# 具有马尔可夫跳变的复杂动态网络动力学

方建安　张文兵　崔文霞　朱　武　苗清影　著

科学出版社

# 具有马尔可夫跳变的复杂动态网络动力学

方建安　张文兵　崔文霞
朱　武　苗清影　著



科学出版社
北　京

# 内 容 简 介

本著作针对网络科学中的热点问题——马尔可夫复杂网络的同步问题进行研究，并将控制理论与马尔可夫复杂网络的同步问题结合起来，既对当下的研究热点问题进行研究又将控制理论中的知识推广到复杂网络当中，深入分析了马尔可夫复杂网络的动力学、同步、控制及其应用问题。

本书由十章内容构成，大体上可以分为三个部分。第 1 章为基础理论部分，介绍了马尔可夫过程的基本概念、复杂网络动力学研究现状以及一些基础知识和引理。第 2~8 章为马尔可夫复杂网络的动力学分析部分，着重介绍了具有转移概率部分未知的马尔可夫切换复杂网络稳定和同步的研究方法。第 9~10 章是本书的第三部分，主要应用本书提出的方法解决马尔可夫复杂网络理论在差分进化算法和混沌系统参数辨识中的应用。

本书既可作为理工科高年级本科生或研究生的教学参考书，也可作为研究复杂网络特别是马尔可夫复杂网络的研究者的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

具有马尔可夫跳变的复杂动态网络动力学/方建安等著. —北京：科学出版社，2015.5

ISBN 978-7-03-044188-1

Ⅰ. ①具…　Ⅱ. ①方…　Ⅲ. ①动态网络-动力学　Ⅳ. ①TN711

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 089155 号

责任编辑：余　丁　赵艳春／责任校对：桂伟利
责任印制：张　倩／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2015 年 5 月第 一 版　开本：720 × 1000 1/16
2015 年 5 月第一次印刷　印张：13 3/4
字数：268 000

**定价：65.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

二十一世纪，人类社会已经迈入了网络时代。复杂网络与人类生活密切相关，很多实际的网络系统都可由网络来建模，比如，万维网、Internet 网络、基因调控网络以及社会网络等都可用复杂网络来进行建模。

作为当今的研究热点问题，复杂网络吸引了来自数学、物理、生物、信息、管理以及社会学等领域的学者的关注。本书针对复杂网络演化过程中存在的切换现象，以马尔可夫复杂网络的动力学分析为主线，依托数学工具与理论推导，深入浅出地分析复杂网络系统中控制器设计方法，基因调控网络的动力学研究以及马尔可夫复杂网络的实际应用等内容，以达到自成体系的目的。

本书由十章内容构成，大体上可以分为三个部分。第 1 章为基础理论部分，介绍了马尔可夫过程的基本概念、复杂网络动力学研究现状以及一些基础知识和引理。第 2~8 章为马尔可夫复杂网络的动力学分析部分，着重介绍了转移概率部分未知的马尔可夫切换复杂网络稳定和同步的研究方法。第 9~10 章是本书的第三部分，主要应用本书提出的方法解决马尔可夫复杂网络理论在差分进化算法和混沌系统参数辨识中的应用问题。

本书得到了国家自然科学基金项目 (61203235,61304158)，上海市科委 2012 年度“科技创新行动计划”基础研究重点项目 (12JC1400400)，上海市教委 2012 年度科研创新重点项目 (13ZZ050)，上海市自然科学基金 (13ZR1421300) 的资助，在此表示衷心的感谢。

本书由东华大学信息科学与技术学院方建安教授、扬州大学张文兵教师、上海工程技术大学崔文霞教师、复旦大学朱武博士后、上海交通大学继续教育学院苗清影副教授等共同撰写。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正。

作　者

2014 年 11 月 20 日

# 目　　录

# 第1章　基础理论知识

## 1.1　马尔可夫过程介绍

### 1.1.1　马尔可夫过程的定义

实际生活中，很多过程都可以看作马尔可夫过程，比如：液体中微粒所做的布朗运动、传染病受感染的人数、车站的候车人数等。因此研究马尔可夫复杂动态网络的动力学问题在生物，医学以及人们的日常生活中有着重要的应用。在研究马尔可夫复杂动态网络之前，首先给出马尔可夫过程的基础理论知识。

