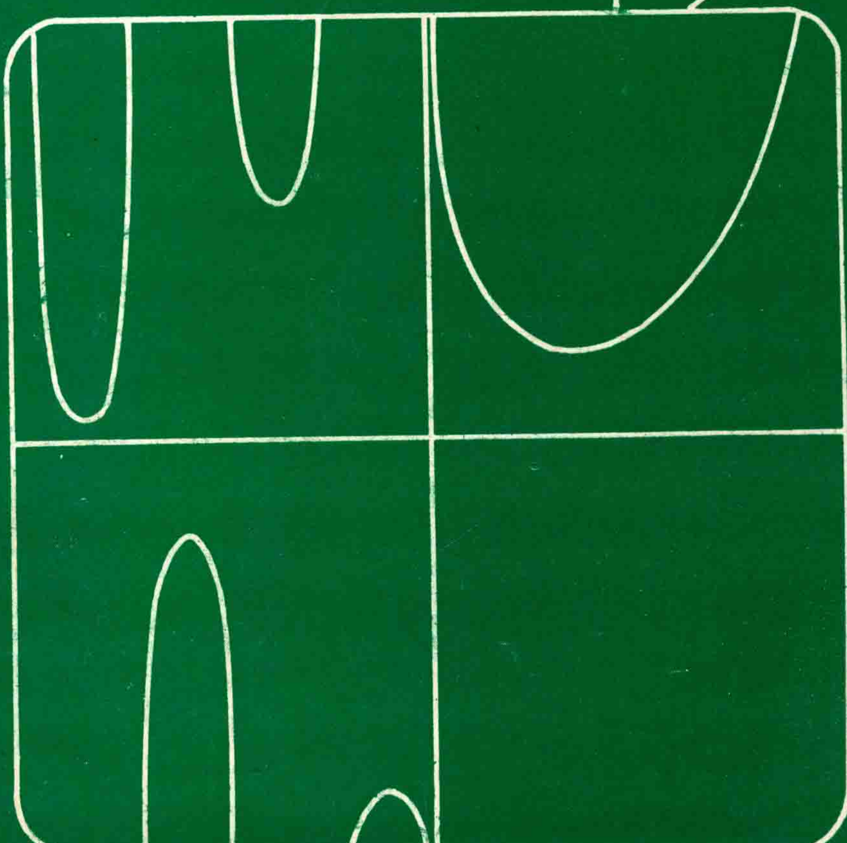
科學圖書大庫

工程數學（上）

譯者　吳治平



徐氏基金會出版

科學圖書大庫

工程數學(上)

譯者　吳治平

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　石開朗

科學圖書大庫

中華民國六十九年六月二十一日初版

工程數學（上）

基本定價 3.60 ~~4.60~~

譯者　吳治平　國立台灣大學化工系

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱13-306　電話 9221763 9446842

發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號

承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話 9719739

初版原序

近代由科學到實際應用之間的時距已經愈縮愈短，因此，科學家與工程師對數學的需求也相對增加了。雖然工學院學生的數學能力在過去三十年已經受到了極大的重視，但是超越傳統微積分教材以後的數學一直受到限制。至於數學教材的進一步推展之所以受到阻力，要歸結於幾個原因，一方面因為工程學科的課程愈來愈繁雜，一方面由於在科學與工業界具有核心地位的數學難以統一，再方面就是缺乏專門的機構與適合的編者。然而，數學教育範圍的全面擴大是無法避免的，因為事實證明任何工程師如果要在科學上有任何突破，就非得提高他自己的數學水準不可。

這本書的目的就是在提高上述的數學水平。而作者不但以今日工程上的需求做為編寫的準則，同時也根據「國家科學基金會」（ the National Science Foundation ），「美國工程教育組織」（ American Society of Engineering Education ）及其前身「工程教育推展組織」（ Society for the Promotion of Engineering Euducation ）……等學術機構所發起的無數次有關工程教育的討論與研究，綜合工程先進思想而完成此書。

過份重視數學上的邏輯關係與嚴格的理論根據往往會使它脫離現實而失去趣味。然而，如果應用問題重於理論架構又往往使它失去了發展的潛力。因此作者儘量求其平衡，以使之成為介紹應用數學的良好教材。

