暨南大学经济管理实验中心实验教材

统计实验及R语言模拟

Statistical Experiment and Simulation with R Language

侯雅文　王斌会　编著

北京大学出版社 PEKING UNIVERSITY PRESS
暨南大学出版社 JINAN UNIVERSITY PRESS

经济管理国家实验教学示范中心
经济管理省级实验教学示范中心 共同资助

暨南大学经济管理实验中心实验教材

统计实验及R语言模拟

Statistical Experiment and Simulation with R Language

侯雅文 王斌会 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
中国·北京

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS
中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

统计实验及R语言模拟/侯雅文，王斌会编著. —广州：暨南大学出版社，2015.8
（暨南大学经济管理实验中心实验教材）
ISBN 978-7-5668-1552-1

Ⅰ.①统… Ⅱ.①侯…②王… Ⅲ.①统计学—实验②统计分析—程序语言—程序设计 Ⅳ.①C8-33②C819

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第155554号

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
　　营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http://www.jnupress.com　http://press.jnu.edu.cn

排　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　刷：广东广州日报传媒股份有限公司印务分公司

开　本：787mm×1092mm　1/16
印　张：12
字　数：291千
版　次：2015年8月第1版
印　次：2015年8月第1次

定　价：28.00元

“暨南大学经济管理实验中心实验教材”丛书编委会

总　序

百年沧桑，弦歌不辍；巍巍暨南，展焕新颜。暨南大学自1906年创办以来，始终秉承“宏教泽而系侨情”的办学宗旨，注重以中华民族优秀的传统道德文化培养造就人才。“始有暨南，便有商科”，最初设立的商科便因兼具理论与实用的“暨南特色”而享誉海内外。经过一百多年的发展，商科已分化出经济管理学科中的许多门类，各门类分工明确而细化，又交叉融合，近年来屡屡在学科发展上有突破和创新，尤为可喜的是暨南大学经济管理实验教学中心于2012年荣获国家级实验教学示范中心项目。这是我校继2008年获批媒体实验教学中心之后，再次获得国家级实验教学示范中心项目，是教育部“质量工程”重要建设项目之一，也是质量工程中含金量较高、获批难度较大的一个项目。这些项目是高等学校实验教学研究和改革的基地，引领着全国高等学校实验教学改革的方向。

暨南大学经济管理实验教学中心（以下简称“中心”）依托产业经济学和金融学2个国家级重点学科，3个一级学科博士学位点，拥有一支以珠江学者、教学名师和知名专家带头人组成的优秀教学团队，其中“会计学教学团队”被评为国家级教学团队。中心包括金融模拟、会计模拟、ERP实验、电子商务模拟、行为分析、经济统计与分析、财税管理与分析、酒店管理等18个实验室。中心师资力量雄厚，副高级以上教师占总人数的75%，承担全校22个本科专业以及研究生、博士生相关课程的实验、实训、实习等教学任务。

中心继承和发扬暨南大学经济管理教育重视实际操作、强化能力培养的优良传统，紧贴经管发展的现实需求，全面开展“虚拟仿真实验＋校企合作实践”模式的实践教学形式改革，注重能力培养与社会需求相结合的教学内容改革。实验是教学不可或缺的一个重要组成部分，作为理论教学的基础和延伸，中心始终坚持“强化基础、重视实践、个性培养与创新能力紧密结合”的实验教学理念，逐步构建理论教学、实验教学、课外实践等多维互动、整体提升的创新实验教学体系，以培养未来华商领袖为己任，着力培养具有创新能力的复合型经管专业人才，为建设成为“具有浓厚华人华侨特色，享誉海内外的‘高端、优质、创新’复合型经济管理人才培养基地”而努力。在中心全体教职工的共同努力下，中心工作取得了显著成效，比如，开设的“财务学原理”、“基础会计学”被评为国家级精品课程，工商管理类和经济学类专业被评为国家级特色专业，中心申报的教学成果项目于2010年获广东省教学成果奖一等奖等。

