南京航空航天大学
研究生系列精品教材

信息论基础习题与解答

张小飞　刘　敏　朱秋明　徐大专　编

科学出版社

南京航空航天大学研究生系列精品教材

信息论基础习题与解答

张小飞　刘　敏
朱秋明　徐大专　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

信息论是由香农理论发展而来的，它应用概率论、随机过程和现代数理统计方法来研究信息提取、传输和处理的一般规律，提高信息系统的有效性和可靠性。本书是为配合主教材《信息论基础》使用而编写的习题和解答，其目的是便于读者学习，加深对信息论基本概念和基本理论的理解。

本书可作为理工科高等院校电子信息、通信、计算机、自动化及相关专业的本科生和研究生教材，也可供有关专业的科技人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

信息论基础：含习题与解答 /张小飞等编. —北京：科学出版社，2015.6
ISBN 978-7-03-044810-1

Ⅰ. ①信… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①信息论－研究生－教材 Ⅳ. ①G201

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 124397 号

责任编辑：潘斯斯 李 清 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 6 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2015 年 6 月第一次印刷 印张：9 1/2
字数：225 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

信息论是由香农理论发展而来的，它应用概率论、随机过程和现代数理统计方法来研究信息提取、传输和处理的一般规律，提高信息系统的有效性和可靠性。以信息熵为基本概念，以香农的三个基本定理为核心，系统地讲述了香农信息论的基本理论，主要内容包括离散信息和连续信息的度量、离散信道和连续信道的容量、无失真信源编码定理、有噪信道编码定理、信息率失真函数和 MIMO 信道的容量等。

本书是为配合《信息论基础》使用而编写的习题和解答，其目的是便于读者学习，加深对信息论基本概念和基本理论的理解。本书在自编讲义和习题集的基础上，汇编国内外信息论教材中的案例。作者从 2013 年开始动笔，2015 年完成本书写作，历经 3 年。作者在编写过程中，参考了大量的著作，在此对所参考著作的作者表示感谢。

本书得到南京航空航天大学研究生教育优秀工程研究生教材出版项目、研究生精品课程建设项目和国家自然科学基金(编号：61371169，61301108，61271327，61471191，61471192)、江苏省博士后科研资助计划项目(编号：1201039C)、航空科学基金(编号：20120152001)，中国博士后基金(编号：2012M521099，2013M541661)和“青蓝工程”资助。

本书由南京航空航天大学张小飞教授、南通大学刘敏副教授、南京航空航天大学朱秋明副教授和南京航空航天大学徐大专教授执笔。刘敏完成第 6 章和第 7 章内容，朱秋明编写了第 8 章内容；其他内容由张小飞教授、徐大专教授和邵汉钦博士完成。在本书编写过程中，同时还得到了刘星麟、蒋驰、陈晨、黄殷杰、王方秋、李小宇、李书、张立岑等硕士研究生和博士研究生的帮助。

由于时间仓促，水平有限，书中不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2015 年 5 月

目　录

第1章　绪　　论

信息论是运用概率论与数理统计的方法研究信息、信息熵、通信系统、数据传输、密码学、数据压缩等问题的一门学科。克劳德·艾尔伍德·香农于1940年开始思考信息论与有效通信系统的问题。经过8年的努力，香农于1948年在《贝尔系统技术杂志》(*Bell System Technical Journal*)上发表了具有深远影响的论文《通信的数学原理》。1949年香农又在该杂志上发表了另一篇著名论文《噪声下的通信》。在这两篇论文中，香农阐明了通信的基本问题，给出了通信系统的模型，提出了信息量的数学表达式，并解决了信道容量、信源统计特性、信源编码、信道编码等一系列基本技术问题。两篇论文成为信息论的奠基性著作。

1.1　信息论研究内容

信息论是研究信息的产生、获取、变换、传输、存储、处理识别及利用的学科。信息论还研究信道的容量、消息的编码与调制的问题以及噪声与滤波的理论等方面的内容。信息论还研究语义信息、有效信息和模糊信息等方面的问题。信息论有狭义和广义之分。