**定义 1.1　马尔可夫链** 例 1.1 设随机变量 $X_n$ 表示第 $n$ 年某个人的健康状况，$X_n=1$ 表示健康，$X_n=2$ 表示疾病，$n=0,1,\cdots$，设 $a_i(n)$ 表示第 $n$ 年处于状态 $i$ 的概率，$i=1,2$，即 $a_i(n)=P(X_n=i)$。$P_{ij}$ 表示今年处于状态 $i$，明年处于状态 $j$ 的概率，$i,j=1,2$，即 $P_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$。那么 $a_i(n)$ 称为状态概率，$P_{ij}$ 称为状态转移概率。

从上例可以看出，第 $n+1$ 年的状态 $X_{n+1}$ 只取决于第 $n$ 年的状态 $X_n$ 和转移概率 $P_{ij}$，而与以前的状态 $X_{n-1},X_{n-2},\cdots$ 无关。根据全概率公式，则很容易给出第 $n+1$ 年的状态概率为

$$a_1(n+1)=a_1(n)P_{11}+a_2(n)P_{21} \tag{1.1}$$

$$a_2(n+1)=a_2(n)P_{12}+a_2(n)P_{22} \tag{1.2}$$

这样一个状态随着时间的进展随机变化的链式过程就是**马尔可夫链**。

**定义 1.2　随机过程** 系统的特征可以用一组随时间变化的变量来加以描述。如果系统在任何时点上的特性或状态是随机性的，则系统的变化过程就对应一组随机变量构成的过程来描述，这个系统随机变化的过程的描述，就是随机过程。

随机过程一般表述为 $\{x_t,t\in T\}$，这里 $x_t$ 表示同一状态空间中取值的随机变量，$T$ 为参数集。如果 $T$ 为可数参数集，则称该过程为离散参数的随机过程。相应地，若 $T\in[0,+\infty)$，则称该过程为连续参数的随机过程。

**定义 1.3**　设随机过程 $\xi(t)$，如果在已知时间 $t$ 系统处于状态 $x$ 的条件下，在时刻 $T(T>t)$ 系统所处状态和时刻 $t$ 以前所处的状态无关，则称 $\xi(t)$ 为马尔可夫过程。从定义可知马尔可夫过程只与 $t$ 时刻有关，与 $t$ 时刻以前无关。

**定义 1.4**　设随机过程 $\xi(t)$ 只能取到可列个值, $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$, 称 $\xi(t) = r_n$ 为系统处于状态 $E_n, n = 1, 2, \cdots$, 若在已知时刻 $t$, 系统处于 $E_n$ 状态的条件下, 在时刻 $\tau(\tau > t)$ 系统所处的状态情况与 $t$ 时刻以前所处状态无关, 则称 $\xi(t)$ 为时间连续、状态离散的马尔可夫过程。而状态的转移只能在 $t = t_n, n = 1, 2, \cdots$ 发生的马尔可夫过程称为马尔可夫链。

### 1.1.2　马尔可夫过程的相关性质与基本定理

在本小节中我们将给出关于马尔可夫过程的一些基本性质和基本定理。

**性质 1.1**　给定一个 $n$ 维 $F_t$-适应过程 $X = \{X_t\}_{t \geqslant 0}$, 对所有 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ 且 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 如果下列等式成立:

$$P(X(t) \in A | F_s) = P(X(t) \in A | X(s)) \tag{1.3}$$

那么过程 $X$ 为马尔可夫过程, 此等式为马尔可夫性质。

下面给出与此性质等价的性质。

**性质 1.2**　对任意的 Borel 可测函数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 且 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, 则有

$$\mathrm{E}(\varphi(X(t)) | F_s) = \mathrm{E}(\varphi(X(t)) | X(s)) \tag{1.4}$$

**性质 1.3**　对任意的 Borel 可测函数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 且 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, 则有

$$\mathrm{E}(\varphi(X(t)) | F_s) = \mathrm{E}(\varphi(X(t)) | X(s)) \tag{1.5}$$

**性质 1.4**　设马尔可夫过程的传递概率或函数为 $P(s, x; t, A)$, 其中 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 满足下列性质:

(1) 对每一个 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ 且 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$P(s, X(s); t, A) = P(X(t) \in A | X(s)) \tag{1.6}$$