至於主題的取捨是作者考慮該方面在應用上出現的比率而決定的，書中的內容與實例是注重它們在原理運用上的價值，而並不在工程上某些專門的技巧解法上作深入。

雖然本書儘量減少閱讀前需要具備的基本條件，但是讀者也該明白

，在繁雜的推導過程中，我們沒有能力讓出空間來解釋一些太根本的問題。為了使大家能熟悉定理並培養對物理問題的數學解析能力，我們很多例子都做到了不厭其煩的地步。作者相信牛頓的話“一個例題最終的結論往往與我們最初的判斷有一段差距”。

I.S. SOKOLNIKOFF
R.M. REDHEFFER

二版原序

新版的書雖然在內容上不同於初版，但它的基本精神並沒有改變。

數學在應用上的用途大增，而且在科學與工程方面的預備材料已有很大的改進。因此，一些初版內介紹性的內容現在改寫成了新的主題，而數學思考的培養再度被強調。因爲無窮級數不但在應用上有重要地位，它也是數學分析結構上不可或缺的概念，所以我們把它列爲第一章。適當的熟悉這一章對於其他各章的學習是有必要的，但是這並不是絕對的。然而，如果想要單獨研究本書中的任一章，讀者必須具有微積分的良好基礎。

第二章與第三章對常微分方程式與拉普拉斯變換的討論，我們引進很多線性與非線性的觀念，這是初版所沒有的。縱然在這兩章中強調技巧的運用，但整個內容是整體的知識，而非一連串獨立的技巧。在多變函數與向量場論中自由座標的合成方面我們做了較多的修訂。

問題與練習都顯著的增加了，但是我們並沒一味的增加同樣深度的問題。書中問題分成三大類：(1)增進前節使觀念融會的內容。(2)爲後面的新觀念做引導。(3)使原章節內的結論得到適當的發揮與推展。全書中我們強調數學對科學以及科學對數學之間的關係。

本書的內容足夠每星期三小時，連續六個學期的課程進度。很多學校要求工學院的學生每年都得讀數學，書中所選定的主題完全配合國家科學基金會在應用數學方面的評鑑。這些評鑑可以參考H. Liebowitz與J.M. Allen所著的"固態力學課程"。Prentice-Hall，Inc. Englewood Cliffs. N.J. 1961。

本書網羅工程師所需最基本的數學技巧。不可諱言的，蘇俄的物理學家與工程師在數學方面會超過這些最基本的內容。雖然只有少數美國

的理工學院將工程數學的課程增加到一年以上，但是數學教學的課程必定會愈變愈長，因爲在數學上所下的功夫不論對未來職業上的研究或更深入的發展都是一項最有力的投資。

I. S. SOKOLNIKOFF
R. M. REDHEFFER

譯者序

一本工程數學教材，能闡明定理和數學分析的過程，這僅是基本要求。至於行文流利易懂，固然對初學者甚爲有益，也畢竟算不上出色。譯者認爲眞正值得研讀的數學書籍，其內容在觀念方面應能脫離俗套，並可觸發新思想。如果書中還能暗示一些數學應用在工程上的通則，使讀者對工程問題本身產生更有系統的概念，那就更難能可貴了。本書就具有一些與衆不同的特色，例如在第二章介紹有關等斜線與相平面的觀念，微分不等式的演導過程，以及第三章所介紹系統回應的概念與狄克拉分佈的理論都有其獨到之處；書中的例題能前後呼應，表現出各章節與各定理間的連貫性，殊爲難得。總之，本書不僅介紹數學理論，還能在整體上表現出一些在其他同類書籍中不易發現的概念，這也是譯者偏愛本書的原因。

