

中國科學院數學研究所力學研究室專刊

乙 種

第 1 號

力學問題論集第一輯

彈性圓薄板大撓度問題

中國科學院數學研究所力學研究室編輯

中國科學院出版

力學問題論集第一輯

彈性圓薄板大撓度問題

中國科學院數學研究所力學研究室
力學討論會報告彙編

錢偉長 林鴻蓀
胡海昌 葉開沅

中國科學院數學研究所力學研究室編輯
中國科學院出版
1954年 北京

中國科學院數學研究所力學研究室專刊
乙種 第1號

彈性圓薄板大撓度問題

中國科學院數學研究所力學研究室編輯

中國科學院出版
北京(7)文津街3號

藝文書局鑄字印刷廠印刷
上海嘉善路113號

新華書店發行

(專) 54023

自然: 043

(滬) 0001-2,100

字數: 138,600

1954年8月第一版

1954年8月第一次印刷

開本: $787 \times 1092 \frac{1}{16}$

印張: $8 \frac{5}{8}$

定價: 15,000

序

中國科學院數學研究所力學研究室曾在 1953 年冬季聯合北京西郊各大學的力學工作者，進行了一系列的科學報告會，這些報告會的中心主題是圓薄板的大撓度問題。這本書就是這些報告會上所報告的論文彙編。

圓薄板的大撓度問題主要分三個部分：即圓薄板在橫向載荷下的大撓度問題，球面扁薄圓壳的穩定問題，和圓薄板邊周受壓後的屈曲問題。我們在這些方面都有比較詳盡的介紹和討論。

第一個報告介紹了圓薄板在橫向載荷下大撓度問題的一般解法，主要是資本主義國家的學者的工作。第二個報告全面地介紹了蘇聯學者在圓薄板大撓度問題方面的工作。第三、第四兩個報告介紹了我們自己在圓薄板大撓度問題上用攝動法進行研究所得的結果。第五個報告介紹了球面扁薄圓壳穩定性問題的工作，這個工作在以前尚未發表過。第六個報告介紹了圓薄板邊周受壓後的屈曲問題。最後我們發表了總結討論會上各位參加報告會的力學工作者討論發言的提綱。那一次的討論會發言是很熱烈的，但是限於篇幅，我們不可能全部發表。

在最後的總結討論會上，所有參加的力學工作者全面地研究了圓薄板大撓度問題的發展方向，指出了在這方面還有不少實用的問題等着我們去解決。討論會上也提出了圓薄板大撓度問題方面的補充資料與文獻。所有這些都將推動圓薄板大撓度問題的科學研究工作的進一步開展。

我們必須要指出，圓薄板大撓度問題在造船、化工設計、儀器製造等方面都有實際應用價值。蘇聯在這方面的工作非常豐富。但是由於缺乏蘇聯的雜誌和書籍，有些部分沒有能夠獲得直接的資料。這裏所介紹的蘇聯材料中，有一部分是間接收集得到的。

我們希望，這些報告的發表將有助於國內力學工作者們對於圓薄板大撓度問題工作的研究。

參加這個報告會的，除了中國科學院數學研究所力學研究室外，有北京大學、清華大學、北京礦業學院、北京鋼鐵學院、北京航空學院、北京石油學院、鐵道部鐵道研究所的力學工作者。這個報告會的收穫，和所有參加者的熱情支持和盡情的討論是分不開的。

這個力學報告會仍在繼續進行，目前所報告的第二個主題是一般薄板問題。報告會的結果將來也要彙編起來出版，以供各有關方面參考。

錢偉長

1954 年 3 月

目 錄

序

1. 軸對稱圓薄板在大撓度情形下的一般理論 錢偉長 (清華大學, 及中國科學院數學研究所) 1
2. 蘇聯在圓形薄板和圓形扁薄殼的大撓度問題方面的貢獻 胡海昌 (中國科學院數學研究所) 23
3. 圓薄板大撓度理論的攝動法 錢偉長 (清華大學, 及中國科學院數學研究所) 37
4. 環形薄板的大撓度問題 葉開沅 (北京大學) 56
5. 球面扁薄圓殼的跳躍問題 胡海昌 (中國科學院數學研究所) 76
6. 圓板屈曲問題中的邊界層現象 林鴻孫 (中國科學院數學研究所) 98
7. 關於以上各個報告的討論 116

軸對稱圓薄板在大撓度情形 下的一般理論

錢 偉 長

(清華大學及中國科學院數學研究所)

一. 泊松的圓薄板小撓度理論^[1] (1829)

泊松的圓薄板小撓度理論有下列假定：

- 1) 載荷垂直板面, 並且與軸對稱, 因此板的彎曲也是軸對稱的.
- 2) 板的厚度很小, 亦即 $\frac{h}{a} \ll 1$; 此處 h 為板的厚度; a 為板的半徑, 我們將假定板是等厚的.

