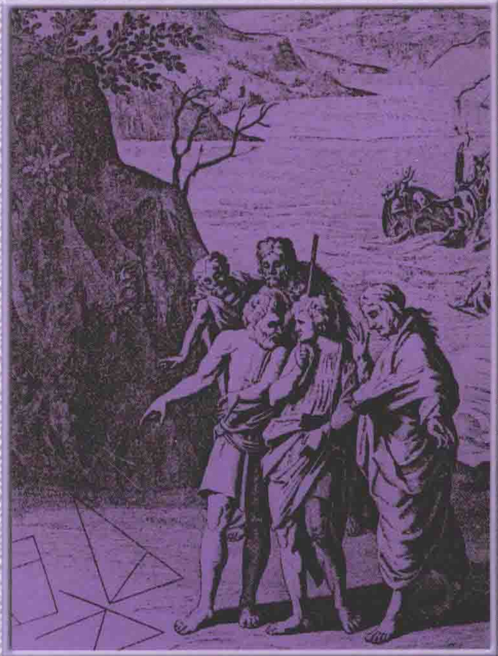
《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

布劳维不动点定理

——从一道前苏联数学奥林匹克试题谈起



佩捷 主编

◎ 布劳维不动点定理

◎ 不动点方法与数值方法

◎ 角谷静夫不动点定理

◎ 球面上的映射与不动点定理

◎ 拓扑学中的不动点理论前沿介绍

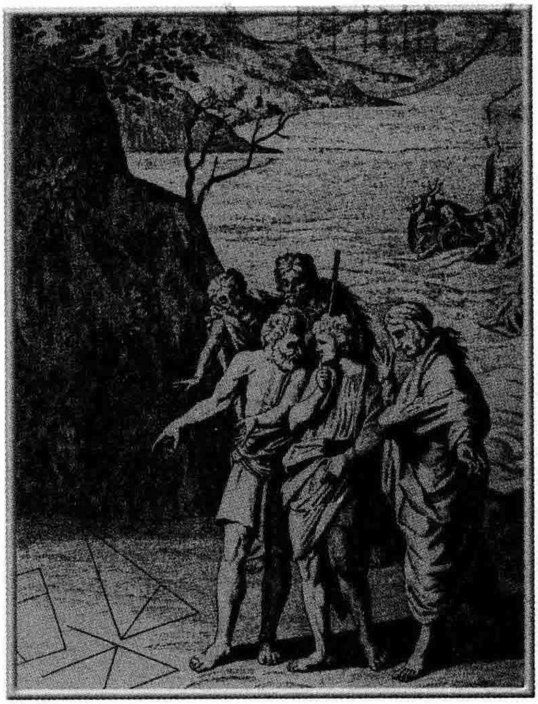
HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

布劳维不动点定理

——从一道前苏联数学奥林匹克试题谈起

佩捷 主编



◎布劳维不动点定理

◎不动点方法与数值方法

◎角谷静夫不动点定理

◎球面上的映射与不动点定理

◎拓扑学中的不动点理论前沿介绍

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要介绍了布劳维不动点定理及其推广角谷静夫不动点定理的证明及应用。全书共分为6章:第1章,布劳维不动点定理;第2章,某些非线性微分方程的周期解的存在性;不动点方法与数值方法;第3章,角谷静夫不动点定理;第4章,Walras式平衡模型与不动点定理;第5章,球面上的映射与不动点定理;第6章,拓扑学中的不动点理论前沿介绍。

图书在版编目(CIP)数据

布劳维不动点定理:从一道前苏联数学奥林匹克试题谈起/佩捷主编. -- 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.1

ISBN 978-7-5603-4417-1

Ⅰ.①布… Ⅱ.①佩… Ⅲ.①布劳威尔不动点定理 Ⅳ.①O189.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第274075号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 宋晓翠
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张12 字数133千字
版 次 2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4417-1
定 价 38.00元

◎

目录

引　言

1992 年苏联解体，始于 1961 年的苏联中学生数学奥林匹克竞赛也嘎然而止. 此项竞赛试题大多由前苏联著名数学家所提供，背景深刻、回味久远，令世界各国数学爱好者所瞩目. 1976 年在杜尚别举行的第十届苏联中学生数学奥林匹克中竞赛有如下试题：

