

# 凝固

## SOLIDIFICATION

〔美〕 J.A.Dantzig, 〔瑞士〕 M.Rappaz 著  
刘 峰 介万奇 译

# 凝 固

Solidification

〔美〕 J. A. Dantzig    〔瑞士〕 M. Rappaz 著  
刘 峰    介万奇 译

科 学 出 版 社

北 京

图字：01-2015-2260

## 内 容 简 介

本书根据 Dantzig 和 Rappaz 所著的 *Solidification* 翻译而成。全书主要分为三部分。第一部分为理论基础和宏观现象，包括溶体的热力学理论、平衡相图、传输现象以及液固相变中一些重要问题。第二部分运用形核、枝晶生长、微观偏析、共晶/包晶凝固、组织形成竞争等基本概念对凝固微观组织进行描述，重点讨论组织形成过程中宏观、微观现象的耦合。第三部分讨论凝固过程中形成的缺陷，重点介绍空位、热裂和宏观偏析。

本书可以作为材料类专业本科生和研究生的教材，也可供相关领域的研究人员学习和参考。

Originally published in English under the title: "Solidification"

© 2009 Presses polytechniques et universitaires romandes/EPFL-Press, Lausanne, Switzerland

All rights reserved

### 图书在版编目 (CIP) 数据

凝固 / (美) 丹齐格 (Dantzig, J. A.), (瑞士) 拉帕兹 (Rappaz, M.) 著; 刘峰, 介万奇译. — 北京: 科学出版社, 2015

书名原文: Solidification

ISBN 978-7-03-044230-0

I. ①凝… II. ①丹…②拉…③介… III. ①凝固-研究 IV. ①0552.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 095054 号

责任编辑: 吴凡洁 乔丽维/责任校对: 桂伟利

责任印制: 肖 兴/封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2015年5月第一版 开本: 787×1092 1/16

2015年5月第一次印刷 印张: 28 1/4

字数: 642 000

定价: 120.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

## 前 言

现代凝固科学诞生于 20 世纪 40 年代，从那时起，材料工程师就开始使用解析方法和解析模型来描述凝固过程。1940 年，Chvorinov 采用热流分析，预测砂型铸造中凝固形貌和铸造缺陷。50 年代，Chalmers 和他的同事通过分析移动的固-液界面处热平衡和溶质平衡，解释了定向凝固中的平界面失稳现象。这部分工作以 1964 年 Chalmers 的著作《凝固原理》为研究巅峰。

20 世纪 60 年代，基于 Chalmers 的理论，Mullins 和 Sekerka 从数学角度提出更为严格的稳定性分析。在 60 年代末期及 70 年代，Flemings 和他的同事在微观尺度上运用热平衡和溶质平衡分析，发展了用于描述溶质偏析和其他微观结构特征的模型。1974 年，Flemings 延续 Chalmers 的工作，出版了《凝固过程》一书，以反映这个时代所取得的成就。

随后的 10 年，大量的研究集中在对微观结构的探讨上，其本质为组织形态选择问题，即热量、溶质传输与表面能决定的材料本征尺寸间的竞争。1984 年，Kurz 和 Fisher 撰写的《凝固原理》一书对这部分工作做了总结。

正值该著作出版之际，成本低廉且拥有强大运算能力的计算机开始普及，凝固模型也开始发生变革。计算方法的发展，使更为精确的模型得以建立，并在阐明许多重要现象方面发挥了强大的作用。如今，从定向凝固涡轮叶片到汽车引擎，工程师能够按部就班地建立这些复杂结构部件的凝固模型。在微观尺度上，计算模型可以有效地阐释凝固形貌的选择过程，而早期的解析方法对此却无能为力。在 20 世纪 90 年代，发展了凝固过程中微观理论和宏观理论相结合的方法。

自 Kurz 和 Fisher 的著作问世至今，尽管其间有大量关于凝固的专业书籍出版，但遗憾的是，目前尚未有一本能够系统阐述凝固基础理论、解析模型和计算方法的书籍。20 世纪 90 年代和 21 世纪初，作者与南锡矿业学院 (Ecole des Mines de Nancy)、洛桑联邦理工学院 (EPFL) 和 Calcom 公司 (Calcom) 合作开展了关于凝固理论方面的课程，其主要内容包括早期基础理论和当前计算技术。在授课过程和大学里的本职工作中，我们感到亟须出版一本新书来系统阐述凝固中的理论、模型和计算方法，这就是出版本书的初衷。本书主要分为三个部分：①基础理论，包括热力学、相图和模拟技术的基础知识；②微观结构，用第一部分所介绍的方法来描述微观尺度下固相的演化过程，从形核到枝晶、共晶和包晶生长，再到微观偏析等，这部分包含一节关于凝固中耦合宏观和微观模型的内容；③缺陷，利用以上介绍的方法描述缩孔、热裂和宏观偏析。本书力求系统地阐明这些问题，另外，全书所有章节使用的符号均一致。