狭义信息论即香农早期的研究成果，它以编码理论为中心，主要研究信息系统模型、信息的度量、信息容量、编码理论及噪声理论等。

广义信息论又称信息科学，主要研究以计算机处理为中心的信息处理的基本理论，包括评议、文字的处理、图像识别、学习理论及其各种应用。广义信息论则把信息定义为物质在相互作用中表征外部情况的一种普遍属性，它是一种物质系统的特性以一定形式在另一种物质系统中的再现。广义信息论包括狭义信息论的内容，但其研究范围却比通信领域广泛得多，是狭义信息论在各个领域的应用和推广，因此，它的规律也更一般化，适用于各个领域。

信息论主要研究内容如下。

(1)信源和熵。

信源限制为具有某一先验概率的随机过程；熵作为信源平均不确定性的度量。

(2)关于无失真信源编码。

无失真信源编码定理(香农第一定理)：如果编码后的信源序列信息传输速率不小于信源的熵，则可实现无失真编码，反之不存在。例如，英文字母加空格共 27 个符号，不编码每符号需 5bit 的二元符号来表示，但根据研究信源熵约为 1.4bit/symbol，所以根据香农第一定理，存在某种信源编码方式，使得每符号仅用 1.4 个二进制符号就能无失真传送。

(3)关于信道容量与信息的可靠传输。

有噪信道编码定理(香农第二定理)：如果信息传输速率小于信道容量，则总可找到一种编码方式使得当编码序列足够长时传输差错任意小；反之，不存在使差错任意小的编码。

(4)信息率失真理论(数据压缩的理论基础)。

限失真信源编码定理(香农第三定理)：对任何失真测度 $D\geqslant 0$，只要码字足够长，总可以找到一种编码，使得当编码后的信息传输速率大于等于 $R(D)$时，码的平均失真 $d\leqslant D$。$R(D)$称为信息率失真函数。另一种等价描述：对任何失真测度 $D\geqslant 0$，码的平均失真 $d\leqslant D$，那么编码后信息传输速率大于等于 $R(D)$。所以 $R(D)$是满足失真准则编码的最小的平均码长。

1.2 本书安排

本书为科学出版社《信息论基础》(张小飞，刘敏，朱秋明等编)的配套习题与解答。本书安排如下。

第 2 章给出概率论、马尔可夫链一些习题与解答。

第 3 章总结信息度量的基本知识，给出信息度量相关的一些习题与解答。

第 4 章总结信源与熵的基本知识，给出信源与熵相关的一些习题与解答。

第 5 章总结信道与其容量的基本知识，给出信道与其容量相关的一些习题与解答。

第 6 章总结信息效率失真理论的基本知识，给出与信息效率失真理论相关的一些习题与解答。

第 7 章总结限失真信源编码的基本知识，给出与限失真信源编码相关的一些习题与解答。

第 8 章总结 MIMO 信道模型及容量的基本知识，给出与信道模型及容量相关的习题与解答。

在本书编写过程中参考了许多文献，编者在此对这些文献的作者表示感谢。

第 2 章　数 学 基 础

本章给出与概率论、马尔可夫链相关的一些习题与解答。

2.1　概率论、马尔可夫链的一些基础知识

1) 概率论基础

包括随机变量、随机变量与分布函数、多维随机变量及其分布、数字特征、大数定律及中心极限定理。

2) 马尔可夫链

考虑一个随机序列 $\{x_n, n \geqslant 0\}$，其中每个随机变量 x_n（$n \geqslant 1$）仅通过最接近的变量 x_{n-1} 依赖于过去的随机变量 x_{n-1}，$x_{n-2}, \cdots$，即对所有 $i, j, k, \cdots$，有

$$p(x_n = j \mid x_{n-1} = i, x_{n-2} = k, \cdots, x_0 = m) = p(x_n = j \mid x_{n-1} = i)$$

