为考研人员复习备考的辅导教材,同时可供教师作为备课命题的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学(第五版)同步辅导及习题全解 / 焦艳芳
主编. — 北京:中国水利水电出版社, 2015.8
(高校经典教材同步辅导丛书)
ISBN 978-7-5170-3389-9

I. ①离… II. ①焦… III. ①离散数学—高等学校—
教学参考资料 IV. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第163057号

策划编辑:杨庆川

责任编辑:李 炎

封面设计:李 佳

书 名	高校经典教材同步辅导丛书 离散数学(第五版)同步辅导及习题全解
作 者	主 编 焦艳芳
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn
经 售	电话: (010) 68367658 (发行部)、82562819 (万水) 北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规 格	170mm×227mm 16开本 16.5印张 459千字
版 次	2015年8月第1版 2015年8月第1次印刷
印 数	0001—5000册
定 价	25.80元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换

版权所有·侵权必究

前言

耿素云、屈婉玲、张立昂编著的《离散数学》(第五版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为“离散数学”这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了与此教材配套的《离散数学(第五版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《离散数学》(第五版)这门课程的特点,我们在内容上做了以下安排:

1. 学习要求。每章前面均对本章的知识要点进行了整理。综合众多参考资料,归纳了本章几乎所有的考点,便于读者学习与复习。

2. 知识网络图。以图的形式概括各章知识点及其之间的联系,使读者对全章内容有一个清晰的脉络。

3. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

4. 典型例题。选取了一些有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,并在最后做出点评,意在抛砖引玉。

5. 课后习题解答。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给出了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2015年5月

前言

第一章 命题逻辑	1
学习要求	1
知识网络图	2
知识点归纳	2
典型例题	10
课后习题解答	19
第二章 一阶逻辑	37
学习要求	37
知识网络图	37
知识点归纳	38
典型例题	45
课后习题解答	53
第三章 集合的基本概念和运算	59
学习要求	59
知识网络图	60
知识点归纳	60
典型例题	63
课后习题解答	74

第四章 二元关系和函数 79

学习要求 79

知识网络图 80

知识点归纳 80

典型例题 86

课后习题解答 93

第五章 图的基本概念 103

学习要求 103

知识网络图 104

知识点归纳 104

典型例题 108

课后习题解答 120

第六章 特殊的图 129

学习要求 129

知识网络图 130

知识点归纳 130

典型例题 134

课后习题解答 142

第七章 树	149
学习要求	149
知识网络图	149
知识点归纳	150
典型例题	152
课后习题解答	160
第八章 组合分析初步	168
学习要求	168
知识网络图	169
知识点归纳	169
典型例题	172
课后习题解答	179
第九章 代数系统简介	190
学习要求	190
知识网络图	190
知识点归纳	191
典型例题	197
课后习题解答	207

第十章 形式语言和自动机初步	220
学习要求	220
知识网络图	220
知识点归纳	221
典型例题	226
课后习题解答	235

第一章

命题逻辑

学习要求

1. 重点掌握五种基本联结词和 24 个基本的等价公式,正确使用求命题范式的方法。理解并掌握命题的概念,学会判断一个语句是否为命题并确定其真值。牢固掌握五类联结词的定义与其真值表。

2. 一般掌握公式的代入规则和替换规则,了解联结词完备集的理解和学习。

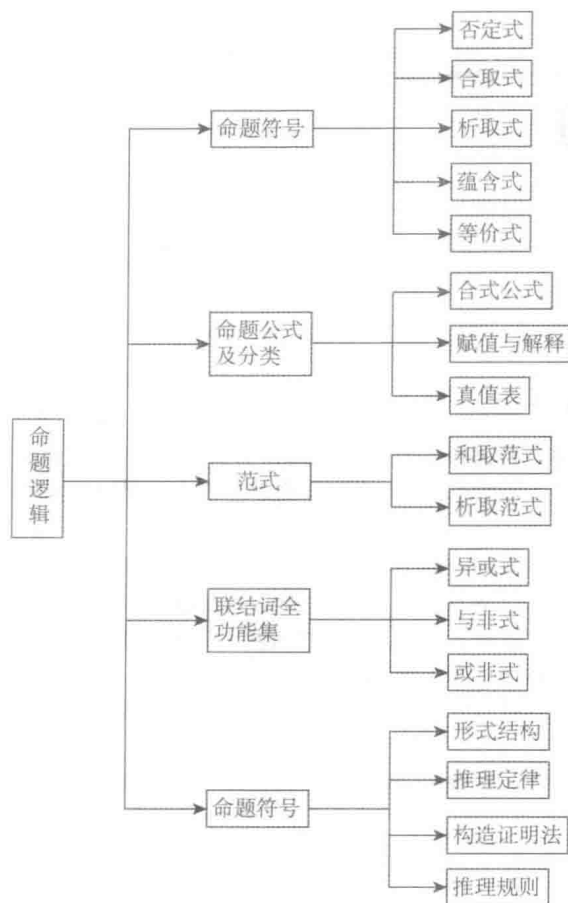
3. 能够写出任一命题公式的真值表。能熟练地应用命题定律来证明两个命题公式的等价。