在尺寸为 99×99 的国际象棋盘上画着一个图形 Φ（在 a)，b)，c) 各题中的图形 Φ 各不相同）. 在图形 Φ 的每一个方格中都有一只甲虫. 在某一时刻，甲虫都飞了起来，并又都重新落回到图形 Φ 上的方格中；于是同一方格中有可能落入好几只甲虫. 但是，任何两只原来处于相邻方格中的甲虫，在起飞后仍然落在相邻的方格中或者落入了同一个方格.（具有公共边或公共顶点的方格叫作相邻的.）

a) 假定图形 Φ 为"中心十字"，亦即由棋盘的中间一行方格（即第 50 行方格）与中间一列（即第 50 列）方格所形成

的“十字”(参阅图 1). 证明,此时必有某一只甲虫落回到原来的位置或者落入了原来的邻格中.

b)如果图形 Φ 为田字,即由“中心十字”加上棋盘的所有边界上的方格所形成的图形(参阅图 2),那么上述断言是否仍然成立?

c)* 如果图形 Φ 为整个棋盘,那么断言是否仍然成立?

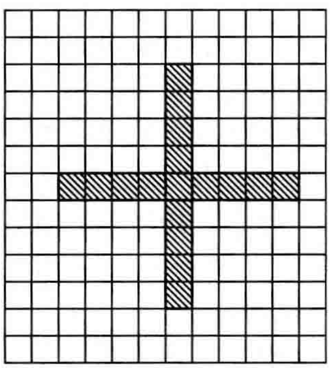


图 1

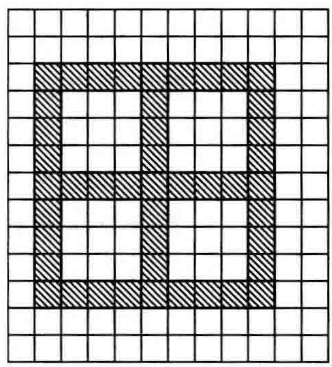


图 2

解答如下:a)可以认为,甲虫从中心方格往右移动了 $k\geqslant 2$ 个方格. 在右方的 49 个方格中都各写上一个数,标明该方格中的甲虫在水平方向所移动的方格数目,往右移为正,往左移为负. 显然,最右端方格中的甲虫所移动的格数是负的,而我们写在相邻方格中的数的差不大于 2. 这样一来,当我们从中心方格(里面写着 $k\geqslant 2>0$)开始一路往右边看去(最右端方格中写着一个负数),中途必然要“穿越 0 点”,这就说明,中途必有一个方格中写着 0,1 或 −1,意即该方格中甲虫的水平位移不多于 1 个方格.

b)**答案:**断言不成立.

图 3 中所给出的例子表明,所有甲虫可以都远离

原来的位置(左图中是甲虫原来的位置,请关注带有编号的甲虫,右图是它们后来的位置).

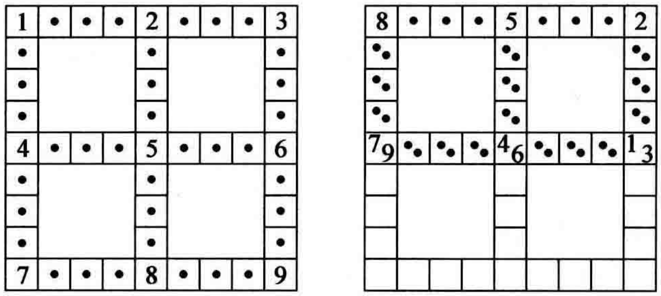


图3

c)**答案**:断言成立.

我们直接对 $m \times n$ 矩形证明题中断言. 对 1×1 和 2×2 正方形和 1×2 矩形,结论显然成立(对于 $1 \times n$ 和 $2 \times n$ 矩形的证明,就像a)小题那样,也很容易). 设 $m \times n$ 矩形的尺寸为 $2 < m \leqslant n$. 我们来证明,可以从它上面(沿着边缘)切出一个较小的矩形 Π,其中,Π 中的所有甲虫仍然落回 Π 中. 于是就只要证明,Π 中存在"几乎不动"的甲虫即可.