则称 $\{x_n, n \geqslant 0\}$ 为马尔可夫链，简称马氏链。

3) 状态转移概率

状态转移概率是描述马氏链的最重要参数。对于离散时刻 m, n，相应的状态转移概率

$$p(x_n = j \mid x_m = i) = p_{ij}(m, n)$$

表示从时刻 m 的 i 状态转移到时刻 n 的 j 状态的概率，$n-m$ 表示转移的步数，$p_{ij}(m,n)$ 表示经过 $n-m$ 步转移的概率。

4) 齐次马氏链

若马氏链转移概率与起始时刻无关，即对任意 m，有

$$p_{ij}(m) = p(x_{m+1} = j \mid x_m = i) \ = p_{ij}, \quad i, j \in S$$

则称为齐次马氏链或具有平稳转移概率的马氏链。

5) 马氏链的平稳分布

若对任意整数 m 和 n，马氏链的状态分布满足

$$p(x_m = i) = p(x_n = i) = \pi_i, \quad i = 1, \cdots, J$$

则称 $\{\pi_i\}$ 为平稳分布，或稳态分布。其中，J 为状态数。

6) 上凸函数

多元函数 $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为定义域上的上凸 (cup) 函数，若对于 $\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ 及任意两矢量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$，有

$$f[\alpha \boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2] \geqslant \alpha f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_2)$$

成立，当且仅当 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$ 或 α =0，1 时等号成立，则称为严格上凸函数。

7) 下凸函数

多元函数 $f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为定义域上的下凸 (cup) 函数，若对于 $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ 及任意两矢量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$，有

$$f[\alpha \boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2] \leqslant \alpha f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_2)$$

成立，当且仅当 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$ 或 α =0，1 时等号成立，则称为严格下凸函数。

8) Jension 不等式

若 $f(x)$ 是定义在区间上的实值连续上凸函数，则对于任意一组 $x_1,x_2,\cdots,x_q$ 和任意 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_q$，$\sum\lambda_k$ =1，有

$$f\left[\sum_{k=1}^{q}\lambda_k x_k\right] \geqslant \sum_{k=1}^{q}\lambda_k f\left(x_k\right)$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_q$ 或 λ_k =1（$1 \leqslant k \leqslant q$）且 λ_j =0（$j \neq k$）时，等号成立。

2.2 概率论、马尔可夫链的一些习题和解答

例 2.1 同时抛掷一对质地均匀的骰子，骰子朝上面的点数称为骰子的点数，求：

(1)“3 点与 5 点同时出现”事件发生的概率；

(2)“两个 1 点同时出现”事件发生的概率；

(3)“至少有一个 1 点”事件发生的概率；

(4)“两个点数的和为 5”事件发生的概率。

解 (1) 设 A 为“3 点与 5 点同时出现”的事件，则 $p(A)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

(2) 设 B 为“两个 1 点同时出现”的事件，则 $p(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

(3) 设 C 为“至少有一个 1 点”的事件，则 $p(C)=1-\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$

(4) 设 D 为“两个点数的和为 5”的事件，则 $p(D)=4\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

例 2.2 某地区的女孩中有 25%是大学生，在女大学生中有 75%是身高 1.6m 以上的，而女孩中身高 1.6m 以上的占总数的一半。求事件“身高 1.6m 以上的某女孩是大学生”发生的概率。

解 设 A 为“女孩是大学生”的事件；B 为“女孩身高 1.6m 以上”的事件，则

$$p(A)=0.25,\quad p(B)=0.5,\quad p(B|A)=0.75$$

“身高 1.6m 以上的某女孩是大学生”的概率为 $p(A|B)$，由已知条件可得

$$p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{p(A)\cdot p(B|A)}{p(B)}$$
$$=\frac{0.25\times 0.75}{0.5}=0.375$$

例 2.3　一份充分洗乱的扑克牌(52 张)，求：

(1)任一特定排列发生的概率；

(2)从中随机抽取 13 张，所给出的点数都不相同的事件发生的概率。

解　设(1)中事件为 A，(2)中事件为 B

(1) $p(A)=\dfrac{1}{52!}$

(2) $p(B)=\dfrac{4^{13}}{C_{52}^{13}}$

例 2.4　一个汽车牌照编号系统使用 3 个字母后接 3 个数字作代码，求这个事件发生的概率。如果 6 个符号都用字母数字做代码，则事件发生的概率是多少？假定有 10 个数字，26 个字母。

