中国矿业大学“211工程”三期创新人才培养项目资助出版

应用概率统计

YINGYONG GAILÜ TONGJI

周圣武　王亚军　张　艳　索新丽　韩　苗　刘海媛　主编

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

中国矿业大学“211工程”三期创新人才培养项目资助出版

应用概率统计

周圣武 王亚军 张 艳 索新丽 韩 苗 刘海媛 主编

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书根据教育部颁发的《工科研究生数学教学大纲》及有关工程硕士数学教学的要求，结合多年教学实践编写而成。内容按概率论、数理统计、Matlab软件三个部分的顺序分十一章叙述，第一章至第五章为概率论部分；第六章至第十章为数理统计部分；第十一章为概率统计的Matlab软件实现部分。本书遵照工科研究生的课程特点，突出课程的实用性和针对性，基础理论和实际应用紧密相连。全书内容详尽，难度适中，选材多样，各章都附一定数量的例题和习题，书后有全部习题的答案或提示，并附有常用分布的数表供读者使用。

本书可作为工程硕士研究生教材，也可供工科大学生和有志报考工学硕士研究生的考生学习使用，还可供工程技术人员、科研人员和相关课程的教师参阅。

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计/周圣武等主编. —2版. —徐州：中国矿业大学出版社，2015.3

ISBN 978-7-5646-2666-2

Ⅰ.①应… Ⅱ.①周… Ⅲ.①概率统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第060875号

书　　名 应用概率统计
主　　编 周圣武　王亚军　张　艳　索新丽　韩　苗　刘海媛
责任编辑 褚建萍
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编221008）
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 江苏淮阴新华印刷厂
开　　本 787×960　1/16　**印张** 17　**字数** 324千字
版次印次 2015年3月第2版　2015年3月第1次印刷
定　　价 27.00元

前　言

概率统计是概率论与数理统计的简称，有着很强的应用性，故又称为应用概率统计。概率论研究随机现象的统计规律性，数理统计研究样本数据的搜集、整理、分析和推断的各种统计方法。概率论产生于17世纪，起初是由保险业的发展而产生的，但却是当时赌博者的迫切请求成为了数学家们认真思考概率论中问题的动力源泉。近几十年来，随着科学技术的蓬勃发展，概率统计已经应用于国民经济、工农业生产的各个领域。不仅如此，许多后期兴起的应用数学分支，如信息论、对策论、排队论、控制论和随机过程论等也是以概率统计作为基础的。概率统计这门重要的数学分支正随着科技的进步尤其尖端科学与高新技术的发展，更加深入而密切地渗透于其他边缘学科和社会生产、生活的各个部门。

为了适应高等工科院校工程硕士研究生学习“应用概率统计”课程的需要，我们依据教育部颁发的《工科研究生数学教学大纲》及有关工程硕士数学教学的要求，结合自己数十载的教学实践和经验编写了此书。

全书内容按概率论、数理统计、Matlab 软件三个部分的顺序分十一章叙述，第一章至第五章的概率论部分介绍了概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等内容；第六章至第十章的数理统计部分讲述了样本与抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等内容；第十一章的概率统计 Matlab 软件实现部分详述了当今最热门的数学软件 Matlab 在概率统计中的应用。

本书的第一、二章由周圣武编写，第三、四章由王亚军编写，第五至第八章由张艳、索新丽编写，第九、十章由韩苗编写，第十一章由刘海媛编写。全书由周圣武统稿和审核。

应用概率统计是工程硕士教学指导委员会指定的工程硕士研究生必修学位基础课之一，希望本书的出版能对读者深入学习“应用概率统计”课程起到帮助和积极的指导作用。本书的出版得到了中国矿业大学研究生院的鼎力支持和中国矿业大学“211 工程”三期创新人才培养项目基金的资助；在本书组稿过程中，中国矿业大学数理统计课程的任课老师提出了许多宝贵的意见和建议。在此谨向他们和所有对本书的顺利出版给予支持和帮助的朋友表示衷心的感谢！本书编写时编者参考了大量的资料和教材，由于篇幅所限，参考文献未能一一列出，