3) 板的撓度很小, 撓度指板的中面向側面的位移, 以後用 w 來表示; 撓度的大小應該用板的厚度來量, 因此 $\frac{w}{h} \ll 1$.

從假定 1) 我們將認為板的一切應變和應力都是軸對稱的; 因此都假定是向徑 r 的函數. 從假定 3) 我們將認為板內因彎曲而生的平面應力, 對板的平衡的影響很小; 因此, 如在板的四週並未外加拉力或壓力, 則我們可以完全忽視平面應力的存在來考慮板的橫向平衡; 亦即是說, 只要考慮彎曲力矩對平衡的影響就可以了. 所以有時泊松理論也被稱為純彎曲理論. 再者, 從假定 3) 我們指

出了板在彎曲後還是很平服的, 斜度很小, 因此曲率也很小. 我們於是得下列幾何關係(如圖 1):

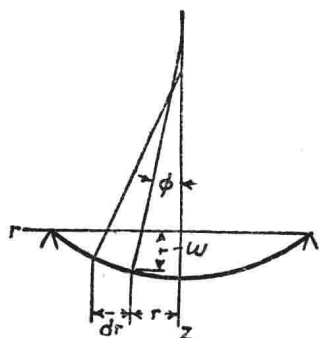


圖 1. 圓板的撓度

$$\left. \begin{aligned} \phi &\sim \tan \phi = -\frac{dw}{dr}, \\ \frac{1}{\rho_r} &= \frac{d\phi}{ds} \sim \frac{d\phi}{dr} \sim -\frac{d^2w}{dr^2}, \\ \frac{1}{\rho_t} &= \frac{\sin \phi}{r} \sim \frac{\phi}{r} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

這裏的 ϕ 是板上各點的斜度角, s 是板上各點離中心點順着板面的徑距. ρ_r 和 ρ_t 各為徑向和周向的曲率半徑.

根據假定 3), 我們可以把厚度因載荷而生的變化略去不計, 或即是說, 在 z 方向的應力略而不計. 因此, 徑向和周向的應變 ϵ_r 和 ϵ_t , 及徑向和周向的應力 σ_r 和 σ_t 就有下列關係:

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \mu \frac{\sigma_t}{E}, \quad \epsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} - \mu \frac{\sigma_r}{E}. \quad (2)$$

這裏的 μ 是泊松比, E 是楊氏彈性係數. 但是由於假定 2) 的推論, 在圓板中面上應力都等於零, 或是中面應變等於零. 因此圓板上離中面各點的應變就和該點離中面的垂直距離 z 成正比. 根據彎曲梁相同的看法, 我們得到

$$\epsilon_r = \frac{z}{\rho_r}, \quad \epsilon_t = \frac{z}{\rho_t}. \quad (3)$$

把 (1), (3) 兩式代入 (2) 式, 解出 σ_r , σ_t , 即得

$$\sigma_r = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad \sigma_t = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2w}{dr^2} \right). \quad (4)$$

因此, 如以圓板中面的元素 $abcd$ 為例 (見圖 2), 作用在 cd 上的撓矩, 每單位長度為 M_r , 作用在 bc 上的撓矩, 每單位長度為 M_t . 於是

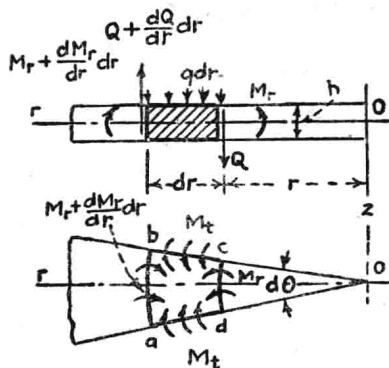


圖 2. 圓板的平衡和它的兩個剖面

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = -D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_t &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t z dz = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2w}{dr^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