(2) $P(s, x; t, \cdot)$ 对每个 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ 且 $x \in \mathbb{R}^n$ 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上是概率测度。

(3) $P(s, \cdot; t, A)$ 对每个 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ 且 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是 Borel 可测的。

(4) 对任意 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则 Kolmogorov-Chapman 方程成立。

$$P(s, x; t, A) = \int_{\mathbb{R}^n} P(u, y; t, A) P(s, x; u, dy) \tag{1.7}$$

根据传递概率的性质可得马尔可夫性质为

$$\mathrm{E}(\varphi(X(t)) \in A | F_s) = P(s, X(s); t, A) \tag{1.8}$$

**性质 1.5** 设马尔可夫过程 $X=\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的传递概率 $P(s,x;t,A)$，对所有的 $0\leqslant s\leqslant t<\infty$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\geqslant 0$ 且 $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $P(s,x;t,A)$ 是固定不变的，也就是

$$P(s+u,x;t+u,A)=P(s,x;t,A) \tag{1.9}$$

那么马尔可夫过程 $X$ 被称为是同类的。

**定理 1.1**[1] 令传递函数或传递概率 $P_{ij}(t)$ 是标准的传递函数，其中 $P_{ij}(t)=:P\{X(t)=j|X(s)=i\}$, $i,j\in\mathbb{E}$, $t\geqslant 0$, 则对任意的 $i\in\mathbb{E}$, $\gamma_i:=\lim\limits_{t\to 0}[1-P_{ij}(t)]/t$ 存在(但是也许是 $\infty$)。而且，若 $\gamma_i<\infty$, 则状态 $i\in\mathbb{E}$ 被称为是稳定的。

**定理 1.2**[1] 令 $P_{ij}(t)$ 是标准的传递函数，$j$ 是稳定的状态且 $i\in\mathbb{E}$, $\gamma_{ij}=P'_{ij}(0)$ 存在而且是有限的。

**定理 1.3**[1] 令 $P(t)=(P_{ij}(t))_{N\times N}$ 是传递概率矩阵，且 $\varGamma=(\gamma_{ij})_{N\times N}$ 是有限马尔可夫链的生成矩阵，则有 $P(t)=e^{t\varGamma}$.

## 1.2 复杂网络动力学研究背景

### 1.2.1 基因调控网络的研究历史

自从 1953 年 Watson 和 Crick[2] 发现了 DNA 的双螺旋结构以后，分子生物学的研究就进入了一个新的时代。由于技术条件的限制，在上个世纪中，分子生物学的很多领域只是研究少数几个分子或基因在特定生命现象中所起的作用。最近，关于基因序列组识别的技术发展迅速，为基因网络的研究提供了大量的实验数据，比如 KEGG 数据库包括了 29 个物种多达 110000 个基因的结构和功能 [3]。但是了解生物体内的基因和蛋白质是如何相互作用形成系统或网络是非常困难的，它是关于基因调控网络研究的一个巨大的挑战。最近实验技术的发展也极大地推动了基因网络的研究，例如基因微阵列和寡核苷酸技术的发展，这些技术用并行计算的方式对基因的时空表达水平迅速进行测量 [4, 5]。另外，大规模的凝胶分离蛋白光谱鉴定的技术的发展，使得可以在蛋白质水平上鉴定生物体细胞 [6]。尽管这些技术现在还处于发展初期，但是它们为基因表达的动力学行为研究开启了一扇窗。除了实验工具，基因调控网络中建模和仿真技术是必不可少的方法，因为基因调控网路是大量的基因通过积极和消极的循环连锁连接起来的，所以基因调控网络这个直观的动力学行为是很难获得的。利用建模和仿真的方法可以精确的描述基因调控网络的结构，并且可以系统地提出他们的行为预测。尤其是用户利用一个性能很好的计算机工具时，可以对大型和复杂的基因调控网络建模和仿真以便分析。因此，在研究基因调控网络时，数学模型对从实验数据中获取对机体内部的动力学行为是非常有用的。