解　设(1)中事件为 A，(2)中事件为 B

(1) $p(A)=\dfrac{1}{26^3\times 10^3}=5.69\times 10^{-8}$

(2) $p(B)=\dfrac{1}{36^6}=4.59\times 10^{-10}$

例 2.5　有 7 个球，放到有编号的 4 个盒子里，已知每个球放到各盒子里的概率相等，求：

(1)事件“第 1 个盒子里放入 2 个球”发生的概率；

(2)事件“第 1 个盒子里无球”发生的概率；

(3)事件“3 个盒子里无球”发生的概率。

解　事件总数：$4^7=16384$

(1)“第 1 个盒子里放入 2 个球”事件数：$C_7^2\times 3^5=5103$，事件概率：$p=\dfrac{5103}{16384}\approx 0.3115$

(2)“第 1 个盒子里无球”事件数：$3^7=2187$，事件概率：$p=\dfrac{2187}{16384}\approx 0.1335$

(3)“3 个盒子里无球”事件数：4，事件概率：$p=\dfrac{4}{16384}\approx 2.4414\times 10^{-4}$

例 2.6　在某城市，下雨和晴天的时间各占 1/2，而天气预报在雨天和晴天都有

2/3 的准确率。甲先生每天上班这样处理带伞问题：如果预报有雨，他就带雨伞上班；如果预报无雨，他也有 1/3 的时间带伞上班。求：

(1) 事件“在雨天条件下甲先生未带伞”发生的概率；

(2)“甲先生带伞条件下没有下雨” 发生的概率。

解 设天气情况：X，符号集为 {0(有雨)，1(无雨)}；天气预报：Y，符号集为 {0(有雨)，1(无雨)}；带伞情况：Z，符号集为 {0(带伞)，1(未带伞)}。由题，X-Y 的条件概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Y-Z 的条件概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

X-Z 的条件概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

(1) 事件“在雨天条件下甲先生未带伞”发生概率为 $p(z=1|x=0)=\frac{2}{9}$

(2) 事件“甲先生带伞条件下没有下雨”发生的概率为

$$\begin{aligned} p(x=1|z=0) &= \frac{p(x=1)p(z=0|x=1)}{p(z=0)} \\ &= \frac{p(x=1)p(z=0|x=1)}{p(x=0)p(z=0|x=0)+p(x=1)p(z=0|x=1)} \\ &= \frac{0.5\times 5/9}{0.5\times 7/9+0.5\times 5/9} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

例 2.7 设一汽车在开往目的地的道路上需要经过 4 组信号灯，每组信号灯以 1/2 的概率允许或禁止汽车通过。以 X 表示汽车首次停下时，它通过信号灯的组数(设各组信号灯的工作相互独立)，求 X 的分布律。

解 以 p 表示每组信号灯禁止汽车通过的概率，易知 X 的分布律如表 2.1 所示。

表 2.1

X	0	1	2	3	4
$P(x)$	p	$(1-p)\ p$	$(1-p)^2 p$	$(1-p)^3 p$	$(1-p)^4$

或写成

$$P\{X=k\}=(1-p)^k p, \quad k=0,1,2,3, \quad P\{X=4\}=(1-p)^4$$

以 $p=1/2$ 代入得表 2.2。

表 2.2

X	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

例 2.8 某人进行射击，设每次射击的命中率为 0.02，独立射击 400 次，试求至少击中 2 次的概率。

解 将一次射击看成一次试验。设击中的次数为 X，则 $X \sim b(400,0.02)$ 。X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\begin{bmatrix}400\\k\end{bmatrix}(0.02)^k(0.98)^{400-k}, \quad k=0,1,\cdots,400$$

于是所求概率为

$$\begin{aligned}P\{X \geqslant 2\}&=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}\\&=1-(0.98)^{400}-400\times 0.02\times(0.98)^{399}\\&=0.9972\end{aligned}$$