這裏的 D 是抗撓剛度，是代表圓板抗拒彎曲的一種性能。它和梁的理論中的 EI 相似。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (6)$$

這樣一塊圓板的平衡問題，和細梁的平衡問題，基本上是相似的。在 ab 和 cd 面上，也有切力 Q 和 $Q + dQ$ ，但在 da 和 cb 面上，由於軸對稱關係，切力等於零。因此， $abcd$ 面上，有 M_r ， M_t ， Q ，和 q 等力或力矩作用着，平衡時有兩個條件，即力矩平衡，和力的平衡。此處 q 是平板面上每單位面積所受的垂直力。

力矩平衡時，我們不僅考慮到 Q 和 M_r 對 $abcd$ 的力矩作用，並且要注意到 M_t 有一個分量 $2 M_t \sin \frac{d\theta}{2} \sim M_t d\theta$ 作用在 dr 的截面裏，因此

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr\right)(r+dr) d\theta - M_r r d\theta - M_t dr d\theta + Qr d\theta dr = 0.$$

將上式化簡並略去高次項，即得力矩平衡式

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_t + Qr = 0. \quad (7)$$

從力的平衡，我們得到

$$\left(Q + \frac{dQ}{dr} dr\right)(r+dr) d\theta - Qr d\theta - qr dr d\theta = 0.$$

或是，化簡並略去高次項。我們得到力平衡式

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rQ) = q. \quad (8)$$

若將 (5) 式代入 (7) 式，我們可得

$$\frac{Q}{D} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr}. \quad (7a)$$

又將 (7a) 代入 (8)，我們就得到有名的圓板平衡方程

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D}. \quad (9)$$

這個方程的積分在 q 是 r 的已知函數的情況下是不難求得的。如 q 是常數，則其解為

$$w = \frac{qr^4}{64D} + \frac{c_1^2 r}{4} + c_2 r^2 \log r + c_3 \log r + c_4. \quad (10)$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 各個常數應該從各種裏外邊界條件來決定。在這裏必需再度指出，(9) 式和細梁彎曲平衡方程在本質上是相對應的，雙方所用的假定也是互相對應的。

二. 卡門的圓薄板大撓度理論^[2] (1910)

假如我們進一步研究薄板在撓度較大的情況下的平衡，則小撓度理論中關於軸對稱和關於薄板的假定仍舊適用，但是關於撓度的大小我們要假定 $\frac{w}{h} \approx 1$ ，或略大於 1。因為撓度的大小和厚度相若，厚度對於半徑來講是很小的，所以在彎曲後，板面的曲率仍不很大，(1) 式仍適用。但是因為 w 究竟比較大些，它的增長，逐步地在平板面內產生薄膜張力。這張力的大小，可以根據平板在彎曲後所產生的應變計算出來。今令平板中某點 P 的徑向位移為 u ，撓度為 w ，則徑向元素 AB 在變形後，變成 $A'B'$ ，後者的長度是 (圖 3)：

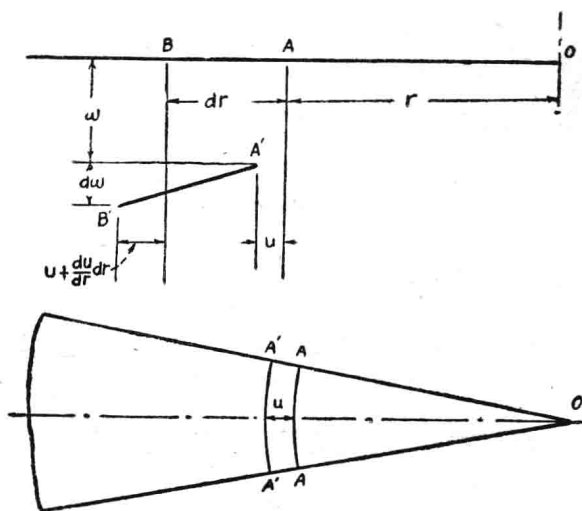


圖 3. 圓板大撓度情況的位移

$$A'B' = \sqrt{\left(u + \frac{du}{dr} dr + dr - u\right)^2 + \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 dr^2} \approx \left\{1 + \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right\} dr.$$