**致谢** 本书展现了我们过去 25 年间教育、培训和实践中的精华。一路走来，得到了良师益友、前辈同侪的帮助，由于人数众多，不再一一列举。在这里，对我们的导师 Wilfried Kurz、Stephen Davis 和 Robert Pond 致以由衷的感谢。此外，感谢尊敬的同

行 William Boettinger、Martin Glicksman、John Hunt、Alain Karma 和 Rohit Trivedi 等（这里仅仅列出其中一部分人），在这几年里我们进行了非常有益的讨论。另外，本书的基本内容很多取材于上述提及的培训课程。同时，非常感谢课程中的同事和教师，特别是课程的组织者 Philippe Thevoz 和 Marco Gremaud。也特别感谢 Christoph Beckermann、Herve Combeau、Arne Dahle 和 Mathis Plapp 对本书做出的有益评价和贡献。感谢 Sebastien Rappaz 为本书设计封面。感谢我们的学生、博士后和同事对本书的帮助。特别感谢同行和朋友慷慨地允许我们使用书中出现的各类图表。

最后，感谢家人的爱和支持。

Jonathan A. Dantzig

Michel Rappaz

Lausanne, 2009

## 术 语

与那些内容丰富的著作一样,本书在论述的过程中将会遇到很多专业术语。本书尽可能使用标准符号,并力求使前后文的符号一致。为了区分有量纲量及相应的无量纲量,前者用罗马字母表示,后者用希腊字母表示,如 $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ 。有时某些变量的符号没有相应的希腊字母,那么上述规定将无法实现,如速度 $v$ 、 $v_i$ 。此外,矢量的有量纲量和无量纲量分别用意大利字母和罗马字母表示,如 $(v, v_i) \rightarrow (v, v_i)$ 。

下标和上标的使用略显复杂。“组元”用大写的罗马字母表示,“相”用小写的希腊字母表示,如S、L分别表示固体和液体。“\*”表示固-液界面处的性质,通常出现在上标位置。为了使符号表达的意思更为清晰,其他的字母符号可能出现在上标或者下标位置。例如,本书在讨论共晶和包晶合金时,用到一个复杂的符号 $C_{JL}^*$ ,此符号意为 $\alpha$ 相界面前沿的液相中 $J$ 组元的质量分数。

主要的符号如下所示。

### 罗 马 字 母

A, B, ...	组元 A
A, A <sub>SL</sub>	面积, 固-液界面面积
A <sub>IL</sub> , A <sub>IS</sub>	异质基底和液相之间的表面, 异质基底和固相之间的表面
A <sub>C</sub> , A <sub>R</sub>	共晶的生长常数
A( $n$ )	表面能各向异性函数
$a_1, a_2, a_3, \dots$	表面能各向异性系数
$a_{A\alpha}$	$\alpha$ 相中 A 组元的化学活度
B	溶解度或热膨胀系数 ( $=\beta_C / (m_L \beta_T)$ )
[B <sup>*</sup> ]	元素形状函数的空间倒数
<b>b</b>	单位质量的体积力矢量; 设计矢量
[C <sup>*</sup> ], [C]	FEM 中的元素和整体矩阵
C	二元合金中溶质的质量分数
C <sub>J</sub>	混合物中组元 J 的质量分数
C <sub>S</sub> <sup>*</sup> , C <sub>L</sub> <sup>*</sup>	二元合金液固界面处, 固相和液相中溶质的质量分数
$\bar{c}_0, c_1, \dots$	积分常数
$c_p, c_v$	恒压热容, 恒容热容
D	溶质的扩散系数, 直径
d	球径
D	变形张量率 ( $=(\nabla v + (\nabla v)^T) / 2$ )