4. 理解对偶式和蕴涵式的概念。学会如何判断两个命题公式之间是否有蕴涵关系。熟练写出任一命题公式的等价主合取范式和主析取范式。

5. 使用真值表技术求主范式时注意正确地建立真值表,正确地掌握真值解释还原成子句和短语的方法。

6. 理解“前提和有效结论”的概念。学会用直接推理和间接推理进行命题的推理。

知识网络图



知识点归纳

1. 命题

(1) 定义: 具有确切真值的陈述句称为命题, 该命题可以取一个“值”, 称为真值。真值只有“真”和“假”两种, 分别用“ T ”(或“1”)和“ F ”(或“0”)表示。

(2) 例题:

- | | |
|--------------|-----|
| ① 太阳是圆的; | T |
| ② 成都是一个旅游城市; | T |
| ③ 北京是中国的首都; | T |

- ④这个语句是假的; 非命题
 ⑤ $1+1=10$; T/F
 ⑥ $x+y>0$; 非命题
 ⑦我喜欢踢足球; T/F
 ⑧3 能被 2 整除; F

约定:在数理逻辑中像字母“ x ”“ y ”“ z ”等字母总是表示变量。

结论:

- 1)命题一定是陈述句,但并非一切陈述句都是命题。
- 2)命题的真值有时可明确给出,有时还需要依靠环境、条件、实际情况时间才能确定其真值。
- (3)命题的分类:一般来说,命题可分两种类型:
 - 1)原子命题(简单命题):不能再分解为更简单命题的命题。
 - 2)复合命题:可以分解为更简单命题的命题,而且这些简单命题之间是通过如“或者”“并且”“不”“如果...则...”“当且仅当”等这样的关联词和标点符号复合而构成的一个复合命题。

2. 命题联结词

(1)设命题 P, Q 表示任意两个命题,则最常见的命题联结词有:

联接词	记号	复合命题	读法	记法	真值结果
①否定	$\neg$	非 P	P 的否定	$\neg P$	$\neg P=1 \quad P=0$
②合取	$\wedge$	P 并且 Q	P 与 Q 的合取	$P \wedge Q$	$P \wedge Q=1(P=1 \text{ 且 } Q=1)$
③析取	$\vee$	P 或者 Q	P 与 Q 的析取	$P \vee Q$	$P \vee Q=1(P=1 \text{ 或 } Q=1)$
④蕴涵	$\rightarrow$	若 P , 则 Q	P 蕴涵 Q	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q=0 \Leftrightarrow P=1, Q=0$
⑤等价	$\leftrightarrow$	P 当且仅当 Q	P 等价于 Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q=1 \Leftrightarrow P=1, Q=1$ 或 $P=0, Q=0$

$P \quad Q$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

- 1)联结词是句子与句子之间的联结,而非单纯的名词、形容词、数词等的联结。
- 2)联结词是两个句子真值之间的联结,而非句子的具体含义的联结,两个句子之间可以无任何内在联系。
- 3)联结词与自然语言之间并非一一对应,见表 1.1。

表 1.1

联结词	自然语言
$\wedge$	既...又...、不仅...而且...、虽然...但是...、并且、和、与,等等
$\rightarrow$	如 P 则 Q 、只要 P 就 Q 、 P 仅当 Q 、只有 Q 才 P 、除非 Q 否则 $\neg P$, 等等
$\leftrightarrow$	等价、当且仅当、充分必要、等等
$\vee$	相容(可兼)的或