例 2.9 一个靶子是半径为 2m 的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 为弹着点与圆心的距离。试求随机变量 X 的分布函数。

解 若 $x<0$ ，则 $\{X \leqslant x\}$ 是不可能事件，于是 $F(x)=P\{X \leqslant x\}=0$ 。

若 $0 \leqslant x \leqslant 2$ ，由题意，$P\{0 \leqslant X \leqslant x\}=kx^2$ ，k 是某一常数，为了确定 k 的值，取 $x=2$ ，有 $P\{0 \leqslant X \leqslant 2\}=4k$ ，但已知 $P\{0 \leqslant X \leqslant 2\}=1$ ，得 k=1/4，即 $P\{0 \leqslant X \leqslant x\}=\dfrac{x^2}{4}$ 。

于是

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X \leqslant x\}\\&=P\{X<0\}+P\{0 \leqslant X \leqslant x\}\\&=\frac{x^2}{4}\end{aligned}$$

若 $x>2$ ，由题意，$\{X \leqslant x\}$ 是必然事件，于是 $F(x)=P\{X \leqslant x\}=1$ 。

综上所述，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

例 2.10 将一温度调节器放置在储存着某种液体的容器内。调节器整定在 d℃，液体的温度 X(以℃为单位)是一个随机变量，且 $X\sim N(d,0.5^2)$。

(1) 若 $d=90$，求 X 小于 89℃的概率；

(2) 若要求保持液体的温度至少为 80℃的概率不低于 0.99，问 d 至少为多少？

解 (1) 所求概率为

$$\begin{aligned}P\{X<89\}&=P\left\{\frac{X-90}{0.5}<\frac{89-90}{0.5}\right\}\\&=\Phi\left(\frac{89-90}{0.5}\right)\\&=\Phi(-2)\\&=1-\Phi(2)\\&=1-0.9772\\&=0.0228\end{aligned}$$

(2) 按题意需求 d 满足

$$\begin{aligned}0.99\leqslant P\{X\geqslant 80\}&=P\left\{\frac{X-d}{0.5}\geqslant\frac{80-d}{0.5}\right\}\\&=1-P\left\{\frac{X-d}{0.5}<\frac{80-d}{0.5}\right\}\\&=1-\Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right)\end{aligned}$$

即 $\Phi\left(\dfrac{d-80}{0.5}\right)\geqslant 0.99=\Phi(2.327)$，故需 $d>81.1635$。

例 2.11 设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度。

解 分别记 X，Y 的分布函数为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$。下面先来求 $F_Y(y)$。

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} \\
&= P\{2X+8 \leqslant y\} \\
&= P\left\{X \leqslant \frac{y-8}{2}\right\} \\
&= F_X\left(\frac{y-8}{2}\right)
\end{aligned}
$$

将 $F_Y(y)$ 关于 y 求导数，得 $Y=2X+8$ 的概率密度为

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\left(\frac{y-8}{2}\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{y-8}{2}\cdot\dfrac{1}{2}, & 0 < \dfrac{y-8}{2} < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}
$$

例 2.12 设二维随机变量 $(X，Y)$ 具有概率密度

$$
f(x,y) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$

求分布函数 $F(x,y)$。

解

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_0^y\int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & x,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}
$$

即有 $F(x,y) = \begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

例 2.13 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度 $f(x,y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leqslant y \leqslant x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$。

解

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{x^2}^{x} 6\mathrm{d}y = 6(x-x^2), & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6\mathrm{d}x=6(\sqrt{y}-y), & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

例 2.14 某医院当新生儿诞生时，医生要根据婴儿的皮肤颜色、肌肉弹性、反应的敏感性、心脏的波动等方面的情况进行评分，新生儿的得分 X 是一个随机变量。以往的资料表明 X 的分布率如表 2.3 所示，试求 X 的数学期望 $E(X)$ 。

表 2.3

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0.002	0.001	0.002	0.005	0.02	0.04	0.18	0.37	0.25	0.12	0.11