在此谨向有关作者表示衷心的谢意！

由于编者水平有限、时间仓促，书中仍难免存在不少疏漏和错误之处，恳切希望广大读者对本书提出建议和意见，对不妥之处批评指正。

编　者

2014年1月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

自然界和人类社会发生的现象是多种多样的，通常可分为两大类：一类是在一定条件下必然发生的现象，称为**确定性现象**. 例如，向上抛一枚硬币必然落下；在标准大气压下，将水加热到 100 ℃，水必然沸腾. 另一类是在一定条件下，至少有两种可能的结果，但不能预先断定哪一个结果会出现，这种现象称为**随机现象**. 例如，在相同的条件下抛一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，这在每次抛掷之前都是无法确定的，但是在大量的重复观察中，它的结果又会呈现某种规律性，多次重复抛掷一枚硬币得到正面朝上和反面朝上的次数大致各占一半. 随机现象在个别试验或观察中呈现不确定的结果，而在大量重复试验或观察中，其结果呈现某种规律性，这种规律性称为**统计规律性**.

概率论与数理统计就是一门研究随机现象统计规律性的学科. 概率论研究随机现象、随机变量的规律性，数理统计研究的是如何有效地收集、整理、分析带有随机性的数据，从而对所考察的问题做出推断或预测，为科学决策提供依据和建议. 概率论与数理统计的理论和方法已被广泛地应用于科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门.

第一节　随机事件及其运算

一、随机试验

概率论研究那些发生结果具有不确定性的随机现象. 为了研究随机现象的规律性，通常就需要对研究对象进行重复观察，我们把对随机现象的观察称为**试验**. 例如，将一枚硬币抛掷三次，观察正反面出现的情况；掷一颗骰子，观察出现的点数；记录一天中进入图书馆的读者数；从一批灯泡中任意抽取一只，测试其寿命. 上述试验都具有如下三个共同特点：

(1) 可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，且事先明确知道试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果一定出现.

我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**，记为 E. 本书中以后提到的试验都是指随机试验.

二、随机事件与样本空间

随机试验 E 的每一个可能的基本结果称为**样本点**,记为 ω. 随机试验 E 的所有样本点组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 Ω.

在随机试验 E 中,把由若干个样本点组成的集合,即样本空间的一个子集称为**随机事件**,简称**事件**,一般记为 A、B、C 等. 例如,在随机试验"掷一颗骰子,观察出现的点数"中,若分别用 A 和 B 表示事件"出现的点数为奇数"和"出现的点数为偶数",则 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{2,4,6\}$.

如果在一次试验中事件 A 包含的某个样本点出现了,则称**事件 A 发生**,否则就称**事件 A 不发生**. 例如,在掷骰子试验中,以 A 表示出现奇数点,即 $A=\{1,3,5\}$,如果掷出点数 3,则事件 A 发生;如果掷出 4,则事件 A 不发生. 在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**. 由于样本空间 Ω 包含所有的样本点,在每次试验中它必然发生,因此 Ω 是一个必然事件. 在每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$,它是样本空间 Ω 的一个空子集. 只包含一个样本点的事件称为**基本事件**.

例 1.1 投掷一枚硬币,用 H(head) 表示硬币正面朝上,用 T(tail) 表示硬币反面朝上. 在试验"将一枚硬币抛掷三次,观察正反面出现的情况"中,事件 $A=$"三次中全部出现正面或全部出现反面"可表示为

$$A=\{HHH,TTT\};$$

事件 $B=$"三次中至少出现两次正面"可表示为

$$B=\{HTT,THT,TTH,TTT\};$$

在试验"从一批灯泡中任意抽取一只,测试其寿命"中,事件 $C=$"灯泡的寿命不超过 1 500 小时"可表示为

$$C=\{t \mid 0\leqslant t\leqslant 1\,500\}.$$

三、事件间的关系及其运算

由于事件是样本空间的一个子集,因此事件间的关系和运算也可以按照集合之间的关系和运算来处理. 设 Ω 为试验 E 的样本空间,$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 为 E 的事件.