基因调控网络，就是蛋白质和 mRNA 相互作用相互影响所形成的复杂的动力系统网络。美国遗传学家托马斯 · 亨特 · 摩尔根曾提出基因会受到调控的假说，此后，雅各布 (Francois Jacob) 和贾克 · 莫诺 (Jacques，Lucien Monod) 在早期研究大肠杆菌的生长现象时，发现了细菌在对乳糖和核糖酸的利用时存在着一些巧妙的关系，在不断的努力下，他们发表了基因会调控蛋白质合成的文章，为基因调控网络的发展起了极大的推动作用。经过一大批学者的努力，基因调控网络的发展也越来越完善。Somogyi, Friedman Weaver[7] 等结合大量的实验数据提出了基因调控网络的模型。为基因调控网络的发展起了不可忽视的作用。现在关于基因调控网络的模型大致有如下几种：布尔模型 [8]，贝叶斯网络模型 [7]，微分方程模型 [9, 10] 等。其中应用最广泛的两类模型就是布尔模型和微分方程模型，在布尔模型中每个基因的激活都是通过一个开关来表达的，并且基因的性态是通过布尔函数来确定的。另一方面，微分方程模型描述蛋白质和 mRNA 的浓度变化，这种模型更加精确，并能对生物系统所显现的非线性动力学行为有精确的描述。因此得到了广泛的应用。

### 1.2.2　基因调控网络动力学

自从文献 [9] 提出微分方程模型的基因调控网络模型以来，基于微分方程模型的基因网络动力学研究就受到了越来越多的学者的关注 [11−22]。一个微分方程模型的基因调控网络可以表述如下 [10]：

$$
\begin{cases}
\dot{p}(t) = -k_p p(t) + \dfrac{k_1}{q(t) + k_2} \\[2ex]
\dot{q}(t) = -k_q q(t) + \dfrac{q^2(t)}{q^2(t) + k_4} + k_3
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

式中，第一个方程表示的是受蛋白质抑制的转录和翻译过程，第二个方程表示的是 $p(t)$ 和 $q(t)$ 共同作用的基因的动力学行为。这个经典的基因调控网络模型演化出了许多变形，比如考虑到调控函数是 Hill function 形式的基因调控网络模型；考虑到实际连接中带有权重的基因调控网络模型等。

在生物体当中，细胞首先通过转录酶的转录作用变成 RNA，然后 RNA 经过翻译变成新的 DNA，所有这些过程都是缓慢的。另外，由于放大器速度的有限性，时滞是不可避免的。因此，建立一个基因调控网络模型时考虑时滞是非常有必要的。时滞在基因网络的动力学行为中起到了非常重要的作用，一些没有考虑时滞的模型可能会导致错误的结果 [23]。然而，考虑了时滞的模型会变得更加的复杂，但是必须去克服。而且由于时滞的影响可能会导致网络的不稳定。因此研究带有时滞的基因调控网络的稳定性有很大的实际意义。最近关于时滞基因调控网络的研究，出现了很多出色的成果。比如在文献 [10] 中，作者首先提出了带有时滞基因调控网

络的模型，随后研究了这个模型的局部稳定和扰动等非线性特性。文献 [24] 中，作者提出了带有 SUM 调控函数的时滞随机基因调控网络模型，并给出了线性矩阵不等式形式的稳定性条件。一般来说，时滞可以分为两类：一类是离散时滞，另一类是分布时滞。值得注意的是，由于不同尺寸和长度的分子组成大量的并行路径的空间范围，从而使得网络具有一种空间特性，一般用分布时滞来刻画这种空间特性。因此考虑分布时滞对于基因调控网络的建模也是十分必要的 [25]。

此外，基因表达往往会受到内部外部噪声的干扰和环境波动的影响 [26]。因此基因表达过程是一个随机过程，并且这种噪声不可避免的会影响网络的动力学行为。由于很难精确的知道这种噪声如何影响网络的性态，加入随机效果的最简单的方法就是假定这些随机波动是加在基因调控网络中的 [24]。因此，关于基因调控网络的随机稳定性问题得到了大量的关注。此外，在网络的应用和设计过程中，模型的误差、外部扰动、参数波动等因素是不可避免的。这些扰动可能会破坏网络的稳定性 [27]。因此研究带有这些扰动和噪声的基因调控网络的鲁棒稳定性就尤为必要。

