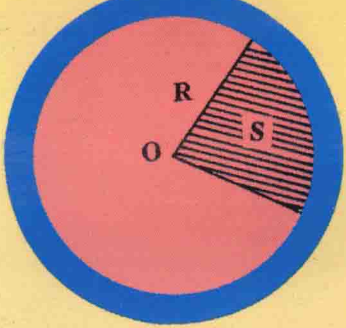
新题型新思路

高二数学

北京市海淀区
马海波 崔建一
主编

关键 等编著



cos x π

海洋出版社

新题型　新思路

高二数学

北京市海淀区　马海波　崔建一　主编
关　键　等编著

海洋出版社
1998年·北京

图书在版编目(CIP)数据

新题型新思路：高二数学/关键编著．—北京：海洋出版社，1998．1

ISBN 7-5027-4360-X

Ⅰ．新…　Ⅱ．关…　Ⅲ．数学课-高中-习题　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 21735 号

海洋出版社　出版发行

（100081　北京市海淀区大慧寺路 8 号）

海洋出版社印刷厂印刷　新华书店发行所经销

1998 年 1 月第 1 版　　1998 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：787×1092　1/32　印张：6.75

字数：161 千字　　印数：1—5000 册

定价：7.80 元

编 写 说 明

为了帮助学生系统地复习初、高中各年级的各科知识，为了便于教师及家长辅导或指导学生复习，我们根据国家教委颁发的《全日制中学教学大纲》的要求和新教材的内容，组织有丰富教学经验的教师编写了这套《新题型新思路》丛书。本丛书共有二十八个分册（初一至高三年级语文六册、数学六册、英语六册；初二至高三年级物理五册；初三至高三年级化学四册；高中历史一册）。

本丛书系统地介绍了各科基础知识，全面地归纳了各类题型，突出地点明了知识的重点、难点，认真地分析了解题思路，规范地给出了解题格式，科学地配备了相应练习。

本丛书在内容安排上，既照顾了与教材内容同步，又突出了有别于其他丛书的整体特色。基本安排是“基础知识介绍”、“典型试题分析”、“练习题”、“练习题提示及答案”四个部分。这样做的目的是：有利于学生系统地复习各科知识，掌握每一知识点的重点、难点和考点，提高分析问题和解决问题的能力，拓宽解题思路，选择最佳解题方法。

尽管在编写过程中，我们本着对读者负责的态度，进行了层层把关，但书中仍可能存有不足之处，特恳请广大读者批评指正。

本分册是由关民乐、宋秀芬、关键、薛伟、史仲毅、陈刚、史晓威、梁林、关力生老师编写的。

主编者

1997年10月

目　　录

第一章 不 等 式

[本章要点]

本章内容是我们在初中阶段学习一元一次不等式、一元一次不等式组和一元二次不等式的解法基础上,对不等式的知识的继续与提高,它的主要内容包括不等式的有关概念及其性质,一些简单不等式的解法,不等式的证明以及不等式的一些应用.

一、不等式的基本概念和性质

(一) 不等式的定义

用不等号连结起来的两个数或者两个解析式所成的式子叫做不等式.

由于复数不能比较大小,所以比较两个数的大小和研究不等式的问题,均在实数范围内进行,本章所用的一切字母,如果没有特别说明,都表示实数.

1. 同向不等式和异向不等式

2. 两个实数大小的比较:如果 a、$b \in R$,那么

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b;$$

$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b;$$

$$a-b=0 \iff a=b.$$

从这一重要性质可以看到,左边部分反映了实数的运算性质;右边反映了实数的大小顺序．它是论证不等式的基本性质,证明不等式和解不等式的重要依据．

(二) 不等式的基本性质

1. $a>b \iff b<a$;(对称性)
2. $a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$;(传递性)
3. $a>b \Rightarrow a+c>b+c$; $a+b>c \Rightarrow a>c-b$.
4. $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$;

   $a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$.

根据以上不等式的性质,还可以推导出下列性质

5. $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$;
6. $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$;
7. $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n \quad (n \in N$ 且 $n>1)$;
8. $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} \quad (n \in N$ 且 $n>1)$;
9. $a>b, ab>0 \Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.

含有绝对值的不等式,还有如下性质．

1. $|a|-|b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|$;
2. $|a \cdot b|=|a| \cdot |b|$;
3. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$.