随着经济和科学技术的进步，尤其是计算机技术的飞速发展，数据、模型与实验对于当代科学乃至整个社会的影响和推动作用日益显著。“暨南大学经济管理实验中心实验教材”作为国家和广东省教学示范中心的资助教材，根据经济管理类专业、学科特点，实验教材中的数据、模型和例子全部选自经济、管理等方面的内容，形成了一个能反映经济管理类院校特色的“经济管理实验”系列教材。这一特色的形成，不仅对国内经济管理实验是一个突破与创新，而且对培养经济管理类院校的应用型、创新型、复合型人

才，有着积极意义。

本系列教材在总结过去教材建设经验的基础上，结合应用型本科教育的特点，借鉴国内外的经验做法，在经济管理各专业的课程体系、课程内容，教学方法、教材编写等方面进行进一步探索和创新。

本系列教材具有五个方面的特点：第一，创新性。从培养学生的兴趣入手，以掌握方法论和创造性思维为主线，以知识、概念和理论为基石，进行总体设计，思路新颖，写作体例风格独特。第二，前瞻性。搜集了最新的数据资料和理论研究成果，使教材内容着力体现超前性、前沿性、动态性。第三，实践性。体现了实验型本科教学的专业特点，以提高学生竞争力、综合素质和社会适应能力为最终目标。第四，系统性。基础知识、学科理论和课程体系融为一体，注重基础理论与实际应用的结合。第五，可读性。突出“以学生为中心”的思想，强调学以致用，所用语言浅显易懂，并附有一定的案例分析。

“暨南大学经济管理实验中心实验教材”的建设，改变了传统课程那种仅仅依赖“一支笔，一张纸”，由教师单向传输知识的模式。它提高了学生在教学过程中的参与程度，学生的主观能动性在实验中能得到相当充分的发挥。好的实验会引起学生学习科学知识和方法的强烈兴趣，并激发他们自己去解决相关实际问题的欲望，有助于促进学生独立思考和创新意识的培养。

教材建设是课程体系和教学内容改革的核心，是进一步加强学生教学工作，深化教学改革，提高学生教育教学质量的重要措施。暨南大学经济管理实验教学中心精心组织教材编写，通过专家组评审，分批立项，每批近十种，覆盖金融模拟、会计模拟、ERP实验、电子商务模拟、行为分析、经济统计与分析、财税管理与分析、酒店管理等实验课程。这些教材符合教育改革发展趋势，反映了经济管理学科建设的新理论、新技术、新方法、新实践，在国内同类教材中较为先进。我们期望通过几年的努力，打造出一系列特色鲜明的经济管理实验教材。

暨南大学校长、教授、博士生导师
国家重点学科产业经济学带头人
2014 年 6 月

前　言

从1777年法国科学家Buffon（蒲丰）邀请客人参与投针试验，得到关于π的估计，到第二次世界大战期间，美国科学家Stanislaw Ulam（冯·诺依曼）和John von Neumann（乌拉姆）为研究原子弹的裂变物质中子随机扩散问题，提出代号为“蒙特卡罗”模拟方法。由于模拟能够较为逼真地描述事物特点和真实实验过程，目前在经济、管理、金融、生物医学、物理学等诸多领域中都得到了应用和发展。

它与一般的数值计算方法有较大区别，是以概率统计为理论基础的研究方法。通常，根据问题建立概率统计模型，设定模型分布和参数，在一定精度要求下确立模拟量，依照建立抽样方法产生随机数，并计算模型的相关统计量结果作为模型估计。整个流程具体包括随机数产生、概率模型、统计量计算、模拟精度四大方面问题。

随机数是模拟的基石。本书第1章第1.2节详细介绍由一般均匀伪随机数产生，到运用逆变换方法、接受拒绝法、复合法和广义变换方法产生服从各种分布的随机数方法。因为随机数产生的随机性，所以并非每一次产生的随机数都符合随机性的要求。例如，按照二项分布B（1，0.5）产生0和1两个随机数取值，若计算机产生了5个随机数分别为（0，0，0，0，0），这也是可能的，但不一定满足随机数均匀性、独立性和拟合效果要求。因而需通过增大随机数产生数量和第1.3节中提及的检验方法，尽可能产生符合要求的随机数。对于产生一些难度较大的随机数，本书第4章的第4.1～4.2节分别介绍利用构造马氏链，产生随机数的Metropolis－Hastings和Gibbs方法。另外，由于计算机的随机数起源是“伪”的，蒙特卡罗方法的创立者冯·诺依曼说“任何人如果相信计算机能够产生出真正的随机的数序组都是疯子”。