在实际的生物系统中，系统的状态在某一时刻可能会受到一些随机突变因素的影响，从而使得网络呈现出切换状态。马尔可夫网络可以很好地模拟这种随机突变。一个马尔可夫基因调控网络是假设网络有有限个模式，在不同的时间内，模式可能会发生切换，而不同模式间的切换是以马尔可夫链形式存在的 [28]。最近很多学者研究了带马尔可夫跳变的基因调控网络的稳定性问题 [20, 29] 等。

### 1.2.3 马尔可夫切换复杂动态网络的稳定和同步性背景

切换的复杂动态网络是网络拓扑结构或者节点的状态在演化过程中，存在切换现象的复杂的动力系统网络。若复杂动态网络中的切换现象是用马尔可夫过程或马尔可夫链来刻画的，则具有这种切换的动态网络就称为马尔可夫切换复杂动态网络。马尔可夫切换复杂动态网络广泛存在于自然界和人类社会中，而且横跨多个学科，它吸引了诸如物理、生物、数学、控制以及计算机科学等许多不同领域的科学家对其进行研究。马尔可夫切换复杂动态网络的应用范围包括：医学、模式识别、关联记忆、图像处理以及解决一些优化问题等。这就需要我们更深入地研究和理解这些切换复杂网络的拓扑结构、动力行为、同步能力以及抗干扰能力等，以便更好的设计和管理这些实际的复杂网络。

1. 马尔可夫切换复杂动态网络的研究历史

自从 Watts 和 Strogatz(WS)、Barabasi 和 Albert(BA) 分别在*Nature*和*Science*上提出了小世界 (Small-world) 和无标度 (scale-free) 网络模型后，复杂网络的研究就进入了一个划时代的研究热潮。人们开始关注复杂网络的拓扑结构与网络的稳定

性和同步化行为之间的关系。复杂网络的宏观行为不仅是由节点的动态规则所决定，而且由发生在互链路上的信息流所决定 [30]。因此，网络的节点和拓扑对它的动态行为有很重要的影响。众所周知，对于许多现实世界的动态网络，由于网络各个节点的链接不总是稳定的，而且链接的失败或者新链的产生时有发生，所以网络的结构会发生巨大的变化，一些不同拓扑之间的切换是不可避免的。因此，节点切换或拓扑结构切换的复杂网络已经成为科学研究和工程应用领域的一个热点问题 [31, 32]。早在 1961 年，Krasovskii 和 Lidskii 提出了马尔可夫切换 [33]，它可以刻画网络的不同模型之间切换的随机性，而且马尔可夫跳变参数在对一个具有有限网络模型的复杂网络进行建模时起到了非常重要的作用。最近具有马尔可夫切换的复杂网络的动态分析问题已经激起了国际学术界的研究兴趣 [34−36]。

另外，时滞作为一个典型特征，存在于网络节点间的传递，因此时滞成为导致网络不稳定和性能差的主要原因之一 [37]。时滞一般分为随机滞和时变滞，时变滞又包含离散时滞和分布时滞，离散时滞在实际网络很容易被识别。在过去几年里，带有离散时滞的复杂网络的稳定性分析已经是个研究热点 [35, 38]。而分布时滞存在于某个时间段内，对状态的现有行为有较小的影响 [39, 40]。最近，带有混合时滞(也就是离散时滞和分布时滞) 的马尔可夫切换复杂网络的稳定性分析问题和同步问题已经受到越来越多研究者的关注 [36, 37]。由于马尔可夫切换复杂网络在保密通信、化学和生物系统、信息科学及生命科学等领域里的潜在应用，使得马尔可夫切换复杂网络成为一个具有极高研究价值的方向，是当前研究热点之一。而在马尔可夫切换复杂网络的设计和应用中对其进行稳定性分析和同步研究是必不可少的。

2. 马尔可夫切换复杂动态网络的稳定和同步研究现状

众所周知, 稳定性问题是切换复杂网络的最重要的研究领域，因为它是一个真正的系统可以正常工作的先决条件。值得庆幸的是，已经有大量的关于马尔可夫切换复杂网络稳定性的成果 [31, 35]。此外，早在 17 世纪，同步现象就被 Huygens 首次观测到 [41]，而且这一现象广泛存在于大量实际系统中，比如生物系统、神经网络和生理过程等 [42]。复杂网络同步也在数学和物理学科中受到越来越多的关注，由于同步的潜在应用存在于不同的学科领域，其中有地震学、安全通信、化学反应和并行图像处理等 [43]。2002 年，文献 [44] 提出了 $N$ 个相同的动力系统作为节点构成的复杂网络的数学模型，为复杂网络的稳定和同步性研究提供了切入点。其模型为