$d_0, d_0^C$	热毛细长度, 化学毛细长度
$E$	杨氏模量
$E, E^m, e$	总内能, 摩尔内能, 比内能
$\dot{E}$	累积平均变形率
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ijkl}$	弹性张量
$e_J^I$	溶质组元 $I$ 和气体组元 $J$ 间二级交互系数
$\mathcal{F}, F$	相场模型中总自由能, 单位体积自由能
$\mathbf{F}$	变形的梯度张量, $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$
$f_A, f_V$	圆锥凹坑中的形核形状因子
$f_{JI}, f_{JI}^0$	组元 $J$ 在合金和纯物质中的活度系数
$f_\alpha$	$\alpha$ 相的质量分数
$G$	温度梯度
$G, G^m, g$	总 Gibbs 自由能, 摩尔 Gibbs 自由能, 比 Gibbs 自由能
$G_C$	浓度梯度
$g$	重力加速度
$g_\alpha$	$\alpha$ 相体积分
$g_d, g_e, g_g$	枝晶间液相、额外枝晶液相和晶粒的体积分
$H, H^m, h$	总热焓, 摩尔焓, 比焓
$h_T$	传热系数
$\mathbf{I}$	单位张量, $ij$ 组元是 $\delta_{ij}$
$I^{\text{homo}}, I^{\text{heter}}$	均质和非均质的形核率
$I_0^{\text{homo}}, I_0^{\text{heter}}$	均质形核和非均质形核的指前因子
$Iv_{2D}, Iv_{3D}$	二维和三维空间的 Ivantsov 函数
$i$	复数
$j_A$	A 的摩尔单位通量
$J$	雅可比行列式
$[J]$	等参 FEM 的雅可比元素
$\mathbf{K}, K$	渗透率张量, 各向同性渗透率值
$[K^e], [K]$	有限元法中分量和全导率矩阵
$\mathbf{k}, k$	热导率张量, 各向同性传导率的值
$k_T$	热导率比值 ( $k_s/k_L$ )
$k_0, k_0^m$	(质量) 分割常数, (摩尔) 分割常数
$k_B$	Boltzmann 常量, $1.38 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$
$L, L_c$	特征长度
$L_f$	单位质量的溶化潜热
$L_v$	单位质量的蒸发潜热
$M$	体系质量, 形态数量
$M_J$	$J$ 的分子量

$m_L, m_S$	液相线斜率和固相线斜率 (质量分数)
$[N^r]$	有限元中元素形状函数
$N_0$	阿伏伽德罗常量, $6.02 \times 10^{23}$ 原子/mol
$N_c$	组元数
$N_F$	相平衡的自由量个数
$N_I$	混合物中 $I$ 的总原子数
$N_b$	键合配位数
$N_g$	计算区域的网格数
$N_\phi$	相的个数
$n$	摩尔数
$n, (n_x, n_y, n_z)$	表面的单位法向量和笛卡儿分量
$n_g$	晶粒密度
$n_{max}$	颗粒的最大密度
$n_p$	潜在的晶核密度、空隙密度
$O(\cdot)$	数量级
$P$	系统的功率输入, 罚参数
$P(r; R_{tip})$	(空间) 旋转表面的抛物面
$P(\varrho)$	(非空间) 旋转表面的抛物面
$p, p_a$	压力, 大气压
$p_c$	捕获概率
$p(\phi)$	取向分布函数
$\tilde{p}, p'$	SIMPLE 算法中的中间压力和压力修正系数
$\hat{p}$	修正压力 ( $= p + \rho_0 gh$ )
$Q$	系统的流入热流
$q_b$	边界热流
$q$	热流向量
$R$	半径
$R_g, R_{g0}$	晶粒半径, 最终晶粒半径
$R_1, R_2$	曲率半径定理
$\mathcal{R}$	气体常量, $8.31\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
$\mathcal{R}$	球面固体颗粒的平面半径
$\dot{R}_q$	比热产生率
$R_c$	临界晶核的半径
$R_p$	孔径
$R_{tip}$	抛光面的齿顶圆角的半径
$\{R\}$	剩余向量
$r, \theta, z$	柱面坐标