(2)例题:

符号化下列命题

①四川不是人口最多的省份。

设 P : 四川是人口最多的省份。

则命题①可表示为 $\neg P$ 。

②王超是一个德智体全面发展的优秀学生。

设 P : 王超是一个思想品德好的学生;

Q : 王超是一个学习成绩好的学生;

R : 王超是一个体育成绩好的学生。

则命题②可表示为 $P \wedge Q \wedge R$ 。

③教室的灯不亮可能是灯管坏了或者是停电了。

设 P : 教室的灯不亮可能是灯管坏了;

Q : 教室的灯不亮可能是停电了。

则命题③可表示为 $P \vee Q$ 。

④如果周末天气晴朗,那么学院将组织我们到石像湖春游。

设 P : 周末天气晴朗;

Q : 学院将组织我们到石像湖春游。

则命题④可表示为 $P \rightarrow Q$ 。

⑤两个三角形全等当且仅当三角形的三条边全部相等。

设 P : 两个三角形全等;

Q : 三角形的三条边全部相等。

则命题⑤可表示为 $P \leftrightarrow Q$ 。

(3)例题: P : 雪是白色的; Q : $2+2=4$ 。

将下列命题符号化:

①因为雪是白色的,所以 $2+2=4$; $P \rightarrow Q$

②如果 $2+2=4$,则雪是白色的; $Q \rightarrow P$

③只有雪是白色的,才有 $2+2=4$; $Q \rightarrow P$

④只有 $2+2=4$,雪才是白色的; $P \rightarrow Q$

⑤只要雪不是白色的,就有 $2+2=4$; $\neg P \rightarrow Q$

⑥除非雪是白色的,否则 $2+2 \neq 4$; $\neg P \rightarrow \neg Q$ 或 $Q \rightarrow P$

⑦雪是白色的当且仅当 $2+2=4$; $P \leftrightarrow Q$

(4)用复合命题表示如图 1.1 所示的逻辑电路:

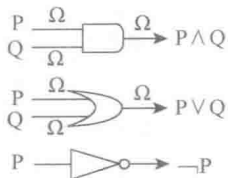


图 1.1

解: 设 P : 输入端 P 为高电位, Q : 输入端 Q 为高电位, 则

“与门”对应于 $P \wedge Q$;

“或门”对应于 $P \vee Q$;

“非门”对应于 P 。

3. 命题公式、解释

(1) 定义: 一个特定的命题是一个常值命题, 它不是具有值“T”(“1”), 就是具有值“F”(“0”)。而一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题, 常称它为命题变量(或命题变元), 该命题变量无具体的真值, 它的变域是集合 $\{T, F\}$ (或 $\{0, 1\}$)。

(2) (命题公式)

1) 命题变元本身是一个公式;

2) 如 G 是公式, 则 $(\neg G)$ 也是公式;

3) 如 G, H 是公式, 则 $(G \wedge H)$ 、 $(G \vee H)$ 、 $(G \rightarrow H)$ 、 $(G \leftrightarrow H)$ 也是公式;

4) 仅由有限步使用规则 1)~3) 后产生的结果。该公式常用符号 $G, H, \dots$ 等表示。

(3) 例题:

试用符号形式写出下列命题:

① 虽然今天天气晴朗, 老陈还是不来;

② 除非你陪伴我或代我叫车子, 否则我将不出去;

③ 停机的原因在于语法错误或者程序错误;

④ 若 a 和 b 是偶数, 则 $a+b$ 是偶数;

⑤ 我们要做到身体好、学习好、工作好, 为祖国四化建设而奋斗。

解答:

① P : 今天天气晴朗, Q : 老陈要来, 则有: $P \wedge Q$;

② P : 你陪伴我, Q : 你代我叫车子, R : 我出去, 则有: $R \rightarrow P \vee Q$ 或 $P \wedge Q \rightarrow R$;

③ P : 停机的原因在于语法错误, Q : 停机的原因在于程序错误, 则有: $P \wedge Q$;

④ P : a 是偶数, Q : b 是偶数, R : $a+b$ 是偶数, 则有: $P \wedge Q \rightarrow R$;