广义的概率模型具体包括四个方面的内容，分别为：①概率；②分布特征；③大数定律；④中心极限定理。本书第2章第2.1～2.2节运用大数定律、频率方法、期望方法给出关于积分蒙特卡罗模拟，并讨论精度与模拟量之间的关系。在第2.4、4.3节通过优化方法获得关于模型分布特征估计量，利用中心极限定理产生随机数、区间估计等，上述概率模型在系统模拟中产生重要作用。本书第5章通过8个模拟过程，分别展示概率实验（第5.1、5.2、5.4节）、仿真实验（第5.3节）、参数估计实验（第5.5节）和随机过程实验（第5.6～5.8节）。第5章内容是将实际问题转化为概率统计模型，根据已知信息，建立对实际问题的计算机模拟过程，最终获得问题模拟结果，从而为研究提供简便、快捷、可靠的结论。

提高模拟精度是针对模拟方法提出的根本要求。增大模拟量是有效改善精度的重要方法之一。模拟量在受到计算机运行效率的限制时，在有限样本容量条件下的抽样方法可以改善模拟精度。本书第3章详细介绍了对偶变量法、控制变量法、条件期望法、分层抽样法、重要抽样法共5种常用减小估计量变异抽样方法，通过蒙特卡罗模拟，比较各种抽样方法减少方差效率。同时第4章第4.4～4.5节分别介绍Jackknife和Bootstrap抽样方法，前者重点在于由抽样所决定构建估计量方法与一般估计量差异，后者则是通过重复抽样提高估计精度。

R 语言作为实现上述第 1 ~ 5 章模拟的计算机编程工具，具有举足轻重的作用。计算机编程也是蒙特卡罗模拟实现的首要条件。R 语言正如一个虚拟的实验员，运用计算机向研究者展示实验的全部过程。它的运用使理论推导与模拟达成统一。本书第 6 章介绍 R 语言基础内容，包括 R 语言的数据格式、循环和函数创建、数据基本统计量计算和图形、模型分析方法。R 语言编程与其他语言相比，属于真正意义上的统计编程语言。程序编写模式简单易懂，并且具有基于世界范围统计方法（各种统计包）的支撑。例如，常见的随机数产生仅需 R 语言中的一个命令即可实现（第 1.1 节），Bootstrap 方法可以通过一个包 boot 实现（第 4.5 节）。如果你已具备使用 R 语言和基本统计分析方法，可以忽略这一章。如果你对其他编程语言十分熟悉，也可以按照本书的要求，完成各章的模拟程序。

R 语言在创建和运行蒙特卡罗模拟方面有着卓越的表现，很多较为复杂的模拟程序仅需 10 行以内的代码就可以完成。这是因为 R 语言本身就善于生成和管控海量数据，也擅长处理大数据。随着当前的数据发展趋势呈现出规模（Volume）、速度（Velocity）和种类（Variety）的“3V”指数级发展，需要更为简单的分析工具来驾驭这些“数据洪流”，而技术世界目前的发展还无法为各行各业提供易用工具的庞大需求，巨量数据时代要求在数据管理和分析方面采用新的范式和实践。目前，Google、Twitter、Facebook、Oracle 等公司都在使用 R 语言完成对其大数据的建模和分析过程。与此同时，R 语言逐渐成为具有广泛适用性的全球通用程序语言，它所建立的这种模式也被其他软件学习和采纳。R 语言的具体优势表现为：①开放的源代码（自由且免费），可以在任何操作系统如 Windows、Linux、Mac OS X 上使用；②统计学家和前沿算法（6 797 个包，且持续增加），形成高质、广泛的统计分析与数据挖掘平台；③重复性分析工作自动生成报告，提高工作效率；④扩展与兼容性，统计软件如 SAS、SPSS、Statistica 可互相调用 R、Python、Java、C、C + + 等语言，以及强大的数据库接口。