由於數學本身是一種抽象思考的理論，用具體之文字來闡述抽象的概念，其中總會有“辭不達意”之處。尤其當理論深入後，更難以三言兩語說得清楚；然而敍述的詞語太多，又容易彼此混雜，產生邏輯不嚴密的缺點。何況有些抽象概念並不是一味旁敲側擊就能解釋得通的。有時，基於一個數學定理本身的結構繁複，用來說明它的詞句經常需要同時包括幾個邏輯關係。如此，句子就愈來愈“不通”了。本書所探討者既然是數學問題，上述的困難總是無可避免的。所以我建議讀者在研讀本書之際多讀相關的書籍，多思考相關連的問題，因爲往往我們無法了解一種數學現象的根本原因是對它太陌生。如果能先熟悉問題，就算答案初起不能得到，最後必能尋出解決問題的方法。

本書原著共分十章，由無窮級數到數值分析，工程數學中比較大的幾個主題都已涵蓋，可爲學習工程數學的良好起點。書中對於目前工程

數學發展的新趨勢也隨時提出，讓我們能了解進一步研究的方向。原書前五章以微分方程與多變函數爲主體，後五章則以向量場論與偏微分方程爲主體，今按前後分上下兩冊出版，如此安排希望讀者能夠滿意。

譯者利用餘暇翻譯此書，一方面基於個人對數學的喜好，一方面也希望能以此書爲起點，爲促進國家學術發展，盡一分力量。本書下冊最後兩章與先後校正期間，多承陳志平、孫一明、蔡木山、陳宜昌等同學幫忙指正，特此致謝。譯者才疏學淺，雖勉力以赴，誤漏之處定所難免，期盼先進賢達多予指教是幸。

吳治平
於台大化工系

目　錄

第一章　無窮級數

無窮級數的用途很多。各種不同的函數可以表成無窮級數；很多特殊的積分可以用冪級數來表示；同時冪級數也可以用來解微分方程。級數的另外一個功用就是處理複數 $z = x + yi$ 的問題。例如：由 $\sin x$ 的特性級數推廣，可以研究 $\sin z$ 的性質。傅氏級數往往在週期脈衝的電路分析上占有重要的地位；同時，它也為物理數學中的邊界值問題，提供了有效的解決方式。我們將在此章中，對幾個有用的無窮級數，做進一步的研究。

通　論

1-1　序列與級數

一個有序集合 $\{a_n\}$，當它代表一列數字

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots \tag{1-1}$$

時，我們通常稱為「序列」。例如：

$$1, 3, 5, 7, \cdots\cdots, 2n-1, \cdots\cdots \tag{1-2}$$

此序列就可用 $\{2n-1\}$ 代表。一旦此序列有無窮多項時，我們就叫它作無窮序列。

由（1-1）式出發，我們可以定義 n 項級數為：

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_n$$

於是，很自然的，

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_n + \cdots \tag{1-3}$$

就代表無窮級數了。

雖然加號是代表相加的意思，但讀者最好能對「級數」與「級數的和」這兩種名詞加以區分。例如：

$$1+3+5 \quad 與 \quad 3+3+3$$

固然它們的和都是9，但它們並非同一級數，原因是它們來自不同的序列

$$1,3,5 \quad 與 \quad 3,3,3$$

這種現象也出現在無窮數列中，我們將在下面進一步討論

在無窮級數的理論中，有一種叫**形式理論**（formal theory）的系理，在這種理論下，我們不必考慮一個級數**和**的問題。然而，級數的應用，往往須要和數字拉上關係。這關係就是部份和：

$$a_1 \;,\; a_1+a_2 \;,\; a_1+a_2+a_3 \;,\; a_1+a_2+a_3+a_4 \;,\cdots\cdots$$

於是 ***n* 項部份和**就可以用 $s_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 表示

例如：無窮級數

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots \qquad (1\text{-}4)$$

的部份和就是

$$s_1=\frac{1}{2} \quad s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}, \quad s_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}\cdots\cdots$$

（1－4）中 ***n* 項部份和**可以表成

$$s_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}5)$$

我們消去（1－5）中的各項，就可以得到 $s_n=1-1/(n+1)=n(n+1)$ 像（1－5）的數列我們特別叫它作**壓縮級數**（telescoping series）。

因爲 $s_n=n/(n+1)$ 公式的導出，使我們有能力計算任意多項（1－4）級數之和。例如：$n=9$ 時，我們得到 $s_n=9/10$，這表示前9項之和是0.9。$n=99$，我們得到前99項之和是 $s_n=0.99$，