因此，圓板中面上的應變是：在徑向為

$$\epsilon_r' = \frac{A'B' - AB}{AB} \cong \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2, \quad (11)$$

在周向則為

$$\epsilon_t' = \frac{A'A' - AA}{AA} = \frac{(u+r) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}. \quad (12)$$

在圓板內離開中面的各點上，應變除 ϵ_r' ，及 ϵ_t' 外，還包括因彎曲而生的一部分（即（3）式所示），因此，圓板內部各點的應變是

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon_r' + \frac{z}{\rho_r} = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 - z \frac{d^2 w}{dr^2}, \\ \epsilon_t &= \epsilon_t' + \frac{z}{\rho_t} = \frac{u}{r} - z \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

而應力在內部各點是

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r + \mu \epsilon_t) = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r' + \mu \epsilon_t') + \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{\rho_r} + \frac{\mu}{\rho_t}\right), \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_t + \mu \epsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_t' + \mu \epsilon_r') + \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{\rho_t} + \frac{\mu}{\rho_r}\right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

從（14）式，我們很容易計算板內任何垂直截面所受內力的合力及力矩，讓我們叫徑向和周向的合力為 N_r ， N_t ；而彎曲力矩目前仍為 M_r 及 M_t ，於是

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = h \sigma_r' = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 + \mu \frac{u}{r}\right), \\ N_t &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t dz = h \sigma_t' = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} + \mu \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right], \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right), \\ M_t &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t z dz = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

這個大撓度的圓薄板是在合力 N_r , N_t , 撓矩 M_r , M_t , 切力 Q 和垂直荷載 q 聯合作用取得平衡。因此, 平衡方程便比較複雜, 首先在研究力的平衡時, 我們不僅要像在小撓度時一樣要考慮 Q 和 q 的作用, 並且也必需要考慮 N_r 和 N_t 的作用, 在圖 4 的情況下, AB 的平衡位置是 $A'B'$ 。在這個位置上, A' 點的 N_r 有一個分量 $N_r \sin \phi$, 或 $N \phi = -N \frac{dw}{dr}$ 向下作用。同樣 B' 點的 $N_r + \frac{dN_r}{dr} dr$ 也有一個分量向上作用。因此 $AABB$ 元素在平衡時應該有

$$\left(N_r + \frac{dN_r}{dr} dr\right)(r + dr) d\theta - N_r r d\theta - 2N_t dr \sin(d\theta) = 0,$$

$$\begin{aligned} &\left(Q + \frac{dQ}{dr} dr\right)(r + dr) d\theta - Qr d\theta - qr dr d\theta + \\ &+ \left(N_r + \frac{dN_r}{dr} dr\right)(r + dr) \sin\left(\phi + \frac{d\phi}{dr} dr\right) d\theta - N_r r \sin \phi d\theta = 0. \end{aligned}$$

這兩個平衡式經簡化後可得

$$\frac{d}{dr}(r N_r) - N_t = 0, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dr}(r Q) - \frac{d}{dr}\left(r N_r \frac{dw}{dr}\right) - q r = 0. \quad (18)$$

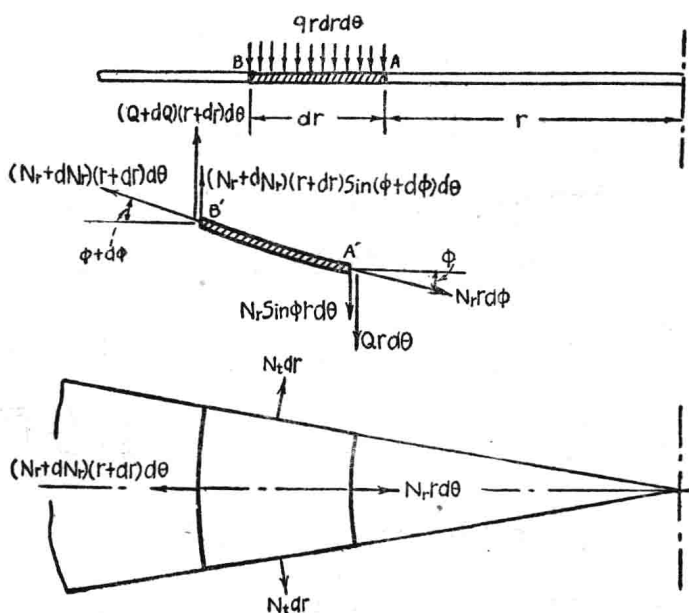


圖 4. 大撓曲情況下力的平衡

在大撓度情況下，力矩平衡並無改變，仍與小撓度的情況相同，亦即仍可用 (7a) 式。

若以 (7a) 式代入 (18) 式，我們就得到下式：

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r N_r \frac{dw}{dr} \right) = q. \quad (19)$$