此书即将出版，在这里真诚感谢出版社的朋友们，他们为本书出版进行反复沟通与论证；感谢统计学系的同仁；感谢尹居良老师、陈征老师为本书提出宝贵意见；感谢研究生吴贤坚、蔡磊和张旭的校对工作，感谢王恩丹等同学的相关案例分析。

侯雅文

2015 年 5 月于暨南园

目　录

1 随机数产生与检验

随机数作为模拟真实世界发生事件的基础，由于计算机性能的提高和方法的改善，随机数产生的质量也与真实程度更为接近。例如，根据客户索赔情况，模拟某项保险业务盈亏，需要产生关于索赔人数和索赔额的随机数。实际上，在制造业、交通业、服务业、金融业等诸多领域都在使用模拟方法进行预研，以期在现实状况中获得更精确的结果和更高的收益。

本章将介绍如何使用 R 语言产生随机数，并对各类随机数产生原理进行阐述，最后展示产生随机数优劣的检验方法及应用。

1.1 用 R 语言产生随机数

R 语言产生随机数有两种方式：一是将产生方法编写成 R 程序，获得随机数；二是直接利用 R 语言自带的函数产生随机数。本节将介绍后者的产生过程。通常，随机数依据分布来源可以分为两大类，即离散型和连续型，它们由分布形式和参数两部分构成。

1.1.1 离散型随机数产生

常用的离散型随机变量包括二项分布、几何分布、超几何分布、负二项分布和泊松分布等。用 R 函数直接产生离散型随机数的方法非常便捷。一般来说，产生随机数的 R 函数由 r + 分布英文缩写 +（参数）三部分构成，例如，产生二项分布的 R 函数为 rbinom（n, size, prob），其中 rbinom 为产生二项分布随机数的函数，括号内参数分别表示：n，产生随机数个数；size，二项分布试验总次数；prob，每次试验中所规定的某事件 A 发生的概率。

```
set.seed(1)                 #设定随机数种子,确保结果一致
x = rbinom(100,20,0.3)      #产生 100 个 n = 20,p = 0.3 服从二项分布随机数
x                           #显示随机数
```

```
[1] 5 5 6 9 4 9…
```

在 R 语言中，常用的离散型随机数都可以通过函数命令迅速产生，具体如表 1.1 所示，由于随机变量的分布表达形式是多样化的，因而 R 语言中离散型随机数的产生在参数含义与常见含义上可能稍有区别。例如，负二项分布在很多书籍、文献中，多用总试验次数表示随机变量 X，在 R 语言中，X 则表示在所有试验中，某事件 A 不发生的次数。

表 1.1 常用离散型随机数的 R 函数命令与分布

分布名称	函数命令	参数	分布表达式
二项分布 Binomial	rbinom (n, size, prob)	size = n，试验总次数 prob = p，每次试验 A 事件发生概率	$P(X=x)=c_n^x p^x(1-p)^{n-x}$ $x=0,1,\cdots,n$
几何分布 Geometric	rgeom (n, prob)	prob = p，每次试验 A 事件发生概率	$P(X=x)=(1-p)^x p$ $x=0,1,2,\cdots$ X 表示 A 事件首次出现前，A 事件不发生的试验次数
超几何分布 Hypergeometric	rhyper (nn, m, n, k)	m = 不合格数 n = 合格数 k = 抽取数	$P(X=x)=\dfrac{c_m^x c_n^{k-x}}{c_{m+n}^k}$ $x=0,1,\cdots,m$
负二项分布 Negative binomial	rnbinom (nn, size, prob)	size = n，A 事件发生的次数 prob = p，每次试验 A 事件发生概率	$P(X=x)=\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)x!}p^n(1-p)^x$ $=c_{x+n-1}^{n-1}p^n(1-p)^x$ $x=0,1,2,\cdots$ X 表示 n 次 A 事件发生时，所有试验中 A 事件不发生的试验次数
泊松分布 Poisson	rpois (n, lambda)	lambda = λ	$P(X=x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $x=0,1,2,\cdots,\lambda\geqslant 0$
多项分布 Multinomial	rmultinom (n, size, prob)	size = N prob = $c(p_1, p_2, \cdots, p_k)$	$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_k=x_k)$ $=\dfrac{N!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k}$ $N=\sum_{i=1}^{k}x_i$