我们将国际象棋中的王由方格 A 走到方格 B 所要走的步数称为方格 A 与 B 之间的距离,并将其记为 $\rho(A,B)$. 于是,对任何 $r = 1,2,\cdots$,方格表中与方格 C 的距离不超过 r 的方格集合 M 是以 C 为中心的 $(2r+1) \times (2r+1)$ 矩形. 将原在方格 K 中的甲虫后来所在的方格记为 $f(K)$. 根据题意,如果方格 A,B 的距离为1,则有 $\rho(f(A),f(B)) \leqslant 1$,亦即对任何两个方格 A 与 B,都有

$$\rho(f(A),f(B)) \leqslant \rho(A,B) \qquad (1)$$

在 $m \times n(m \leqslant n)$ 矩形中,将这样的方格称为"边缘

方格”,如果由它到矩形中的某个方格的距离等于 $n-1$. 如果 $m<n$,则这样的“边缘方格”就是两侧边缘上的两列方格(矩形的短边);在 $n\times n$ 正方形中,这样的“边缘方格”就是边框中的所有方格. 相对边缘列中的任何两个方格之间的 ρ 距离等于 $n-1$,而其余任何两个方格间的 ρ 距离则要小一些.

如边缘列中的任何方格中都没有落入甲虫,那么我们就得到了所需要的 $m\times(n-1)$ 矩形 Π:甲虫由 Π 中的任一方格 K 落入 Π 中的方格 $f(K)$.

如若不然,我们就切去所有边缘方格,得到矩形 Π. 事实上,我们可以标出若干个(2 个、3 个或 4 个)方格 K_i,使得在每个边缘列中含有一个 $f(K_i)$. 由于对于 Π 中的任一方格 M 和每个方格 K_i,都有 $\rho(M,K_i)\leqslant n-2$,所以根据(1),就有 $\rho(f(M),f(K_i))\leqslant n-2$. 由此及关于对边的注解,知 $f(M)$ 含在 Π 中.

显然现在可以用归纳法(对 $n=\max\{m,n\}$ 归纳,或对 $m+n$ 归纳)来证明题中的断言了. 不但如此,还可由证明中得知,一定存在 2×2 正方形把自己映为自己.

本题是著名的布劳维定理的离散情形,该定理是说:把凸集变为自身的连续映射一定有不动点.

关于布劳维定理现在出现最多的领域是在经济理论中. 本书将介绍布劳维定理及其推广角谷静夫定理的证明及应用.

第1章 布劳维不动点定理

布劳维不动点定理从本质上说是一个拓扑学中的经典定理,而在经济学中应用最多.所以最好是由拓扑学专家出身的经济学家讲最好.中山大学的王则柯先生就是最恰当的人选.以下是他的介绍.

1.1 Brouwer 定理

1912 年,荷兰数学家 L. E. J. Brouwer 提出他的不动点定理,并且运用度数理论(Degree Theory)证明了它.更早,在 1904 年,P. Bohl 曾用 Green 公式证明了关于可微函数的类似的定理.现在,既然我们更加关心不动点的计算而不是它的存在,所以我们不走 Brouwer 或 Bohl 的路,而是沿着一条基于 Sperner 的纯粹组合的引理的路.这种讨论方法更接近我们所关心的算法本身,并且这种做法在以后是有价值的.

我们首先准确地叙述 Brouwer 定理,并且阐明只要对标准单纯形证明定理就够了. 1.2 节给出若干例子,它们蕴含用不同方式证明 Brouwer 定理的思想. 1.3节把 Brouwer 定理归结为 Sperner 引理. 最后,在 1.4 节,完成 Sperner 引理的证明.

作为入门,本章的全部讨论限于在欧几里得空间中进行. 由于不动点算法的论述多采用拓扑学的术语,为与文献协调,我们也说拓扑空间,但读者都可以理解为线性欧氏空间. 有了这个约定以后,我们还常常简单地只说"空间".

现在,n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 到一维欧氏空间$\mathbb{R}^1$(实数)的一个单值对应$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$,就是我们在数学分析中熟悉的 n 元函数 $y=f(x)$,或者写成 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$. 而$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^m$ 的一个单值对应$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$,就是一个映射. 设这个映射由 $y=f(x)$表示,而 $y=(y_1,\cdots,y_m)$,就可以写 $y=(f_1(x),\cdots,f_m(x))$. 或者,$y_i=f_i(x)$,$i=1,\cdots,m$,这里,每个 $f_i(x)=f_i(x_1,\cdots,x_n)$都是一个 n 元函数,称作映射f的坐标分量函数.

在不动点的算法的文献中,映射(map 或 mapping)与函数(function)的说法常常混用. 但我们仍建议函数只用于称呼单值数值(实或复)函数.