(1) 若事件 A 的每一个样本点都包含在事件 B 中,即事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 B 包含事件 A** 或**事件 A 包含于事件 B**,记为 $A\subset B$. 图 1.1 为 $A\subset B$ 的文氏图. 显然对任意事件 A,都有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

(2) 由事件 A 与事件 B 的所有样本点组成的事件称为事件 A 与事件 B 的**和事件**,记为 $A\cup B$,即事件 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}$. 事件 $A\cup B$ 如图 1.2 中阴影部分所示.

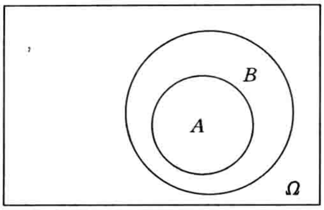

图 1.1　$A \subset B$

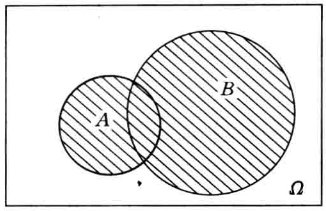

图 1.2　$A \cup B$

类似地，由 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的所有样本点组成的事件称为这 n 个事件的和事件，记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 由可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的所有样本点组成的事件称为这可列个事件的和事件，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

（3）由同时属于事件 A 与事件 B 的样本点组成的事件称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A \cap B$ 或 AB，即事件 $AB = \{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$. 事件 AB 如图 1.3 中阴影部分所示.

类似地，由 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 共同的样本点组成的事件称为这 n 个事件的积事件，记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. 由可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 共同的样本点组成的事件称为这可列个事件的积事件，记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

（4）由属于事件 B 而不属于事件 A 的样本点组成的事件称为事件 B 与事件 A 的**差事件**，记为 $B - A$，即事件 $B - A = \{\omega \mid \omega \in B$ 且 $\omega \notin A\}$. 事件 $B - A$ 如图 1.4 中阴影部分所示.

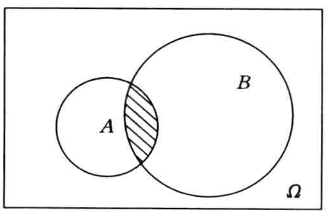

图 1.3　AB

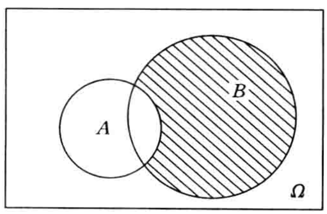

图 1.4　$B - A$

（5）若事件 A 与事件 B 没有共同的样本点，即 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**或**互斥**的. A 与 B 互不相容，是指事件 A 与事件 B 不能同时发生. 例如，基本事件之间是**互不相容的**. 事件 A 与 B 互不相容如图 1.5 所示.

类似地，对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果其中任意两个事件 A_i 与 A_j 互不相容，即 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **互不相容**.

(6) 若事件 A 与事件 B 满足 $AB = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$，则称事件 A 与事件 B **互为对立事件或互为逆事件**. 事件 A 与事件 B 对立，是指在每次试验中，事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，显然 $\overline{A} = \Omega - A$. 事件 A 与 $\overline{A}$ 如图 1.6 所示.

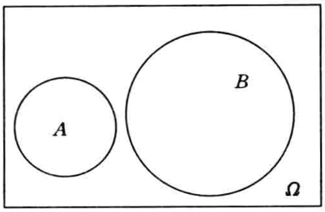

图 1.5　$A \cap B = \varnothing$

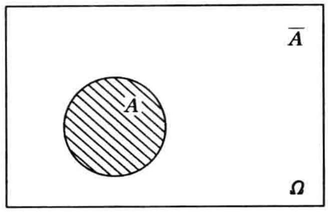

图 1.6　$\overline{A}$

由定义可知，对立事件必为互不相容事件；反之，互不相容的两个事件未必是对立事件.