像這種類似部份和的計算，我們可以一直做下去。如果稍微注意一點，讀者可以發覺（1－5）之部份和 s_n 會不斷的趨近1。換言之，$\lim s_n = 1$。於是（1－4）無窮級數之和就是1了。

以上是一個典型的例子。看了這例子後，我們可以做一個結論：如果一個級數的部份和能滿足

$$\lim s_n = s \qquad (1\text{-}6)$$

則我們就可以稱級數（1－3）的和收斂到 s，我們能用

$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$　來表示。

如果 s_n 之極限值不存在，那麼級數（1－3）就沒有和，換言之，這個級數就是發散級數了。再仔細一點解釋（1－6）其意就是指：對任意正數 ϵ，不論它是多小，我們能找到一個數 N，使在

$$n > N \text{時，}\quad | s - s_n | < \epsilon \qquad (1\text{-}7)$$

舉例來說，我們把上述的定義用到級數（1－4）上。

$$|1 - s_n| = \left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| < \epsilon \quad \text{對} n > N \qquad (\ast)$$

讀者可以注意一下 *式之意義與下式相等

$$n + 1 > (1/\epsilon) \quad \text{對} n > N$$

於是 $N = (1/\epsilon) - 1$ 就能使 *式成立。例如 $\epsilon = 0.1$，則 $N = 9$ 可以滿足 *。$\epsilon = 0.01$ 時 N 可以為99　。正因為存在 N 使 *式存在，所以（1－7）之和就是1了。

前述的 ϵ 可以看成 n 項部份和 s_n 與級數和 s 間的誤差。我們可以正式定義誤差的估計值 $r_n \equiv s - s_n$。於是（1－7）式就是指在夠大的 n 時，能滿足 $| r_n | < \epsilon$　。在這兒，我們稱 r_n 為級數（1－3）n 項後的**餘式**。

如果 s_n 隨 n 之遞增而趨向無限大，或 s_n 的值振動不定，則 s_n 的極值就不存在了。由此可知級數

$1 + 1 + 1 + \cdots\cdots$

與 $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$　　都是發散的。

諧和級數（harmonic series ）的形式如下：

$$1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+\cdots\cdots+1/n+\cdots$$

我們可以將其分組而成

$$1+(1/2)+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+\cdots\cdots$$

顯然的，此級數大於

$$1/2+1/2+(1/4+1/4)+(1/8+1/8+1/8+1/8)+\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(1\text{-}8)$$

因（1－8）式可以簡化成一發散級數：

$$1/2+1/2+1/2+1/2+\cdots\cdots$$

所以**諧和級數**也就是一個發散級數了。我們這裏用了一個級數最基本的觀念：**比較法**。

【例題1】說明級數$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots\cdots$之斂散性。

解：上述級數之部份和 s_n 可以寫成：

$$s_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}s_n$$

而 s_n 是**諧和級數**之部份和。因 s_n 沒有極限值，故 s_n 也沒有極限值。所以本題級數發散。

【例題2】證明任一序列 $\{s_n\}$ 都可以代表一個適當級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$ 之部份和。

解：因 $s_n=s_1+(s_2-s_1)+(s_3-s_2)+(\cdots\cdots+(s_n-s_{n-1})$
如果令 $s_1=a_1$　$s_2-s_1=a_2$　$s_3-s_2=a_3\cdots\cdots s_n-s_{n-1}=a_n$，則 s_n 代表級數 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$ 之 n 項和，顯然序列 $\{s_n\}$ 可以代表此級數之部份和。

【例題3】如果 $\lim s_n=s$，$\lim t_n=t$，證明 $\lim(s_n+t_n)=s+t$。

$\lim(cs_n)=cs$，（c 是任意常數）。

解：令 ϵ 爲任一正數。如果能找到 N_1，N_2 使 $n>N_1$，$n>N_2$ 時

$|s_n-s|<\frac{1}{2}\epsilon$，$|t_n-t|<\frac{1}{2}\epsilon$ 成立。　$\cdots\cdots\cdots\cdots$（1-9）