$r, \theta, \phi$	球面坐标
$r_J^I$	溶质 $I$ 和气体 $J$ 的二阶交互作用系数
$S$	边界曲面
$S, S^m, s$	总摩尔和比熵
$S_{\text{mix}}^m$	混合物的摩尔熵
$S_V, S_V^{\text{SL}}$	单位体积的固-液界面面积
$S_V^{\text{de}}$	内生树枝状液体单位体积界面面积
$S_V^{\text{sd}}$	固体内生树枝状液体单位体积界面面积
$T$	温度
$\dot{T}$	冷却速率
$T_0$	$G_S^m = G_L^m$ 处的边界温度
$T^*$	固-液界面温度
$T_b$	边界温度
$T_{\text{col}}$	柱状前沿温度
$T_{\text{eut}}$	共晶温度
$T_f$	单质材料的平衡熔点温度
$T_{\text{liq}}$	液相线温度
$T_{\text{per}}$	包晶温度
$T_{\text{ref}}, T_0$	参考温度
$T_{\text{sol}}$	固相线温度
$T_v$	大气压下的蒸发温度
$\{T^e\}, \{T\}$	局部和全部向量的节点温度
$t, t_c$	时间, 特征时间
$t_f$	局部凝固时间
$t_n$	形核时间
$\mathbf{t}$	表面引力向量
$\mathbf{u}$	位移矢量
$V, V^m, v$	总摩尔比容
$V_R$	典型体积元体积
$V_S, V_L$	体积元的固液相体积
$v$	速度标量
$v_g$	晶粒表面的法向速率
$\mathbf{v}, v_i$	(空间) 数率矢量和 $i$ 分量的数率矢量
$\mathbf{v}, v_i$	(非空间) 数率矢量和 $i$ 分量的数率矢量
$\mathbf{v}_K$	$K$ 元素的数率矢量
$v_n$	固液界面的法向数率分量
$v_{\text{sound}}$	声速

$v_T$	等热速率
$W$	宽度, 外力做的功
$W_0$	相场中的界面宽度
$X_I$	$I$ 的摩尔组成
$\mathbf{X}$	材料的坐标向量
$\{X\}, \{Y\}, \{Z\}$	有限元中元素的节点坐标向量
$\mathbf{x}$	正向量
$x^*$	一维情况的界面位置
$x, y, z$	$x_1, x_2, x_3$ 的笛卡儿坐标
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$	笛卡儿坐标的单位向量

## 希腊字母

$\alpha$	热扩散率 ( $=k/(\rho c_p)$ )
$\alpha, \beta, \gamma$	类分相
$\alpha_T$	线性热膨胀系数 ( $=\beta_T/3$ )
$\beta$	凝固收缩系数 ( $=\rho_s/\rho_l-1$ )
$\beta_T$	体热膨胀系数 ( $=3\alpha_T$ )
$\beta_C$	体积溶质膨胀系数
$\beta_p$	压缩系数
$\Gamma_{SL}$	Gibbs-Thomson 系数 ( $=\gamma_{SL} T_f/(\rho_s L_f)$ )
$\Gamma_{S,L}^{m*}, \Gamma_{S,L}^{\sigma*}, \Gamma_{S,L}^{h*}, \Gamma_{S,L}^{C*}$	固体或液体的界面质量、动量、能量或种类
$\gamma_{fl}$	外来基底和液相之间的表面能
$\gamma_{fs}$	外来基底和固相之间的表面能
$\gamma_{gb}$	晶界能
$\gamma_{SL}, \gamma_{SL}^0$	固液两相之间的表面能; 各向异性表面能;
$\Delta$	无量纲过冷 ( $c_p \Delta T/L_f$ )
$\Delta C_0$	共晶端点的成分差
$\Delta G_n^{\text{homo}}, \Delta G_n^{\text{heter}}$	均质和非均质形核的自由能垒
$\Delta H_{\text{mix}}^m$	摩尔混合焓
$\Delta S_f^m$	固液间的摩尔熵差
$\Delta S_f^J$	组分 $J$ ( $=L_f^J/T_f^J$ ) 的比扩散熵
$\Delta T$	总过冷
$\Delta T_b$	粗化过冷度
$\Delta T_c$	特征温差
$\Delta T_0$	平衡凝固范围 ( $=T_{\text{liq}}-T_{\text{sol}}$ )
$\Delta T_k$	动力学过冷
$\Delta T_n$	形核过冷