设 A, B, C 为事件，对于事件之间的运算，则有以下运算律：

交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$；

结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$；

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

德·摩根(De Morgan)律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

例 1.2　设 A, B, C 为三个事件，试用 A, B, C 表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；　　(2) A, B, C 中恰有一个发生；

(3) A, B, C 中至少有一个发生；　　(4) A, B, C 中不多于两个发生；

(5) A, B 中至少有一个发生而 C 不发生；(6) A, B, C 中恰有两个发生.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}$；

(2) $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$；

(3) $A \cup B \cup C$，或 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$；

(4) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$，或 $\overline{ABC}$；

(5) $(A \cup B)\overline{C}$；

(6) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.

第二节　事件的概率

在一次随机试验中，某个随机事件 A 可能发生也可能不发生. 人们希望知道 A 在一次随机试验中发生的可能性的大小，给出随机事件发生可能性大小的定量描述，这种定量描述就是随机事件的概率. 人们是通过频率认识概率的，频率描述了事件发生的频繁程度.

一、频率

定义 1.1　设 A 是随机试验 E 的某个事件，若在相同条件下将试验 E 重复进行 n 次，其中事件 A 发生了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$.

由定义 1.1 易知，频率具有如下基本性质：

(1) 非负性：$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：$f_n(\Omega) = 1$；

(3) 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为互不相容的事件，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i).$$

由频率的定义可知，频率 $f_n(A)$ 表示事件 A 发生的频繁程度，$f_n(A)$ 越大表明事件 A 发生越频繁，即事件 A 在一次试验中发生的可能性越大，反之亦然. 实践证明频率具有随机波动性，即使同样进行 n 次试验，n_A 也会不同，但随着试验次数的增加，频率的波动幅度会越来越小，即随着试验次数 n 的增大，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于某个常数 $P(A)$. 常数 $P(A)$ 客观上反映了事件 A 发生可能性的大小. 这个常数 $P(A)$ 称为事件 A 发生的**概率**.

历史上著名的统计学家德 · 摩根(De Morgan)、蒲丰(Buffon)、皮尔逊(K. Pearson)、费勒(Feller)、罗曼诺夫斯基(Romannovsky) 等都曾进行过大量掷硬币的试验，所得结果如表 1.1 所示.

表 1.1　　**投硬币试验数据表**

试验者	掷硬币次数	出现正面的次数	出现正面的频率
德 · 摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

在上述掷硬币试验中，出现正面的频率总在0.5附近摆动，且随着试验次数的增加，它逐渐稳定于0.5，这个0.5就反映了正面出现的可能性的大小.

二、概率的定义

定义1.2 设随机试验E的样本空间为Ω，对E的每一事件A赋予一个实数$P(A)$，如果集合函数$P(\cdot)$满足以下三个公理：

(1) 非负性：$P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1$；

(3) 可列可加性：对于可列个互不相容的事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.1}$$

则称实数$P(A)$为事件A的**概率**.

三、概率的性质

由概率的定义1.2容易导出概率的一些基本性质：

性质1.1 不可能事件的概率为零，即$P(\varnothing) = 0$.

证 令$A_n = \varnothing (n = 1, 2, \cdots)$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$，且$A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$. 于是由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing).$$

再由概率的非负性$P(\varnothing) \geqslant 0$得$P(\varnothing) = 0$.

性质1.2 （有限可加性）若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{1.2}$$

证 令$A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，则有$A_iA_j = \varnothing (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots)$，由概率的可列可加性以及性质1.1得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(\varnothing) + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \end{aligned}$$

性质1.3 设A, B是两个事件，若$A \subset B$，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \tag{1.3}$$

$$P(B) \geqslant P(A). \tag{1.4}$$

证 因为$B = A \cup (B - A)$，且$A(B - A) = \varnothing$，所以由概率的有限可加性得

$$P(B) = P(A) + P(B - A),$$

故

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

又 $P(B-A)\geqslant 0$，从而有

$$P(B)\geqslant P(A).$$

性质 1.4　对于任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

证　由定义 1.2 知 $P(A)\geqslant 0$. 又因 $A\subset\Omega$，由性质 1.3 知 $P(A)\leqslant P(\Omega)=1$，所以

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

性质 1.5　对于任意事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.5}$$

证　因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$，且 $A\overline{A}=\varnothing$，由性质 1.2 得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$

所以

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

性质 1.6　对于任意两个事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.6}$$

证　因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$，故由性质 1.2 和性质 1.3 得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

式(1.6)可以推广到有限个事件的情况. 对于任意三个事件 A，B，C，则有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \tag{1.7}$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，应用数学归纳法容易得到一般的加法公式

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.8}$$

例 1.3　已知 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(AB)=\dfrac{1}{4}$，求 $P(\overline{A}B)$，$P(A\overline{B})$.