解

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times 0.002+1\times 0.001+2\times 0.002+3\times 0.005+4\times 0.02\\&\quad+5\times 0.04+6\times 0.18+7\times 0.37+8\times 0.25+9\times 0.12+10\times 0.01\\&=7.15\end{aligned}$$

例 2.15 设随机变量$(X，Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x, x>1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求数学期望 $E(Y)$， $E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$。

解 由题得

$$\begin{aligned}E(Y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\int_{1}^{\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^3y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}[\ln y]_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x\\&=3\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x\\&=\left[-\frac{3\ln x}{2x^2}\right]_{1}^{\infty}+\frac{3}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$=\int_{1}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{3}{2x^4y^3}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{3}{5}$$

例 2.16 设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中 $\theta>0$，求 $E(X)$， $D(X)$。

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{0}^{\infty}x\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x$$
$$=-x\mathrm{e}^{-x/\theta}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x$$
$$=\theta$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\infty}x^2\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x$$
$$=-x^2\mathrm{e}^{-x/\theta}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2x\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x$$
$$=2\theta^2$$

于是 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$。

例 2.17 在计算机机房的一台计算机经常出现故障，研究者每隔 15min 观察一次计算机的运行状态，收集了 24h 的数据(共作 97 次观察)。用 1 表示正常状态，0 表示不正常状态，所得的数据序列如下：

1110010011111110011110111111001111111110001101101

111011011010111101110111101111110011011111100111

已知计算机在某一时段(15min)的状态为 0，问在此条件下从此时段起此计算机能连续正常工作 3 刻钟(3 个时段，45min)的条件概率为多少？

解 设 X_n 为第 $n(n=1,2,\cdots,97)$ 个时段的计算机状态，可以认为它是一个齐次马尔可夫链，状态空间 $I=\{0,1\}$。96 次状态转移情况是： $0\to0$,8 次； $0\to1$,18 次； $1\to0$,18 次； $1\to1$,52 次。因此，一步转移概率可用频率近似地表示为

$$p_{00}=P\{X_{n+1}=0|X_n=0\}\approx\frac{8}{8+18}=\frac{8}{26}$$

$$p_{01}=P\{X_{n+1}=1|X_n=0\}\approx\frac{8}{8+18}=\frac{8}{26}$$

$$p_{10}=P\{X_{n+1}=0|X_n=1\}\approx\frac{18}{18+52}=\frac{18}{70}$$

$$p_{11}=P\{X_{n+1}=1|X_n=1\}\approx\frac{52}{18+52}=\frac{52}{70}$$

由题意，某一时段的状态为 0 就是初始状态为 0，即 $X_0=0$，由乘法公式、马氏性和齐次性得，所求条件概率为

$$\begin{aligned}
&P\{X_1=1,X_2=1,X_3=1|X_0=0\}\\
&=P\{X_0=0,X_1=1,X_2=1,X_3=1\}/P\{X_0=0\}\\
&=P\{X_0=0\}P\{X_1=1|X_0=0\}P\{X_2=1|X_1=1,X_0=0\}\\
&\quad\cdot P\{X_3=1|X_2=1,X_1=1,X_0=0\}/P\{X_0=0\}\\
&=P\{X_1=1|X_0=0\}P\{X_2=1|X_1=1\}P\{X_3=1|X_2=1\}\\
&=P_{01}(1)P_{11}(1)P_{11}(1)\\
&=\frac{18}{26}\cdot\frac{52}{70}\cdot\frac{52}{70}\\
&=0.382
\end{aligned}$$

例 2.18 已知齐次马尔可夫链的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，问此马尔可夫链有几个状态，并求二步转移概率矩阵。

解 因为转移概率矩阵是三阶的，故此马尔可夫链有 3 个状态。二步转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}(2)=\boldsymbol{P}^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{9}&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&\frac{5}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&\frac{4}{9}&\frac{3}{9}\end{bmatrix}$$

例 2.19 从次品率为 $p(0<p<1)$ 的一批产品中，每次随机抽取一个产品，以 X_n 表示前 n 次抽查出的次品数。

(1) $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 是否是齐次马尔可夫链？

(2) 写出状态空间和转移概率；