例 1 若 $a<b<0$,则下列不等关系中不能成立的是(　　)(1989 年全国高考上海试题)

(A) $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　(B) $\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$

(C) $|a|>|b|$　　(D) $a^2>b^2$

［分析］　由于 $a < b < 0$，不妨设 $a = -3, b = -2$，可见(A)、(C)、(D) 都成立，故选(B)

例 2　若 a、b 是任意实数，且 $a > b$，则(　　)(1993 年全国高考试题)

(A) $a^2 > b^2$　　(B) $\frac{b}{a} > 1$

(C) $\lg(a-b) > 0$　　(D) $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$

［分析］　由已知 $a > b$ 的任意实数，不妨设 $a = 0$, $b = -1$，从而否定了(A) (B) (C)，故选(D).

例 3　设 a、b 是满足 $ab < 0$ 的实数，那么(　　)

(A) $|a+b| > |a-b|$

(B) $|a+b| < |a-b|$

(C) $|a-b| < ||a|-|b||$

(D) $|a-b| < |a|+|b|$

［分析］　由于 a, b 是满足 $ab < 0$ 的实数，不妨设 $a = 1, b = -1$ 分别代入四个选项，从而否定了(A) (C) 和(D)，故选(B).

说明：一个数学命题的结论，是能够通过它的允许值范围内任何值来验明其是否正确的，根据这一性质，在解题过程中，我们可以选取适当的特殊值或特殊关系，分别代入各选择项进行验证，如果某一个选项不合适，就可以认为这个选项是不正确的，予以否定，这样继续逐一代入，最后仅剩下一个选项时，就可以肯定它是正确的，无需再推到一般，这种解题方法称为特殊值法．例 1、例 2、例 3 正是采取这种方法选出正确答案的．它观察简易，运算快捷，是解选择题的一种好方法．

例 4　当 $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ 时，比较$\left(\log_a \frac{1}{x}\right)$

$\times\left(\log_a \dfrac{1}{y}\right)$与$\left(\log_a \sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)\left(\log_a \sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)$的大小．

解：$\because a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0,$

又因为$(\log_a \dfrac{1}{x})(\log_a \dfrac{1}{y}) - (\log_a \sqrt{\dfrac{x}{y}})(\log_a \sqrt{\dfrac{y}{x}})$

$$= (\log_a x)(\log_a y) - \frac{1}{4}(\log_a x - \log_a y)(\log_a x - \log_a y)$$

$$= (\log_a x)(\log_a y) - \frac{1}{4}(\log_a x - \log_a y)^2$$

$$= \frac{1}{4}[4\log_a x \cdot \log_a y - (\log_a x - \log_a y)^2]$$

$$= \frac{1}{4}(\log_a x + \log_a y)^2 \geqslant 0$$

$$\therefore \quad (\log_a \frac{1}{x})(\log_a \frac{1}{y}) \geqslant (\log_a \sqrt{\frac{x}{y}})(\log_a \sqrt{\frac{y}{x}}).$$

二、解不等式

(一) 解不等式的基本概念

1．不等式的解：在含有未知数的不等式中，能够使不等式成立的未知数的所有值和集合，叫做这个不等式的解集．

2．由几个含有相同未知数的不等式所组成的一组不等式，叫做不等式组．在不等式组中，各个不等式的解集的交集叫做这个不等式组的解集．

3．求不等式（不等式组）的解集或确定它无解的过程，叫做解不等式（不等式组）．

(二) 解不等式

1．一元一次不等式

任何一个一元一次不等式都可以变形为 $ax > b$ 或 $ax < b$ 的形式(a, $b \in R$).

对于不等式 $ax > b$ 的解有以下三种情形:

(1) 如果 $a > 0$ 时,解集是$\left\{x \middle| x > \dfrac{b}{a}\right\}$;

(2) 如果 $a < 0$ 时,解集是$\left\{x \middle| x < \dfrac{b}{a}\right\}$;

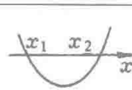
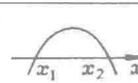
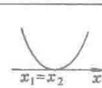
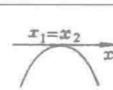
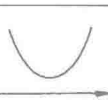
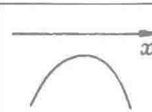
(3) 如果 $a = 0$ 时,若 $b \geqslant 0$,解集是空集 ϕ; 若 $b < 0$ 解集是任意实数 R. 此时不等式是绝对不等式 .

对于不等式 $ax < b$ 的讨论与不等式 $ax > b$ 的讨论相仿 .

2. 一元二次不等式

(1) 一般形式:$ax^2 + bx + c > 0$(或 $ax^2 + bx + c < 0$) 这里 $a \neq 0$.

(2) 解的讨论:一元二次不等式的解可以从二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象看出来,借助于二次函数图象讨论一元二次不等式容易记忆,一元二次不等式的解见下表 .