$\Delta T_R$	曲率过冷
$\Delta T_C$	溶质过冷
$\Delta T_T$	热过冷
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	不同坐标方向的网格划分
$\delta$	无量纲凝固层的厚度, 边界层厚度
$\epsilon_{JK}$	原子 $J$ 和 $K$ 间的键能
$\epsilon$	应变矢量
$\epsilon_{eq}$	当量应变
$\epsilon_4, \epsilon_n$	界面能各向异性系数, 4 轴对称, $n$ 轴对称
$\eta$	无量纲 $y$ 坐标
$\zeta$	无量纲 $z$ 坐标
$\theta$	无量纲温度
$\bar{\kappa}, \kappa_G$	表面的平均, 高斯曲率
$\Lambda$	共晶间距和极值比值 ( $=\lambda/\lambda_{ext}$ )
$\lambda$	波长, 共晶间距
$\lambda_1, \lambda_2$	初次, 二次枝晶臂间距
$\mu_l$	牛顿流体的剪切黏度
$\mu_{Ja}$	$\alpha$ 相中 $J$ 组元的化学势
$\mu_k$	动力学吸附系数 ( $=\mu_l/\rho_l$ )
$\nu_l$	动力学速度
$\nu_0$	原子的振动频率
$\nu_e$	泊松比
$\xi$	无量纲 $x$ 坐标
$\xi$	Cahn-Hoffman 矢量 ( $=\nabla(r\gamma_{sl}(n))$ )
$\pi$	3.14159.....
$\Pi$	无量纲压力
$\rho$	密度
$\rho_0$	参考温度和压力处的密度
$\varrho$	无量纲径坐标
$\sigma$	总应力矢量
$\hat{\sigma}$	有效应力矢量 ( $=\sigma + PI$ )
$\sigma_{eq}$	当量应力
$\sigma^*$	枝晶尖端选择常数
$\sigma_n$	模式 $n$ 非稳态生长率指数
$\sigma_y$	屈服应力
$\tau$	外应力矢量
$\tau$	无量纲时间
$\tau_0$	相场模型中的时间矢量

$\Upsilon$	相场方程中的噪声
$\phi$	界面位置的常数
$\phi_s, \phi_L$	固相, 液相之间的隐函数
$\chi_\alpha$	$\alpha$ 相摩尔分数
$\psi$	相场序参量
$\Psi$	表面硬化
$\Omega^m$	正规熔体系数
$\Omega$	过饱和
$w$	速度矢量 ( $= \nabla \times v$ )

## 上标, 下标

$A^*$	固-液界面
$A_C$	浓度
$A_e$	特征值
$A_{col}$	柱状空间
$A^{el}$	弹性变形
$A_{eut}$	共晶
$A_L$	液相
$A_g$	气相
$A_k$	吸附动力学
$A_I, A_J$	组元 $I, J$
$A_{liq}$	液相线
$A^m$	摩尔量
$A_n$	垂直界面 $A$ 向量组元
$A_p$	空隙
$A^R$	曲率为 $R$ 的表面
$A_s$	固相
$A_{sol}$	固相线
$A_{sl}$	固-液界面
$A^{th}$	热变形
$A^{tr}$	转变变形
$A^{vp}$	黏塑性变形
$A_\alpha, A_\beta, \dots$	$\alpha, \beta$ 相的含量
$A_x, A_y, A_z$	矢量 $x, y, z$ 组分
$A_0$	名义或者参考值
$A^\infty$	平界面

## 数 学 函 数

符号	含义	函数
$E_1(u)$	指数积分	$\int_u^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds$
$\operatorname{erf}(u)$	误差函数	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-s^2} ds$
$\operatorname{erfc}(u)$	互补误差函数	$1 - \operatorname{erf}(u)$
$f(\theta)$	形核几何因子	$\frac{(2 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)^2}{4}$
$L_n(x)$	拉格朗日多项式	$\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$
$P_{nm}(x)$	关联拉格朗日多项式	$\frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n$
$Q_4$	第一立方谐波函数	$n_x^4 + n_y^4 + n_z^4$
$S_4$	第二立方谐波函数	$n_x^2 n_y^2 n_z^2$
$Y_{nm}(\theta, \phi)$	球形谐波函数	$\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} e^{-im\phi} P_{nm}(\cos\theta)$
$\delta(x)$	狄拉克函数	$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x=0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$
$\delta_{ij}$	单位张量	$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
$\epsilon_{ijk}$	置换张量	$\begin{cases} 1, & i, j, k \text{ 为偶数} \\ -1, & i, j, k \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