⑤ P : 我们要做到身体好, Q : 我们要做到学习好, R : 我们要做到工作好, S : 我们要为祖国四化建设而奋斗, 则有: $P \wedge Q \wedge R \leftrightarrow S$ 。

(4) 公式的解释:

定义: 设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是出现在公式 G 中的所有命题变元, 指定 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 一组真值, 则这组真值称为 G 的一个解释, 常记为 I 。一般来说, 若有 n 个命题变元, 则应有 2^n 个不同的解释。如果公式 G 在解释 I 下是真的, 则称 I 满足 G ; 如果 G 在解释 I 下是假的, 则称 I 弄假 G 。

定义: 将公式 G 在其所有可能解释下的真值情况列成的表, 称为 G 的真值表。

定义:

1) 公式 G 称为永真公式(重言式), 如果在它的所有解释之下都为“真”。

2) 公式 G 称为永假公式(矛盾式), 如果在它的所有解释之下都为“假”。

3) 公式 G 称为可满足的, 如果它不是永假的。

结论:

1) 永真式 G 的否定 $\neg G$ 是矛盾式; 矛盾式 G 的否定 $\neg G$ 是永真式。

2) 永真式一定是可满足式, 可满足式不一定是永真式。

3) 可满足式的否定不一定为不可满足式(即为矛盾式)。

定义: 设 G, H 是公式, 如果在任意解释 I 下, G 与 H 的真值相同, 则称公式 G, H 是等价的, 记作

$$G=H。$$

(5)“=”与“ $\leftrightarrow$ ”的区别:

首先,双条件词“ $\leftrightarrow$ ”是一种逻辑联结词,公式 $G \leftrightarrow H$ 是命题公式,其中“ $\leftrightarrow$ ”是一种逻辑运算, $G \leftrightarrow H$ 的结果仍是一个命题公式。而逻辑等价“=”则是描述了两个公式 G 与 H 之间的一种逻辑等价关系, $G=H$ 表示“命题公式 G 等价于命题公式 H ”, $G=H$ 的结果不是命题公式。

其次,如果要求用计算机来判断命题公式 G, H 是否逻辑等价,即 $G=H$ 那是办不到的,然而计算机却可“计算”公式 $G \leftrightarrow H$ 是否是永真公式。

由于“=”不是一个联结词,而是一种关系,为此,这种关系具有如下三个性质:

- 1) 自反性: $G=G$;
- 2) 对称性: 若 $G=H$, 则 $H=G$;
- 3) 传递性: 若 $G=H, H=S$, 则 $G=S$ 。

这三条性质体现了“=”的实质含义。

4. 真值表和等价公式

(1) 在命题公式 A 中,对 A 的每一个赋值,就确定了 A 的一个真值,把它们汇列成表,称该表为命题公式 A 的真值表。

设 A 和 B 是两个命题公式,对 A 和 B 的任一赋值, A 和 B 的真值都相同,则称 A 和 B 是等价的或逻辑相等的,记为 $A \leftrightarrow B$ 。

(2) 基本等价公式

设 G, H, S 是任何公式,则:

- | | |
|--|----------|
| 1) $E_1: G \vee G = G$ | (幂等律) |
| $E_2: G \wedge G = G$ | |
| 2) $E_3: G \vee H = H \vee G$ | (交换律) |
| $E_4: G \wedge H = H \wedge G$ | |
| 3) $E_5: G \vee (H \vee S) = (G \vee H) \vee S$ | (结合律) |
| $E_6: G \wedge (H \wedge S) = (G \wedge H) \wedge S$ | |
| 4) $E_7: G \vee (G \wedge H) = G$ | (吸收律) |
| $E_8: G \wedge (G \vee H) = G$ | |
| 5) $E_9: G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$ | (分配律) |
| $E_{10}: G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)$ | |
| 6) $E_{11}: G \vee 0 = G$ | (同一律) |
| $E_{12}: G \wedge 1 = G$ | |
| 7) $E_{13}: G \vee 1 = 1$ | (零律) |
| $E_{14}: G \wedge 0 = 0$ | |
| 8) $E_{15}: G \vee \neg G = 1$ | (排中律) |
| 9) $E_{16}: G \wedge \neg G = 0$ | (矛盾律) |
| 10) $E_{17}: \neg(\neg G) = G$ | (双重否定律) |
| 11) $E_{18}: \neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H$ | (德·摩根定律) |
| $E_{19}: \neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H$ | |
| 12) $E_{20}: (G \leftrightarrow H) = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$ | (等价) |
| 13) $E_{21}: (G \rightarrow H) = (\neg G \vee H)$ | (蕴涵) |