解　因为 $P(AB)=\dfrac{1}{4}$，所以

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

例 1.4　已知 $P(\overline{A})=0.5$，$P(\overline{A}B)=0.3$，$P(B)=0.4$，求：

(1) $P(AB)$；　(2) $P(A-B)$；　(3) $P(A\cup B)$；　(4) $P(\overline{A}\overline{B})$.

解　(1) 因为 $AB\cup\overline{A}B=B$，且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容，所以有

$$P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B),$$

于是

$$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.3=0.1;$$

(2) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.5=0.5$,

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.1=0.4;$$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.1=0.8$;

(4) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.8=0.2$.

例 1.5　已知 $P(A)=\dfrac{1}{3}, P(B)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 当 A,B 互不相容时，求 $P(\overline{A}B)$；

(2) 当 $A\subset B$ 时，求 $P(\overline{A}B)$.

解　(1) 当 A,B 互不相容时，$AB=\varnothing$，所以

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2};$$

(2) 当 $A\subset B$ 时，$AB=A$，所以

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

例 1.6　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，试求 A、B、C 都不发生的概率.

解　由于 $P(AB)=0$ 且 $ABC\subset AB$，故由概率的性质可知

$$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0,$$

从而 $P(ABC)=0$，再由加法公式得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{3}{4}-\frac{2}{16}=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

所以 A、B、C 都不发生的概率为

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}.$$

例 1.7　(订报问题) 某市发行 A，B，C 三种报纸，已知市民中订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，订阅 C 报的有 30%，同时订阅 A 报和 B 报的有 10%，同时订阅 A 报和 C 报的有 8%，同时订阅 B 报和 C 报的有 5%，同时订阅 A，B，C 报的有 3%. 试求下列事件的概率：

(1) 只订 A 报纸；　　(2) 只订 A,B 两种报纸；

(3) 至少订一种报纸；　　(4) 不订任何报纸.

解　设 A,B,C 分别表示“订 A 报”、“订 B 报”、“订 C 报”的事件，则

$$P(A)=0.45,\quad P(B)=0.35,\quad P(C)=0.3,\quad P(AB)=0.1,$$
$$P(AC)=0.08,\quad P(BC)=0.05,\quad P(ABC)=0.03.$$

(1) 只订 A 报的事件为 $A-A(B\cup C)$，因此

$$\begin{aligned}P(A-A(B\cup C))&=P(A)-P(A(B\cup C))=P(A)-P(AB\cup AC)\\&=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)\\&=0.45-0.1-0.08+0.03=0.3\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(AB\bar{C})&=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)\\&=0.1-0.03=0.07.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-\\&\quad\ P(BC)+P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.3-0.1-0.08-0.05+0.03\\&=0.9.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})&=1-P(\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-0.9=0.1.\end{aligned}$$

第三节　等可能概型

等可能概型也称为古典概型，它是概率论历史上最先被研究的概率模型，是一类比较简单的随机试验类型.

定义 1.3　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，若该试验满足下列条件：

(1) 有限性：试验 E 的样本空间中只有有限个样本点，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\};$$

(2) 等可能性：每个基本事件的发生是等可能的，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\});$$

则称试验 E 为**等可能概型**或**古典概型**.

在等可能概型中，由于基本事件是互不相容的，因此由概率的有限可加性可得

$$1=P(\Omega)=P\Big(\bigcup_{j=1}^{n}\{\omega_j\}\Big)=\sum_{j=1}^{n}P(\{\omega_j\})=nP(\{\omega_i\}),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

于是