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\Gamma x_j(t),\ i = 1, 2, \cdots, N \tag{1.11}$$

式中，$x_i(t) = [x_{i1}(t), x_{i2}(t), \cdots, x_{in}(t)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 表示为第 $i$ 个节点的状态向量,

$f(x_i(t)) = (f_1(x_i(t)), f_2(x_i(t)), \cdots, f_n(x_i(t)))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 是一个连续的向量值函数 (通常是非线性函数，例如混沌系统函数)，$\Gamma = (\Gamma_{ij})_{n\times n}$ 是内耦合矩阵，$c$ 表示耦合强度。$A = (a_{ij})_{N\times N}$ 是表示网络拓扑结构的外耦合矩阵。这里 $A$ 定义为：若在节点 $i$ 和节点 $j$ 之间存在着连接，则 $a_{ij}= a_{ji} > 0$；否则若不存在连接，则 $a_{ij}= a_{ji} = 0$。如果把耦合对角线上的元素定义为

$$a_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} a_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, N$$

这个经典的复杂网络模型演化出了许多变型，如考虑到耦合节点在实际中是非线性的，则存在带有非线性耦合的复杂网络模型。如考虑到不同模型间存在切换 $r(t)$，经典的复杂网络模型 (1.1) 就变为马尔可夫切换的复杂网络模型

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), r(t)) + c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(r(t))\Gamma x_j(t),\ i = 1, 2, \cdots, N \tag{1.12}$$

式中，$\{r(t), t \geqslant 0\}$ 是一个在有限状态空间 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, M\}$ 上，取值右连续的马尔可夫链，具有如下的转移概率

$$P\big\{r(t+\Delta t) = p : r(t) = r\big\} = \begin{cases} \delta_{rp}\Delta t + O(\Delta t), & \text{若 } p \neq r \\ 1 + \delta_{rp}\Delta t + O(\Delta t), & \text{若 } p = r \end{cases}$$

这里 $\Delta t > 0$，$\lim\limits_{\Delta t\to 0} O(\Delta t)/\Delta t = 0$。如果 $p \neq r$，则 $\delta_{rp} \geqslant 0$ 就是从 $r$ 到 $p$ 的转移率，否则，$\delta_{rr} = -\sum\limits_{p=1, p\neq r}^{M} \delta_{rp}$。马尔可夫切换复杂网络的分析和综合问题得到了广泛的研究，并取得了一些显著结果 [36, 37]。其中文献 [30] 研究了带有混合状态依赖时滞的离散马尔可夫神经网络的稳定性和同步问题，文献 [45] 研究了带有随机耦合强度和状态依赖时滞的马尔可夫耦合神经网络的同步问题。

由于复杂网络的信息输入、传递和处理中的有限速度会导致网络有时滞现象，而且时滞很容易导致网络系统不稳定和性能差等 [46, 40]。还研究了具有时滞耦合和无时滞耦合的复杂网络的指数同步问题，并给出了适当的控制器。文献 [40] 等针对时滞耦合的拓扑切换的复杂网络设计出了混杂控制器，从而保证网络的稳定性。文献 [47] 利用时滞分割的方法对随机时滞复杂网络的同步的保守性做了细致的研究。考虑如下带有时滞的马尔可夫切换复杂网络模型

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t-\tau(t)), r(t)) + c\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(r(t))\Gamma x_j(t-\tau(t)),\ i = 1, 2, \cdots, N \tag{1.13}$$

式中，$\tau(t)$ 是时变时滞，$T_1=\{t,\tau(t)\in[\tau_m,\tau_0]\}$，$T_2=\{t,\tau(t)\in[\tau_0,\tau_M]\}$，

$$\alpha(t)=\begin{cases}1, & 若\ t\in T_1\\ 0, & 若\ t\in T_2\end{cases}$$

这里 $P(\alpha=1)=\alpha_0$，$\alpha_0\in(0,1)$。当 $\tau(t)=\tau$ 时，时变时滞就变为常时滞。在实际网络中，有时信息传递不是实时的，并且不能由常时滞或离散时滞来建模，这种情况下就要用连续的分布时滞来建模 [48, 49]。例如：下面具有分布时滞的马尔可夫切换的复杂网络模型