## 数 学 运 算

符号	含义	表达式
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	两个向量点积	$a_i b_i$
$\mathbf{A}^T$	矩阵转置	$a_{ji}$
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	二阶张量的标量积	$a_{ji} b_{ji}$
$D\psi/Dt$	$\psi$ 的导数	$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi$
$\text{tr} \mathbf{A}$	矩阵的迹	$a_{ii}$
$\nabla A$	梯度	$\frac{\partial A}{\partial x_i}$
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	$A$ 的通量	$\frac{\partial a}{\partial x_i}$
$\nabla \times \mathbf{A}$	向量卷积	$\epsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_k}$
$\nabla^2 A$	拉普拉斯算子	$\frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_i}$
$\ \mathbf{A}\ $	向量的范数	$\sqrt{a_i a_i}$
$\langle A \rangle$	平均体积	$\frac{1}{V_R} \int_{V_R} A dV$
$\langle A_{S,L} \rangle$	相的平均数	$\frac{1}{V_R} \int_{V_R} \phi_{S,L} A dV$
$\langle A \rangle_{S,L}$	本征平均	$\frac{1}{V_{S,L}} \int_{V_R} \phi_{S,L} A dV$
$\langle A_{S,L}^* \mathbf{n} \rangle^*$	界面平均	$\frac{1}{A_{S,L}} \int_{A_{S,L}} A_{S,L}^* n dA$
$\langle C \rangle_M$	组分平均质量	$\int_0^{f_S} C_S df_S + \int_0^{f_L} C_L df_L$

## 经典的无量纲数

名称	表达式	物理意义
Biot	$Bi = \frac{h_T L_c}{k}$	热量由表面向内部传导的比率
Boussinesq	$Bo = \frac{g\beta_T \Delta T_c L_c^3}{a_0^2}$	通过浮力传导热量的比率
Fourier	$Fo = \frac{\alpha t_c}{L_c^2}$	特征时间 $t_c$ 与传导时间 $L_c^2/\alpha$ 的比率
Grashof	$Gr = \frac{g\beta_T \Delta T_c L_c^3}{(\mu_L/\rho_{L0})^2}$	浮力对流与黏度比率
Lewis	$Le = \frac{\alpha}{D}$	热扩散与质扩散比率
Péclet	$Pe = \frac{v_c L_c}{\alpha}$	热对流与热传导比率
Péclet(solntal)	$Pe_c = \frac{v_c L_c}{D}$	溶质对流与溶质扩散比率
Prandtl	$Pr = \frac{c_p \mu_L}{k} = \frac{\nu_L}{\alpha}$	流体中动量与热扩散比率
Rayleigh	$Ra = \frac{\rho_0 g \beta_T \Delta T_c L_c^3}{\mu_l \alpha_0}$	浮力对流造成黏度和热传导的比率
Reynolds	$Re = \frac{\rho v_c L_c}{\mu_L} = \frac{v_c L_c}{\nu_L}$	黏度惯性比率
Schmidt	$Sc = \frac{\mu_L}{\rho_L D_L} = \frac{\nu_L}{D_L}$	动量扩散与质扩散比率
Stefan	$Ste = \frac{c_P \Delta T}{L_f}$	显热与潜热比率

# 目 录

前言

术语

第 1 章 绪论	1
1.1 概述	1
1.2 凝固过程	4
1.3 小结	15
参考文献	15

## 第一部分 基本原理与宏观现象

第 2 章 热力学	19
2.1 概述	19
2.2 一元系统热力学	20
2.3 二元合金	25
2.4 偏离平衡	33
2.5 小结	43
练习	44
参考文献	45
第 3 章 相图	47
3.1 概述	47
3.2 二元体系	47
3.3 三元体系	62
3.4 小结	71
练习	71
参考文献	72
第 4 章 平衡方程	73
4.1 概述	73
4.2 质量平衡	80
4.3 动量平衡	83
4.4 能量平衡	93
4.5 多元系中的溶质平衡	96
4.6 无量纲化	100



4.7 小结 .....	104
练习 .....	105
参考文献 .....	106
<b>第5章 凝固中的解析解</b> .....	107
5.1 概述 .....	107
5.2 过热熔体中的凝固 .....	107
5.3 过冷熔体中的凝固 .....	123
5.4 曲率效应 .....	131
5.5 小结 .....	135
练习 .....	135
参考文献 .....	137
<b>第6章 凝固研究的数值方法</b> .....	138
6.1 概述 .....	138
6.2 无相变热传导 .....	138
6.3 相变中的热传导 .....	151
6.4 流动 .....	160
6.5 最优化和逆向方法 .....	168
6.6 小结 .....	173
练习 .....	173
参考文献 .....	175

## 第二部分 微 观 组 织

<b>第7章 形核</b> .....	179
7.1 概述 .....	179
7.2 均质形核 .....	179
7.3 异质形核 .....	185
7.4 晶粒的细化机制 .....	197
7.5 小结 .....	201
练习 .....	202
参考文献 .....	203
<b>第8章 枝晶生长</b> .....	204
8.1 概述 .....	204
8.2 自由生长 .....	204
8.3 约束生长 .....	213
8.4 针状枝晶的生长 .....	221
8.5 对流和枝晶生长 .....	233