注：函数命令中第一个参数 n 或 nn 均表示随机数产生的数量。

【例 1.1】分别产生 $p=0.4$ 的几何分布随机数 10000 个，形成 100 * 100 的矩阵，并取行加和，形成 100 * 1 向量，作出直方图。同时，产生 $n=100$，$p=0.4$ 的负二项分布随机数 100 个，作出直方图，比较两者的相似性。

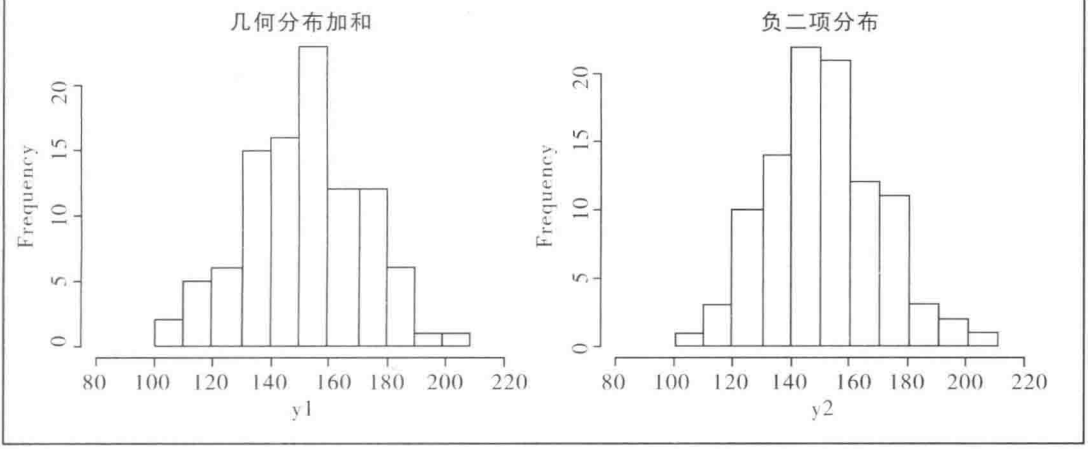
```
x = rgeom(10000,0.4)                                  #产生 10000 个 p = 0.4 服从几何分布随机数
x = matrix(x, nrow = 100, ncol = 100, byrow = T)      #形成 100*100 矩阵
y1 = rowSums(x)                                       #按行求和
y1                                                    #显示随机数
```

```
[1] 152 161 154 175 155 150…
```

```
y2 = rnbinom(100,100,0.4)                             #产生 100 个 n = 100,p = 0.4 服从负二项分布随机数
y2                                                    #显示随机数
```

```
[1] 137 169 138 153 200 152…
```

```
par(mfcol = c(1,2))
hist(y1, xlim = c(80,220), breaks = 10, main = paste("几何分布加和"))
hist(y2, xlim = c(80,220), breaks = 10, main = paste("负二项分布"))
```