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)=&f(x_i(t-\tau_{1,r(t)}))+\int_{t-\tau_{2,r(t)}}^{t}g(x_i(s))\mathrm{d}s\\&+c\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(r(t))\Gamma x_j(t-\tau_{1,r(t)}),\ i=1,2,\cdots,N\end{aligned}\tag{1.14}$$

此类马尔可夫切换复杂网络是具有混合时滞的。许多著名学者对时滞复杂网络的稳定性以及同步得到了一些重要结果 [45, 40, 50]。

由于外部环境的的不确定性，一个物理系统很容易受到白噪声和外部干扰。所以说，一个实际的系统是具有随机扰动的，而不是一个确定性的形式 [51]。而且，随机扰动是造成系统不稳定和网络性能差的主要来源之一。具有随机扰动的马尔可夫切换复杂网络模型为

$$\dot{x}_i(t)=f(x_i(t),r(t))+c\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(r(t))\Gamma x_j(t)+\varphi(t,r(t))\mathrm{d}\omega(t),\ i=1,2,\cdots,N\tag{1.15}$$

式中，$\varphi(t)$ 是 Borel 可测函数，有的文献中它代表白噪声，$\omega(t)$ 是 Brownian 运动，满足 $\mathrm{E}(\omega(t))=0$, $\mathrm{E}(\omega^2(t))=\mathrm{d}t$。

综上，所介绍的马尔可夫切换复杂网络模型都是以连续时间为主，而离散型复杂网络模型在计算机计算等方面应用更加广泛，从而受到了越来越多的研究者的关注。离散型马尔可夫切换复杂网络模型为

$$x_i(k+1)=f(x_i(k),r(k))+c\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(r(k))\Gamma x_j(k),\ i=1,2,\cdots,N\tag{1.16}$$

式中，$\{r(k),k\geqslant 0\}$ 是一个在有限状态空间 $\Lambda=\{1,2,\cdots,M\}$ 上取值的马尔可夫链，其转移概率矩阵为 $\Pi=\{\pi_{ij}\}$，$(i,j)\in\Lambda$，

$$P\{r(k+1)=j:r(k)=i\}=\pi_{ij},\ \forall i,j\in\Lambda$$

且 $\pi_{ij} \geqslant 0(i,j \in \Lambda)$ 表示从 $i$ 到 $j$ 的转移概率。当然，离散型马尔可夫切换复杂网络还涉及时滞、随机扰动等现象的研究。王子栋和他的研究小组运用 LMI 方法研究了离散马尔可夫切换复杂网络的同步性问题 [30, 49]。对于离散型马尔可夫切换复杂网络的稳定性和同步性问题的研究得到了一些显著成果 [36, 52]。基于以上模型，对于网络的稳定性或同步性问题的研究主要包括以下两个方面：一是从动力学行为出发研究网络的稳定或同步从而给出判定条件，二是从网络结构出发，判断同步性能提高同步指标。针对网络同步性问题的研究，主要是采用 Lyapunov 稳定性定理、同步流形，矩阵不等式、自适应控制和牵制控制等方法，给出一些判定网络稳定或同步的标准和准则。

## 1.3 马尔可夫复杂网络应用

具有马尔可夫跳变的复杂网络在各个领域都有广泛应用背景。一方面，作为一类特殊的复杂网络，差分演化算法引起了人们的研究兴趣。在计算科学中，差分演化 (Differential Evolution, DE) 算法是演化算法的一个分支。最初由 K. Price 和 R. Storn 两位学者提出。与其他元启发式算法类似，通过反复尝试，依据给定的计量方法，提高候选解精度。差分演化算法将两个随机选择的种群向量做差，采用差分量来扰动目标向量。此外，DE 算法还通过一对一的贪婪逻辑来选择子代个体，只有当子代个体优于对应的父代个体时，才替换当前的目标个体。在过去的 10 年里，DE 算法凭借其简单性、可靠性、高性能和易于实施，被广泛地应用于解决多维的实值优化问题，那些问题甚至是不连续的、带噪声的、时变的。与此同时，研究人员也已经开发了大量的变体以改善 DE 算法的性能。