14) $G \rightarrow H = \neg H \rightarrow \neg G$ (假言易位)

15) $E_{23}: G \leftrightarrow H = \neg G \leftrightarrow \neg H$ (等价否定等式)

16) $E_{24}: (G \rightarrow H) \wedge (G \rightarrow \neg H) = \neg G$ (归谬论)

5. 重言式

定义:

设 A 是任一命题公式。

(1) 若对 A 的任意赋值, 其真值永为真, 则称命题公式 A 为重言式或永真式。

(2) 若对 A 的任意赋值, 其真值永为假, 则称命题公式 A 为矛盾式或永假式。

(3) 若 A 不是矛盾式, 则称命题公式 A 为可满足的。

定理:

任何两个重言式的合取或析取都是重言式。

任何两个矛盾式的合取或析取都是矛盾式。

一个重言式, 对同一分量出现的每一处都用同一合式公式置换, 其结果仍是重言式。

一个矛盾式, 对同一分量出现的每一处都用同一合式公式置换, 其结果仍是矛盾式。

代入定理

设 $G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 是一个命题公式, 其中: $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是命题变元, $G_1(P_1, P_2, \dots, P_n), G_2(P_1, P_2, \dots, P_n), \dots, G_n(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 为任意的命题公式, 分别用 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 取代 G 中的 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 后得到新的命题公式:

$$G(G_1, G_2, \dots, G_n) = G'(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

若 G 是永真公式(或永假公式), 则 G' 也是一个永真公式(或永假公式)。

替换定理

设 G_1 是 G 的子公式(即 G_1 是公式 G 的一部分), H_1 是任意的命题公式, 在 G 中凡出现 G_1 处都以 H_1 替换后得到新的命题公式 H , 若 $G_1 = H_1$, 则 $G = H$ 。

6. 公式的标准型——范式

(1) 析取范式和合取范式

定义:

1) 命题变元或命题变元的否定称为文字。

2) 有限个文字的析取称为析取式(也称为子句)。

3) 有限个文字的合取称为合取式(也称为短语)。

4) P 与 $\neg P$ 称为互补对。

(2) 主析取范式和主合取范式

定义:

1) 在给定的析取范式中, 每一个短语都是极小项, 则称该范式为主析取范式。

2) 在给定的合取范式中, 每一个子句都是极大项, 则称该范式为主合取范式。

3) 如果一个主析取范式不包含任何极小项, 则称该主析取范式为“空”; 如果一个主合取范式不包含任何极大项, 则称该主合取范式为“空”。

(3) 极小项和极大项的性质

任意两个极小项的合取必为假;

任意两个极大项的析取必为真;

极大项的否定是极小项;

极小项的否定是极大项;
所有极小项的析取为永真公式;
所有极大项的合取是永假公式。

7. 全功能联结词集

(1) 异或(排斥或)

1) 定义: 两个命题公式 P 和 Q 的排斥或是一个新命题公式, 记作 $P \oplus Q$ 。当且仅当 P, Q 真值不同时, $P \oplus Q$ 为 T , 其他情况下的真值都是 F 。

2) 性质:

$$\textcircled{1} P \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$\textcircled{2} P \vee Q \Leftrightarrow \neg (P \leftrightarrow Q)$$

$$\textcircled{3} P \vee P \Leftrightarrow 0, 0 \vee P \Leftrightarrow P, 1 \vee P \Leftrightarrow 1$$

$$\textcircled{4} P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \quad \text{交换律}$$

$$\textcircled{5} (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) \quad \text{结合律}$$

$$\textcircled{6} P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \quad \text{分配律}$$

(2) 与非

定义: 设 P 和 Q 是两个命题公式, P 和 Q 的与非是一个新命题公式, 记作 $P \uparrow Q$ 。当且仅当 P 和 Q 的真值都为 T 时, $P \uparrow Q$ 为 F , 其他情况下 $P \uparrow Q$ 的真值都是 T 。