(17) 及 (19) 式為決定 w , N_r , N_t 三個未知數的兩式，其第三式可以從 (15) 式內消去 u 得到。從 (15) 式，

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{Eh} (N_t - \mu N_r), \quad (20)$$

再用 (17) 式，

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{Eh} \left(\frac{d}{dr} (r N_r) - \mu N_r \right). \quad (20a)$$

將本式裏的 u 代入 (15) 式的第一式，即得

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) \right] + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (21)$$

這個式子有時叫做協調方程，因為從這個方程，我們可以看到從多少撓度，將產生多少薄膜張力（或是中面的伸縮），指出中面伸縮和撓度之間受有幾何性質的限制，它們不能獨立形成，它們必須互相協調。

我們必須指出，(19) 式中的第二項代表平板內的薄膜張力對於平板平衡的影響，這種影響有助於平板抗拒側面載荷。

(19), (21) 兩式為決定 w , N_r 的兩式，決定後從 (7a) 式求 Q ，從 (17) 式求 N_t ，從 (20) 式求 u 。

(19), (21) 就是有名的卡門平板大撓度方程。它們是非線性的，所以解法比較困難。

在這裏也應該指出，從 (21) 式中可以看出 N_r 是與 $\frac{dw}{dr}$ 的平方大小略等的數量。因此 (19) 式的第二項相當於 $\frac{dw}{dr}$ 大小的三次方。亦即是說，這第二項的大小相當於撓度的三次方，但是 (19) 式的第一項是撓度的線性項；所以當撓度很小時，撓度的三次方項就一定比線性項小，因此可以略去不計；於是 (19) 式

就還原成爲第(9)式,即還原成爲泊松的小撓度理論方程。

當撓度和厚度的大小相當時, $\frac{w}{h}$ 的大小約等於 1, 因此它的線性項和三次方項大小相當, (19) 式中各項都成了大小相當的數量, 因此就不能隨便略去。

當撓度很大時, 或是當撓度比厚度大幾十倍或更大時, $\frac{w}{h} \gg 1$, 撓度的線性項就比撓度的三次方項小得很多, 於是 (19) 式中的第一項 (即線性項) 可以略去不計, 這就指出, 當撓度大時, 對平衡起決定作用的是板內的薄膜應力所發生的作用, 而板內的撓矩所生作用可以略去不計。因此, 這好像相當於一片圓形薄膜在平衡時的情形, 所以有時也把這種情形叫做薄膜理論。

與細梁的問題相比較, 可知薄板的小撓度泊松理論相當於細梁的小撓度理論, 亦即是材料力學裏的細梁理論。薄板的大撓度卡門理論, 相當於細梁受拉力時的平衡理論^[3]。薄板在更大撓度時的薄膜理論, 相當於彈性懸索的理論。

這裏還須指出: 方程 (19) 在均勻載荷的情況下, 亦即是在 q 是常數的情況下, 是很容易積分一次的, 假如我們研究的是一塊完全的圓板, 則 (19) 的第一次積分在一般情形下是

$$D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - N_r \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr, \quad (22)$$

(22) 式和 (21) 式是一般完全圓板在軸對稱的載荷下的大撓度方程。在最近四十年來, 人們一直在用各種各樣的方法研究在各種邊界條件下的應力及撓度的分佈情況。

三. 漢蓋的圓薄膜解法^[4] (1915)

上面已經指出, 如撓度很大, 撓矩對於圓薄板平衡的影響可以略去不計, 於是圓薄板就好像一片圓薄膜, 漢蓋考慮了一片受均勻載荷圓薄膜, 在四周壓緊下的撓曲情形。漢蓋的方法基本上是正確的, 而因為長期未發現在數字計算上存在着錯誤, 所以一直被各書廣泛引用。以下是漢蓋的理論經重新整理後的情況^[5]。