单纯形(Simplex)的概念,读者是熟悉的. 简单回忆一下:$\mathbb{R}^m$ 中$j+1$ 个仿射无关的点 $y^0,\cdots,y^j$ 的凸包,是一个j维(闭)单纯形. 记作 $\overline{\sigma^j}$,而 $y^0,\cdots,y^j$ 是 $\overline{\sigma^j}$ 的$j+1$个顶点. 所谓若干个点的凸包,是包含这些点的最小凸集,或者说是所有包含这些点的凸集的交集,这些说法都是等价的. 对凸包概念不熟悉的读者,可用下述表达式

$$\overline{\sigma^j} = \left\{ x = \sum_{k=0}^{j} \lambda_k y^k \mid \sum_{k=0}^{j} \lambda_k = 1; \lambda_k \geqslant 0, k = 0, \cdots, j \right\}$$

在这个表达式中，诸 λ_k 称作单纯形 $\overline{\sigma^j}$ 中点 x 的重心坐标.

现在叙述：

定义1　空间 X 到 Y 的一个映射 $h:X\to Y$ 称作是一个同胚，如果它是一对一的并且在上的，此外 h 与 h^{-1} 二者均是连续的. 这时，称空间 X 与 Y 是同胚的，Y 与 X 互为同胚象.

一对一的亦称单的；在上的亦称满的. 既单且满的映射，称作双射.

关于定义1，我们还可以把 X 与 Y 理解为相应空间中的特定子集. 这时，X 与 Y 同胚意味着什么呢？同胚映射在 X 与 Y 之间建立了一一对应的关系，并且这种对应是双方连续的. 形象地说，X 可以通过连续变形变成 Y，反之亦然. 一些作者把拓扑学喻作橡皮膜上的几何学，指的是拓扑学研究空间在同胚映射之下不变的性质. 当然，讲到橡皮膜，只是就二维情况建立比喻，拓扑学当然不限于讨论二维的情况. 但橡皮的比喻是中肯的. 例如，一个圆盘和一个方块是同胚的，两者可以通过不粘连不撕裂的变形互变. 粘连，就不是一对一的了；撕裂，就不是连续的了. 不妨思考一下，$\mathbb{R}^3$ 中一个球（实心或空心），可以同胚地变成什么？

定义2　所谓 n 维闭包腔，是欧氏空间 n 维实心球 $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leqslant 1\}$ 的同胚象. 即：C 是 n 维闭包腔，如果存在一个同胚 $h: B^n \to C$.

定理（Brouwer）　设 C 是一个 n 维闭包腔，映射 $f: C\to C$ 是连续的. 那么，f 有一个不动点，即：存在

$x^* \in C$使得$f(x^*) = x^*$.

首先,举几个例子分别说明定理条件——C 闭、实心,f 连续——的必要性.

例 1 实心的必要性.

令 $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant \|x\| \leqslant 2\}$ 为平面上的圆环. 易知 C 是闭的,C 的内部非空(int $C \neq \varnothing$),但 C 不是实心. 令 $f:C \to C$ 由 $f(x) = -x$ 确定,则 f 显然是连续的,但它没有不动点. 事实上,圆环绕中心的任何一个不等于 2π 整数倍的旋转,都没有不动点(图 1).

注意,有些文献把包腔实心的性质说成是"凸性",这是不够准确的. 事实上,一个 n 维闭包腔,不必在欧氏空间通常意义下为凸的. 图 2 中的平面闭域 C 是一个二维包腔,符合 Brouwer 定理关于 C 的条件,但不是通常意义上的凸集.

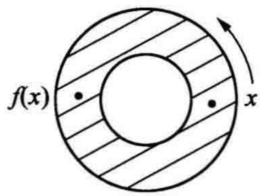


图 1

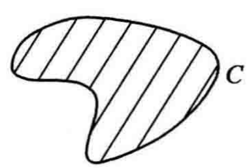


图 2

例 2 闭性的必要性.

令 $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$,则 C 是凸的,且 int $C \neq \varnothing$,但 C 不是闭的. 记 $u^1 = (1,0) \in \mathbb{R}^2$,按 $f(x) = \frac{1}{2}(x + u^1)$确定映射$f:C \to C$,即$f$将每个 $x \in C$ 向 u^1 移动一半距离,显然,f 是连续的,但没有不动点(图 3).