判别式	不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解		不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解		函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象	
	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$		
$\Delta = 0$	$x \neq x_1$	ϕ	ϕ	$x \neq x_1$		
$\Delta < 0$	全体实数	ϕ	ϕ	全体实数		

说明：(1) 表中的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$；

(2) x_1, x_2 是二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的两个根，它可以用对应的一元二次方程求根公式 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ 求得，并且 $x_1 < x_2$

为熟悉这一方法，请读者作下列不等式的解法练习：

① $2x^2 - 7x - 4 > 0$； ② $4x^2 - x - 1 < 0$；

③ $9x^2 - 12x + 4 > 0$； ④ $4x^2 + 4x + 1 < 0$；

⑤ $x^2 + x + 1 > 0$； ⑥ $3x^2 - x + 1 < 0$.

3. 一元一次不等式组和一元二次不等式组

对于一元一次不等式组和一元二次不等式组的解法，只要分别求出不等式组里每个不等式的解集，然后再求出这些解集的交集就是这个不等式组的解集．求交集时最好借助于数轴较容易找出．

请读者练习解下列不等式组

① $\begin{cases} 4(x+2)^2 - 4(x^2-1) \geqslant 0, \\ 2(x+2) > 0, \\ x^2 - 1 > 0. \end{cases}$

答：$x \in \left[-\dfrac{4}{5}, -1\right] \cup (1, +\infty)$.

② $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + 7 < 64, \\ 3x - 2 < 2x + 3, \\ 5x - 2 > 4x - 2. \end{cases}$ 答：$x \in \left(\dfrac{6}{57}, 5\right)$.

4. 乘积不等式

同解变形：

(1) 不等式 $f(x) \cdot g(x) > 0$（其中 $f(x), g(x)$ 均是 x

的整式）与不等式组$\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$或者$\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$同解.

(2) 不等式 $f(x)\cdot g(x)<0$(其中 $f(x),g(x)$ 均是 x 的整式）与不等式组$\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$或者$\begin{cases}f(x)<0\\g(x)>0\end{cases}$同解.

请读者练习解下列不等式

① $(3x-2)(4x^2-7x-2)>0$;

② $(4x+1)(3x^2-5x-2)<0$.

上式两个不等式除了应用两个同解变形求出不等式的解集外,还可以把左边分解成若干个一次因式,如①变为$(3x-2)(4x+1)(x-2)>0$,把这个多项式的根$-\frac{1}{4},\frac{2}{3}$,2标在数轴上,由右上方依次通过这些点画曲线,如(图 1－1) 所示.

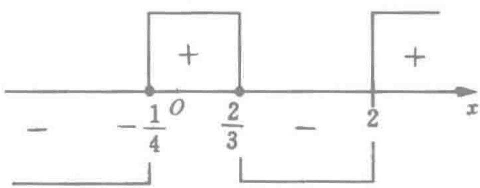


图 1－1

所以原不等式的解集是 $x\in(-\frac{1}{4},\frac{2}{3})\cup(2,+\infty)$.这种方法称为数轴标根分段讨论法,它对于某些高次不等式、分式不等式,含绝对值符号的不等式比较方便.

5. 分式不等式

同解变形:

(1) 不等式$\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (其中 $f(x),g(x)$ 均是 x 的整式)

与不等式组 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ 同解；

不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$（其中 $f(x),g(x)$ 均是 x 的整式）与不等式组 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ 同解.

(2) 不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$（其中 $f(x),g(x)$ 均是 x 的整式）与不等式 $f(x)\cdot g(x)>0$ 同解；

不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$（其中 $f(x),g(x)$ 均是 x 的整式）与不等式 $f(x)\cdot g(x)<0$ 同解.

请读者练习解下列不等式

① $\dfrac{3x-4}{2x+1}>0$　　② $\dfrac{4x+1}{3x-1}<2$；

③ $\dfrac{x}{x^2-7x+12}\geqslant 1$　　答：$x\in[2,3)\cup(4,6]$.

6. 绝对值不等式 $|f(x)|>a$ 或 $|f(x)|<a$

(1) 当 $a>0$ 时，$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)<-a$ 或 $f(x)>a$；

$|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$.

(2) 当 $a=0$ 时，$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)\neq 0$；$|f(x)|<a$ 的解集是 $\varnothing$.

(3) 当 $a<0$ 时，$|f(x)|>a$ 的解集就是 $f(x)$ 的定义域，$|f(x)|<a$ 的解集是 $\varnothing$.