在略去撓矩後, (22), (21), (17) 各式可以寫成:

$$N_r \frac{dw}{dr} = -\frac{1}{2} q r, \quad (23)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) \right] + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0, \quad (24)$$

$$-\frac{d}{dr} (r N_r) - N_t = 0. \quad (25)$$

此處 q 假定是常數，邊界條件是：

$$\text{當 } r = a \text{ 時, } w = 0, \quad \frac{u}{r} = \frac{1}{Eh} [N_t - \mu N_r] = 0, \quad (26)$$

$$\text{當 } r = 0 \text{ 時, } N_r = \text{有限值}. \quad (27)$$

我們的問題是要在 (26), (27) 的邊界條件下解 (23), (24), (25) 各式。現在讓我們先把各種數量變為無量綱的純數：

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{w}{h}, \quad S_r = \frac{a^2 N_r}{Eh^3}, \quad S_t = \frac{a^2 N_t}{Eh^3}, \\ P &= \frac{a^4 q}{Eh^4} (1 - \mu^2), \quad x = \frac{r^2}{a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

將其代入 (23)–(27) 式即得平衡方程和協調方程：

$$\frac{d^2}{dx^2} (x S_r) + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 = 0, \quad (29a)$$

$$P = -4 \left(\frac{dW}{dx} \right) S_r (1 - \mu^2), \quad (29b)$$

$$S_t = S_r + 2x \frac{dS_r}{dx}. \quad (29c)$$

以及邊界條件：

$$\text{當 } x = 1 \text{ 時, } W = 0, \quad S_t - \mu S_r = 0, \quad (30a)$$

$$\text{當 } x = 0 \text{ 時, } S_r = \text{有限值}. \quad (30b)$$

從 (29a), (29b) 兩式中消去 $\frac{dW}{dx}$ 即得一個只包含 S_r 的方程

$$\frac{d^2}{dx^2} (x S_r) + \frac{P^2}{32 (1 - \mu^2)^2 S_r^2} = 0. \quad (31)$$

今若將 $x S_r$ 代之以 $Z(x)$ ，即將

$$x S_r = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{2(1-\mu^2)} \right)^{2/3} Z \quad (32)$$

代入 (31) 式，即得一非線性方程

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = - \frac{x^2}{Z^2}. \quad (33)$$

這個方程的全解應有兩個常數，中間有一個常數在解答內所佔有的地位是很容易看出來的。讓我們使

$$Z_1 = c^{4/3} Z, \quad x_1 = cx. \quad (34)$$

則 (33) 式可以寫成

$$\frac{d^2 Z_1}{dx_1^2} = - \frac{x_1^2}{Z_1^2}. \quad (35)$$

x_1 及 Z_1 的關係式仍不包括常數 c 。因此我們可以肯定：如 $Z(x)$ 是我們的解，則 $c^{-4/3} Z(cx)$ 也一定是我們的解。這裏 c 是一個任意常數，所以是一個積分常數。現在讓我們進一步求 (33) 式的一個特解。設

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n. \quad (36)$$

這個形式的解已滿足邊界條件 (30b)，代入 (33) 式，得

$$\left. \begin{aligned} 2a_1^2 a_2 &= -1, \\ \sum_{n+l+k-3=m} a_n a_l a_k k(k+1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{當 } k, l, n=1, 2, 3, \dots, \\ &m \geq 3. \end{aligned} \quad (37)$$

這裏只有一個未知數不定，即是 a_0 。我們將選擇 a_0 使等於最簡單的數值 1，這一舉動對解答的普遍性問題，因有 (34)，(35) 的關係存在，所以並不受到影響。從 $a_0 = 1$ ，我們立刻由 (37) 的第一式得到 $a_2 = -\frac{1}{2}$ 。其他各係數，我們由下列推算式逐一求取。

$$a_{m+2} = - \frac{1}{(m+1)(m+2)} \sum_{k=1}^m a_{k+1} k(k+1) \left[\sum_{n+l=m-k+3} a_n a_l \right]. \quad (38)$$

因此,我們可得

$$Z(x) = xf(x), \quad (39)$$

這裏的 $f(x)$ 是

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{144}x^3 - \frac{17}{288}x^4 - \frac{37}{864}x^5 - \frac{1205}{36288}x^6 - \\ - \frac{219241}{8128512}x^7 - \dots \quad (40)$$