另一方面，混沌现象是复杂网络表现出的一类有趣的复杂非线性现象，归功于其在生物医学工程、保密通信、流体动力学和数据加密 [53] 的有效应用，混沌被用以分析系统的动力学特性。在过去几年里，整数阶混沌系统得到普遍的研究。最近，越来越多的学者将方向转向分数阶动力学系统的混沌特性 [54]。有研究表明：当阶次低于 3 时，分数阶 Rossler 系统产生混沌行为；当阶次低于 4 时，分数阶 Rossler 超混沌系统产生混沌行为 [55]。文献 [56] 讨论了分数阶 Lorenz 方程式的混沌行为。文献 [56] 中，证明了分数阶蔡氏电路的阶数低于 2.7 时，即产生混沌行为。当阶次低于 2 时，系统产生混沌。在研究混沌系统时，最重要的一个特征就是如何识别参数，最近很多学者利用差分算法研究分数阶系统的参数识别问题 [54]，然而，在大部分上述提及的算法中，收敛速度很慢，全局搜索性能还有待提高。

以上简述了近年来有关基因调控网络以及复杂网络方面的主要研究成果及研究方法。部分内容将在以后章节中详细介绍，有关其他的一些成果，感兴趣的读者可根据书后的文献查阅。

## 1.4 本书主要内容

本书主要介绍作者以及国内外学者近年来在基因调控网络以及复杂网络方面的研究成果，内容分 10 章进行介绍。

第 1 章介绍马尔可夫链、基因调控网络以及复杂网络方面的特点，同时介绍国内外学者在复杂网络背景下的动力学和应用研究概况。

第 2~8 章主要研究马尔可夫复杂动态网络的动力学分析，第 9 和第 10 章，是马尔可夫链模型在差分进化算法中的应用。

(1) 第 2 章，研究了具有混合时滞的马尔可夫基因调控网络的随机稳定性问题。相比较现有文献，考虑了离散时滞和分布时滞，在模型中引入了随机噪声。通过提出一个更加一般的 Lyapunov 泛函，利用时滞分割的技术，得到了所提网络模型随机稳定的充分性条件。由于使用了时滞分割的方法，本文结果的保守性要比现有文献中的保守性要低。最后，给出了几个例子来验证结果的有效性和低保守性。

(2) 第 3 章，详细研究了具有丢包和混合时滞的马尔可夫跳变离散型复杂网络的稳定和同步性问题。相比现有文献，混合时滞、丢包和量化误差等现象同时被考虑，通过利用丢包补偿和量化控制的方法，得到了使这类网络达到稳定和同步的条件。最后，给出了几个数值例子来验证结果的可行性和有效性。

(3) 第 4 章，提出一个带有时滞和随机扰动的马尔可夫切换复杂网络模型，并对此类网络模型进行有限时间簇同步研究。相比现有文献而言，所提出的模型考虑了时滞现象，而且保证在各个簇内的网络节点达到同步。通过构造适当的控制器和随机的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，利用有限时间稳定性定理，得到了这类复杂网络有限时间簇同步的条件。最后仿真实验和数值例子验证了所提方法的有效性。

(4) 第 5 章，利用有限时间稳定性定理，研究了带有部分未知转移率的马尔可夫切换时滞复杂网络的有限时间同步问题。与具有部分未知转移率的马尔可夫切换复杂网络的同步性研究文献相比，对所提出的模型考虑了有限时间同步问题。与研究时滞复杂网络有限时间同步的现有文献相比，这些文献研究的是有限时间有界的问题，而我们研究的是误差网络在有限时间内达到收敛的问题，从而推导出了误差系统有限时间稳定的判据，进而保证了此类复杂网络有限时间同步。最后，用仿真实例显示其结果的有效性。

(5) 第 6 章，研究了具有混合时滞的马尔可夫切换不确定奇异系统的耗散性和鲁棒稳定性问题。通过构造的广义 Lyapunov-Krasovskii 泛函和利用随机分析理论给出了所研究的奇异系统是随机容许的、鲁棒稳定的和 $(Q;R;S)$-$\alpha$-耗散的，而且所得判定条件是时滞依赖的。并给出数值例子来验证其结果的有效性，同时与其他文献比较结果具有较低的保守性。