请读者练习解下列不等式

① $|3x-2|>4$；　　② $|2x-3|<3$；

③ 不等式 $|x^2-3x|>4$ 的解集是________（1989 年

高考试题).　　　　　　答：$x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

7. 无理不等式 $\sqrt{f(x)} > g(x)$ 与 $\sqrt{f(x)} < g(x)$ 同解变形：

(1) 不等式 $\sqrt{f(x)} > g(x)$ 与不等式组

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{同解.}$$

(2) 不等式 $\sqrt{f(x)} < g(x)$ 与不等式组

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases} \quad \text{同解.}$$

请读者解下列不等式

① $\sqrt{2x+5} > x+1$　② $\sqrt{x^2-x-2} < 2$;

③ $\sqrt{3x-5} > \sqrt{x-4}$

8. 指数不等式 $a^{f(x)} > a^{g(x)}(a > 0, a \neq 1)$ 与 $a^{f(x)} < a^{g(x)}(a > 0, a \neq 1)$

同解变形：

(1) 不等式 $a^{f(x)} > a^{g(x)}(a > 0, a \neq 1)$，当 $a > 1$ 时与不等式 $f(x) > g(x)$ 同解；当 $0 < a < 1$ 时，与不等式 $f(x) < g(x)$ 同解.

(2) 不等式 $a^{f(x)} < a^{g(x)}(a > 0, a \neq 1)$，当 $a > 1$ 时与不等式 $f(x) < g(x)$ 同解；当 $0 < a < 1$ 时与不等式 $f(x) > g(x)$ 同解.

请读者解下列不等式

① $2^{x^2-x} > 4$　　　　② $(\frac{1}{2})^{x^2-5x+2} < 4$

9. 对数不等式 $\log_a f(x) > \log_a g(x)(a > 0, a \neq 1)$ 与 $\log_a f(x) < \log_a g(x)(a > 0, a \neq 1)$

同解变形：

(1) 不等式 $\log_a f(x) > \log_a g(x)(a > 0, a \neq 1)$ 当 $a > 1$ 时与不等式组 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ 同解；当 $0 < a < 1$ 时与不等式组 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$ 同解.

(2) 不等式 $\log_a f(x) < \log_a g(x)(a > 0, a \neq 1)$ 当 $a > 1$ 时与不等式 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$ 同解；当 $0 < a < 1$ 时与不等式 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$ 同解.

请读者解下列不等式

① $\log_{\frac{1}{2}}(3x + 2) > \log_{\frac{1}{2}}5$；　　答：$x \in (-\frac{2}{3}, 1)$

② $2\log_{\sqrt{2}}{}^{x} < \log_{\sqrt{2}}(3x + 4)$　　答：$x \in (0, 4)$

例 1　解关于 x 的不等式 $k^2x - 2 < 4x + k$.

解：原不等式可以化为 $(k^2 - 4)x < k + 2$

(1) 如果 $k^2 - 4 > 0$，即 $k < -2$ 或 $k > 2$ 时，原不等式的解集是 $\left\{x \middle| x < \frac{1}{k-2}\right\}$；

(2) 如果 $k^2 - 4 < 0$，即 $-2 < k < 2$ 时，原不等式的解集

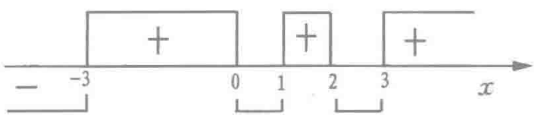
是$\left\{x \middle| x > \dfrac{1}{k-2}\right\}$;

(3) 如果 $k^2-4=0$, $\therefore k=2$ 或 $k=-2$, 若 $K=2$ 时, 原不等式变为 $0 \cdot x < 4$, 解集为 R; 若 $k=-2$ 时, 原不等式变为 $0 \cdot x < 0$, 解集为 $\emptyset$.

说明:本题为含有字母系数的不等式,解这种不等式时,应对字母系数进行讨论,然后求解.

例 2 解不等式 $(6x-x^2-x^3)(x^2-4x+3)>0$

解:原不等式变形为 $x(x+3)(x-2)(x-1)(x-3)<0$ 那么函数 $f(x)=x(x+3)(x-1)(x-2)(x-3)$ 的根把数轴分为 $(-\infty,-3)$, $(-3,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,+\infty)$ 等六个区间,因为 $f(x)$ 的最高次项的系数是正的,它在最后区间里的取值总是正值,往前一区间里取值是"−"的,如此类推,从右到左的区间里 $f(x)$ 取值符号总是"+、−、+、−,…"在数轴上表示如下:



从数轴上可以看出不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $x \in (-\infty,-3) \cup (0,1) \cup (2,3)$.

说明:本题是用"数轴标根法"解乘积不等式,利用此法解不等式之前,首先保证多项式 $f(x)$ 中的 x 最高次项系数为正,然后将多项式的根按大小顺序在数轴上标出,在最右的区间上方标"+",每过一个根,就改变一次符号,直到每个区间都标上符号为止,如(图 1−1)所示,最后由多项式 $f(x)$ 的符号确定不等式的解集.