那麽，如果令 $n>N=\max(N_1,N_2)$ 則此 n 必能同時滿足（1-9）

中的二不等式。

而且 $|s_n + t_n - (s + t)| = |(s_n - s) + (t_n - t)| \leq$
$|s_n - s| + |t_n - t| \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$

於是只要 $n > N$，則 $|s_n + t_n - (s + t)| < \epsilon \quad \epsilon > 0$

所以 $\lim(s_n + t_n) = s + t$ 成立。至於 $\lim cs_n = cs$，證法類似，只要找到 N，使 $n > N$，$|s - s_n| < |c|^{-1}\epsilon$ 即可。

1-1 習題

1. 將級數 $3+0.1+0.04+0.001+0.0005+0.00009$ 之和表爲小數。
2. 將二級數 $1+2+3+4+5+6+7$ 與 $7+6+5+4+3+2+1$ 之對應項相加，以導出二級數之和。
3. 利用問題 2，證明 $2(1+2+3+\cdots\cdots+n) = n(n+1)$。
4. 試求 n 項數列 a，$a+d$，$a+2d$，$a+3d\cdots\cdots$ 之和其中 a 與 d 爲常數。提示：將 a 與 d 分開後，利用問題 3 之結果。
5. 利用 $2k-1 = k^2-(k-1)^2$，證明 $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1) = n^2$ 提示：證明該級數爲 $(1^2-0^2)+(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\cdots\cdots+[n^2-(n-1)^2]$。
6. 利用等式 $3k(k-1) = k^3-(k-1)^3-1$ 證明 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)n = \frac{1}{3}n(n^2-1)$。
7. 證明級數 $1+1+1+\cdots\cdots$ 與 $(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+\cdots\cdots$ 均發散，但對應項和 $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots$ 則爲收斂；另舉一非常數級數的例子。
8. 比較諧和級數，證明下面之級數收斂：$1/4+1/5+1/6+1/7+\cdots\cdots$　$1/3+1/6+1/9+1/12+\cdots\cdots$

   $1/9+1/12+1/15+1/18$。
9. 若 $a_n > 0.0001$ 對每一 n，證 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ 發散 提示：其 n 項部分和大於 $0.0001n$。
10. 若 $\lim s_n = s$ 且 $\lim t = t$，試證 $\lim(\alpha s_n + \beta t_n$

βt ，對所有常數 α 、 β 皆成立，$\boxed{\text{提示}}$：利用例 3 之結果。

11. 若 $\{a_n\}$ 爲一數列，c 爲一常數，$c\{a_n\}$ 定義其項爲 ca_n 之數列，即 $c\{a_n\} \equiv \{ca_n\}$，試計算 $5\{a_n\}$，其中 $\{a_n\}$ 爲1，3 2，4，3，6。

12. 若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 之項數一樣，其和 $\{c_n\}$ 定義爲 $c_n = a_n + b_n$，即 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$，計算二數列1，3，5，7，9與－1，0，1，－1，0之和。

13. 二數列若其對應項相等，且項數相同，則我們稱二數列相等，即{ $\{a_n\} = \{b_n\}$ 表 $a_n = b_n$ ，利用問題 11 與問題 13之定義證明 $\{a_n\} = \{a_n\}$ 且 $0\{a_n\} = \{0\}$，（問題11～13爲形式理論之起點，這個理論不假設數列或級數的收斂）。

1-2　Σ符號之運用與線性運算

無窮級數通常可以簡寫成

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots \qquad (2\text{-}1)$$

此記號Σ是希臘字中和的意思。爲了方便起見，我們將用（2－1）之方式同時代表級數或級數之和。有限級數也可以用Σ符號表示。例如：

$$\sum_{k=m}^{n} b_k = b_m + b_{m+1} \cdots\cdots + b_n \quad n \geq m \qquad (2\text{-}2)$$

雖然（2－2）式等號左邊的Σ符號下方有 k ，但此極數根本上是與 k 無關的。下列三式代表同一意義：

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{p=m}^{n} a_p$$

這與積分

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt$$

中 x ， s ， t 所扮演的角色相同。類此這種變數，我們稱它爲假變數（dummy variable）。