從 (32) 和 (34) 式,我們可以斷定 S_r 的解是

$$S_r = \left[\frac{Pc}{2(1-\mu^2)} \right]^{2/3} \frac{1}{2c} f(cx). \quad (41)$$

同樣,在周向的 S_t 根據 (29c) 是

$$S_t = \left[\frac{Pc}{2(1-\mu^2)} \right]^{2/3} \frac{1}{2c} [f(cx) + 2cx f'(cx)]. \quad (42)$$

常數 c 於是可以用僅剩的一個邊界條件 (30a) 來決定:

$$f(c)(2-\mu) + 2cf'(c) = 0. \quad (43)$$

這個式子是 c 的無窮級數: 從此式求根,可以將 (43) 寫成下式,再用逐步漸近法.

$$c = \sigma - \sum_{n=2}^{\infty} b_n c^n; \quad (44)$$

此處

$$\sigma = \frac{2(1-\mu)}{3-\mu}, \quad b_2 = \frac{5-\mu}{3(3-\mu)}, \quad b_3 = \frac{13}{72} \frac{(7-\mu)}{(3-\mu)}, \\ b_4 = \frac{17}{144} \frac{(9-\mu)}{(3-\mu)}, \quad b_5 = \frac{37}{432} \left(\frac{11-\mu}{3-\mu} \right), \quad b_6 = \frac{1205}{18144} \left(\frac{13-\mu}{3-\mu} \right), \\ b_7 = \frac{108427}{1354742} \left(\frac{15-\mu}{3-\mu} \right), \quad \text{並以此類推.} \quad (44a)$$

在一般實際情況下, σ 和 b_n 都比 1 小. 因此,我們可以用逐步漸近法求出 c 用 σ 的級數來表示的形式:

$$\begin{aligned}
c = & \sigma - b_2 \sigma^2 - (b_3 - 2b_2^2) \sigma^3 - (b_4 - 5b_3 b_2 - 5b_2^3) \sigma^4 - \\
& - (b_5 - 3b_2^2 - 6b_4 b_2 + 21b_3 b_2^2 + 14b_2^4) \sigma^5 - \\
& - (b_6 - 7b_3 b_4 - 7b_2 b_5 + 28b_2 b_3^2 + 28b_2^2 b_4 - 84b_3 b_2^3 + 42b_2^5) \sigma^6 - \dots. \quad (45)
\end{aligned}$$

我們把對應於不同 μ 值的 c 值的數字列表如下：

$\mu = .250$	$.275$	$.300$	$.325$	$.350$
$c = .405$	$.397$	$.390$	$.382$	$.374$

若把 (41) 代入 (29b) 式, 我們即得

$$\frac{dW}{dx} = - \left[\frac{Pc}{2(1-\mu^2)} \right]^{1/3} [f(cx)]^{-1} = - \left[\frac{Pc}{2(1-\mu^2)} \right]^{1/3} h(cx). \quad (46)$$

$h(x)$ 也可以用級數來表示：

$$\begin{aligned}
h(x) = \frac{1}{f(x)} = & 1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{12}x^2 + \frac{55}{144}x^3 + \frac{36}{96}x^4 + \frac{205}{576}x^5 + \\
& + \frac{17051}{48284}x^6 + \frac{2864485}{8128512}x^7 + \dots. \quad (47)
\end{aligned}$$

若將 (47) 式在 (30a) 的邊界條件之下積分, 我們可得到

$$W = \left[\frac{cP}{2(1-\mu^2)} \right]^{1/3} [g(c) - xg(cx)]. \quad (48)$$

這裏的 $g(x)$ 也可用級數來表示：

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x h(x) dx = & 1 + \frac{1}{4}x + \frac{5}{36}x^2 + \frac{55}{576}x^3 + \frac{7}{96}x^4 + \\
& + \frac{305}{3456}x^5 + \frac{51153}{1016064}x^6 + \frac{2864485}{63028096}x^7 + \dots. \quad (49)
\end{aligned}$$

因此, 在圓板中心, $x = 0$, 我們得到

$$W_m = g(c) \left[\frac{cP}{2(1-\mu^2)} \right]^{1/3}, \quad S_r = \frac{1}{2c} \left[\frac{cP}{2(1-\mu^2)} \right]^{2/3}; \quad (50)$$

或是