容易看到,若将上述$f:C \to C$ 按自然的方式扩张到 C 的闭包 $\overline{C}$ 上,则 $\bar{f}:\overline{C} \to \overline{C}$ 有不动点 u^1. 事实上,$\overline{C}$

和 $\bar{f}$ 是满足 Brouwer 定理的条件的，问题是 $u^1 \notin C$.

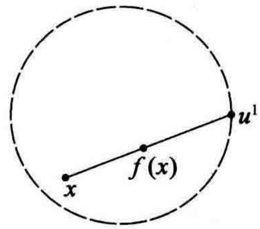


图 3

例 3　连续性的必要性.

连续性的必要性是明显的，反例极易构造. 例如，令 $C=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|\leqslant 1\}$，则 C 是二维闭包腔. 取 u^1 如例 2 而令 $f:C\to C$ 如下

$$f(x)=\begin{cases}u^1, 若\ x\neq u^1\\ 0, 若\ x=u^1\end{cases}$$

即 f 将 C 中除 u^1 外各点都映到 u^1，但将 u^1 映到原点. 显然 f 没有不动点. 事实上，f 在 $x=u^1$ 处不连续.

再看一个例子：

例 4　令 $C=\mathbb{R}^2$，则 C 闭凸，并且内容非空. 令 f: $C\to C$ 由 $f(x)=x+u^1$ 确定，u^1 仍如例 2. 显然 f 是连续的，同样，显然 f 没有不动点. 这是一个将全平面向右移动一个单位长度的平移.

现在，回到 Brouwer 定理本身. 我们首先通过下述三个引理，说明只要对一种最简单、最标准的 n 维闭包腔证明该定理就可以了. 为此，先介绍一些简单的概念.

定义 3　所谓标准单纯形 S^n，是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 $n+1$ 个单位向量(点) $v^0, v^1, \cdots, v^n$ 的凸包. 记 $N_0=\{0,1,\cdots,n\}$. 以 S_i^n 记 S^n 的与 v^i 相对的闭界面. 这时，S^n 的边界是

$\partial S^n = \bigcup_{i \in N_0} S_i^n$.

图 4 就是一个二维标准单纯形.

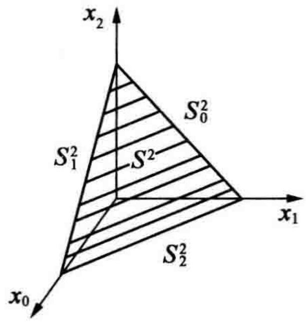


图 4

若记$\mathbb{R}^{n+1}$的正卦限为$\mathbb{R}_+^{n+1}$(由各坐标分量均非负的点组成),空间的点用列向量表示,而 v 是所有分量均为 1 的向量,那么,S^n 可以写成 $S^n = \{x \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid v^T x = 1\}$. 这里,$v^T x = 1$ 即 $\sum_{i \in N_0} x_i = 1$.

下面的引理说明 n 维闭包腔的意义.

引理 1 若 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的紧致凸集,其内部非空. 那么,C 是一个 n 维闭包腔.

证明 我们构造一个映射 $h: B^n \to C$,然后证明 h 是同胚即可.

几何上,h 是这样构造的:C 的内部非空,在 C 的内部任取一点 c. 然后将从 c 出发的每条射线与 C 的交的长度单位化,就得到一个球 B^n. 这个单位化的过程,就是一个同胚变换. 具体写下来就是:

取 $\boldsymbol{c} \in \operatorname{int} C$. 对 $0 \neq \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$,令 $\theta(\boldsymbol{d}) = \max\{\theta \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{c} + \theta\boldsymbol{d} \in C\}$. 这里最大值取到,是因为 C 紧致. 因 $\boldsymbol{c} \in \operatorname{int} C$,所以 $\theta(\boldsymbol{d}) > 0$,并且对于 $\lambda > 0$,成立 $\theta(\lambda\boldsymbol{d}) =$

$\lambda^{-1}\theta(\boldsymbol{d})$.（注意，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 是向量）