(3) 或非

定义: 设 P 和 Q 是两个命题公式, P 和 Q 的或非是一个新命题公式, 记作 $P \downarrow Q$ 。当且仅当 P 和 Q 的真值都为 F 时, $P \downarrow Q$ 为 T , 其他情况下 $P \downarrow Q$ 的真值都是 F ($\downarrow$ 读成“箭”)。

(4) 联结词的全功能集

定义: 在一个联结词的集合中, 如果一个联结词可由集合中的其他联结词定义, 则称此联结词为冗余的联结词, 否则称为独立的联结词。

定义: 设 S 是一个联结词集合, 如果任何 $n (n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示, 则称 S 是联结词全功能集, 如果联结词全功能集不含冗余的联结词, 则称为极小功能集。

联结词的全功能集实例:

$$\textcircled{1} S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \quad (\text{最常用})$$

$$\textcircled{2} S_2 = \{\neg, \wedge, \vee\} \quad (\text{布尔代数系统})$$

$$\textcircled{3} S_3 = \{\neg, \wedge\} \quad (\text{极小})$$

$$\textcircled{4} S_4 = \{\neg, \vee\} \quad (\text{极小})$$

$$\textcircled{5} S_5 = \{\vee, \wedge\} \quad (\text{极小})$$

$$\textcircled{6} S_6 = \{\uparrow\} \quad (\text{极小、大规模集成电路})$$

$$\textcircled{7} S_7 = \{\downarrow\} \quad (\text{极小、大规模集成电路})$$

8. 对偶式与蕴涵式

(1) 定义(对偶式)

在仅含联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 的命题公式 A 中,

将联结词 $\vee, \wedge, F, T$ 分别换成 $\wedge, \vee, T, F$, 所得的公式称为公式 A 的对偶式, 记为 A^* 。

设 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是出现在公式 A 和 B 中的所有原子变元, 如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$ 。

(2) 定义(蕴涵式)

设 A 和 B 是命题公式, 若 $A \rightarrow B$ 是重言式, 则称 A 蕴涵 B , 记为 $A \Rightarrow B$ 。

重要的蕴涵式:

$$\textcircled{1} \text{ 附加律: } A \Rightarrow A \vee B, \quad B \Rightarrow A \vee B$$

$$\textcircled{2} \text{ 化简律: } A \wedge B \Rightarrow A, \quad A \wedge B \Rightarrow B$$

$$\textcircled{3} \text{ 假言推理: } A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

$$\textcircled{4} \text{ 拒取式: } \neg B \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow \neg A$$

$$\textcircled{5} \text{ 析取三段论: } \neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B, \quad \neg B \wedge (A \vee B) \Rightarrow A$$

$$\textcircled{6} \text{ 假言三段论: } (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$\textcircled{7} \text{ 等价三段论: } (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$$

$$\textcircled{8} \text{ 构造性二难: } (A \vee C) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow B \vee D$$

$$(A \vee \neg A) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$$

 $\textcircled{9}$ 破坏性二难

$$(\neg B \vee \neg D) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$$

9. 命题逻辑的推理论理

(1) 直接推理

直接推理的基本思想是: 由一组前提出发, 利用一些公认的规则, 根据已知的等价式或蕴涵式, 推演得到有效结论。公认的推理规则有 4 条:

P 规则:

前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用。

T 规则:

推理中, 如果一个或多个公式蕴涵了公式 S , 则公式 S 可以引入到以后的推理之中。

置换规则:

在推导过程的任何步骤上, 命题公式中的子公式都可以用与之等价的公式置换。

合取引入规则:

任意两个命题公式 A, B 可以推出 $A \wedge B$ 。

(2) 间接推理

间接推理常有下列两种方法:

 $\textcircled{1}$ CP 规则(有效结论是一个条件命题)

要证明: $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow (A \rightarrow B)$

只需证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge A \Rightarrow B$,

其中 A 叫做附加前提。

这种间接推理方法称为 CP 规则。

 $\textcircled{2}$ 归谬法

要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$

只需证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow 0$

其中 $\neg C$ 叫做附加前提。

这种间接推理方法称为归谬法, 它就是常说的反证法。