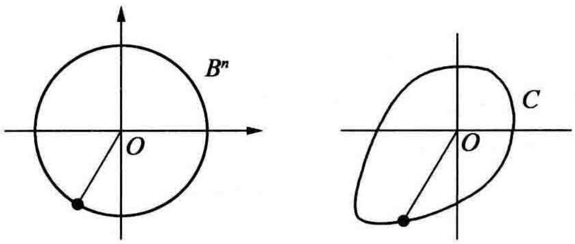


图 5

记 $\|\boldsymbol{d}\|_2$ 为 $\boldsymbol{d}$ 的长度，定义 $h:B^n\to C$ 如下

$$h(\boldsymbol{d})=\begin{cases}\boldsymbol{c}+\|\boldsymbol{d}\|_2\theta(\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}, & \text{若 } \boldsymbol{d}\neq 0\\ \boldsymbol{c}, & \text{若 } \boldsymbol{d}=0\end{cases}$$

这样，$h(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}$ 当且仅当 $\boldsymbol{d}=0$，所以 $h(\boldsymbol{d})=h(\boldsymbol{d}')=\boldsymbol{c}$ 蕴含 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}'$. 现若 $h(\boldsymbol{d})=h(\boldsymbol{d}')\neq\boldsymbol{c}$，那么 $\|\boldsymbol{d}\|_2\theta(\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{d}=\|\boldsymbol{d}'\|_2\theta(\boldsymbol{d}')\cdot\boldsymbol{d}'$，所以 $\boldsymbol{d}'=\lambda\boldsymbol{d}$，$\lambda>0$. 但这样一来，有 $\|\boldsymbol{d}\|_2\theta(\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}=\lambda\|\boldsymbol{d}\|_2\lambda^{-1}\cdot\theta(\boldsymbol{d})\lambda\boldsymbol{d}=\lambda\|\boldsymbol{d}\|_2\cdot\theta(\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}$，于是 $\lambda=1$. 所以 h 是一对一的.

下证 h 是在上的. 因 $h(0)=\boldsymbol{c}$，所以只须证明对任一 $\boldsymbol{c}\neq x\in C$，存在 $\boldsymbol{d}\in B^n$ 使得 $h(\boldsymbol{d})=x$. 事实上，令 $\boldsymbol{d}=(x-\boldsymbol{c})/\|x-\boldsymbol{c}\|_2\theta(x-\boldsymbol{c})$ 即容易验证 $\boldsymbol{d}\in B^n$ 和 $h(\boldsymbol{d})=x$.

h 和 h^{-1} 的连续性是容易证得，留作练习.

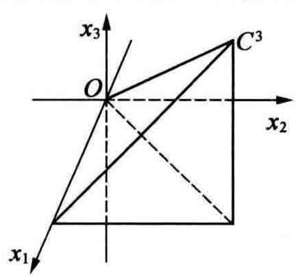


图 6

引理 2　S^n 是一个 n 维闭包腔.

证明　令 $C^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid 1\geqslant x_1\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant 0\}$. 显然 C^n 是内部非空的紧致凸集,据引理 1,C^n 是 n 维闭包腔. 以下只须证明 S^n 与 C^n 同胚.

定义 4　$h:C^n\to S^n$ 和 $h^{-1}:S^n\to C^n$ 为 $h(c)=v^0+\boldsymbol{Q}C$ 和 $h^{-1}(s)=\boldsymbol{Q}'S$,这里 $c\in C^n$,$s\in S^n$ 而 $\boldsymbol{v}^0=(1,0,\cdots,0)^T\in\mathbb{R}^{n+1}$,$\boldsymbol{Q}$ 为 $(n+1)\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ +1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Q}'$ 为 $n\times(n+1)$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

容易验证,h 是一对一和在上的,并且 h 和 h^{-1} 都是连续的. 所以,S^n 与 C^n 同胚,因此 S^n 与 B^n 同胚.

下一个引理说,只要对 S^n 证明 Brouwer 定理就够了.(这会简化证明,但对计算不动点却没有大的帮助,因为要将有关的同胚映射表述出来是困难的.)

引理 3　若 Brouwer 定理对 S^n 成立,则它对任一 n 维闭包腔 C 亦成立.

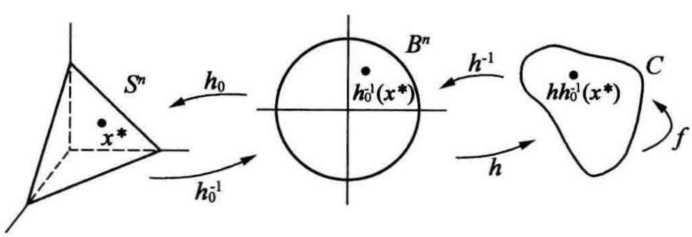


图 7