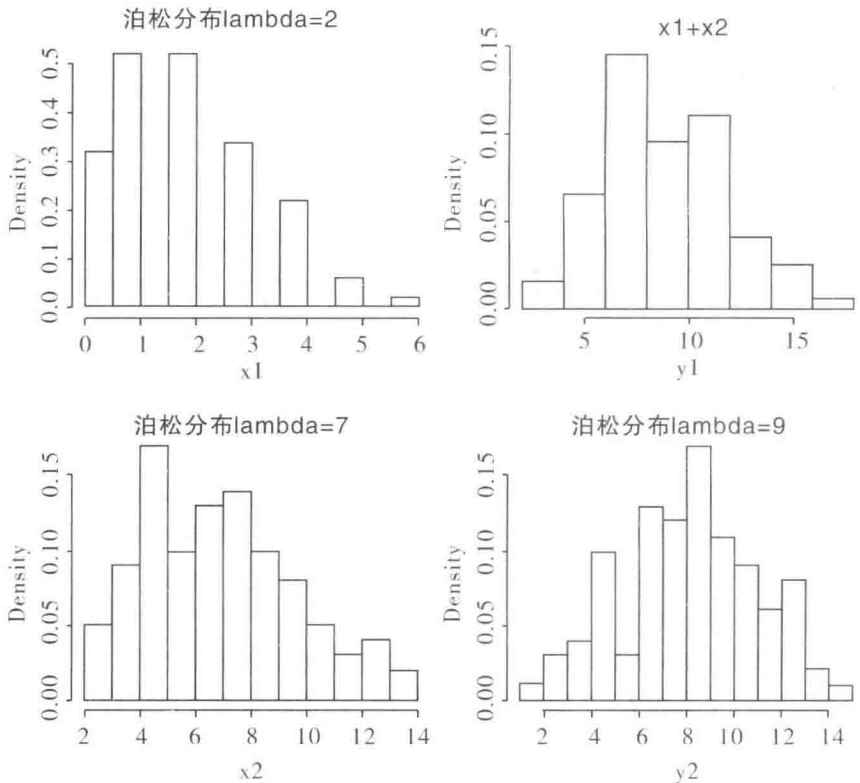


左侧直方图和右侧直方图有很大的相似性，右侧直方图为使用 R 函数产生的 100 个参数 $n=100$，$p=0.4$ 的负二项分布随机数，$n=100$ 意味着在试验中共有 100 次 A 事件的发生，每次 A 事件发生的概率为参数 $p=0.4$。若假设该参数条件下的负二项分布随机变量为 y_2，那么 y_2 可以看成是由 100 个服从参数为 $p=0.4$ 的几何分布随机变量（用 y_1 表示）加和构成，即 $y_2=\sum_{i=1}^{100} y_{1i}$。根据直方图中 y_1 的产生方法，首先产生 10000 个服从参数 $p=0.4$ 的几何分布随机数，转化为 $100*100$ 的矩阵，按照行取加和，每个加和可以看成是一个来自参数 $n=100$，$p=0.4$ 的负二项分布随机数，共 100 个。

由此，离散型分布随机数可以通过 R 语言自带函数产生，也可以利用 R 函数和分布之间的关系产生。

【例 1.2】分别产生参数 $\lambda=2$ 和 $\lambda=7$ 的泊松分布随机数各 100 个，取两两加和，形成 100 个数据。再产生参数 $\lambda=9$ 的随机数 100 个，与加和结果进行比较。

```
x1 = rpois(100,2)                    #产生 100 个 lambda = 2 服从泊松分布随机数
x1                                   #显示随机数
[1] 2 2 1 1 4 2…
x2 = rpois(100,7)                    #产生 100 个 lambda = 7 服从泊松分布随机数
x2                                   #显示随机数
[1] 5 5 7 7 3 6…
y1 = x1 + x2
y1                                   #显示随机数
[1] 7 7 8 8 7 8…
y2 = rpois(100,9)                    #产生 100 个 lambda = 9 服从泊松分布随机数
y2                                   #显示随机数
[1] 15 11 15 6 5 9…
par(mfrow = c(2,2))
hist(x1,breaks = 10,prob = T,main = paste("泊松分布 lambda = 2"))
hist(x2,breaks = 10, prob = T,main = paste("泊松分布 lambda = 7"))
hist(y1,breaks = 10, prob = T,main = paste("x1 + x2"))
hist(y2,breaks = 10, prob = T,main = paste("泊松分布 lambda = 9"))
```



根据泊松分布的可加性，如果随机变量 X 服从 $P(\lambda_1)$，Y 服从 $P(\lambda_2)$，都为泊松分布时，其加和 $X+Y$ 为泊松分布，且参数为 $\lambda_1+\lambda_2$。由 x_1+x_2 所形成的 100 个数据直方图（右上图），和 $\lambda=9$ 的 100 个泊松分布随机数直方图（右下图）比较，两者表现出分布相近性。

1.1.2 连续型随机数产生

连续型随机数产生的 R 函数命令和密度表达式如表 1.2 所示，由于连续型随机变量密度函数随参数变化而发生改变，各种不同连续分布之间存在关联。例如，正态分布和 t 分布，在 t 分布参数 df 为 30 及以上时，t 分布接近于正态分布。

表 1.2 常用连续型随机数的 R 函数命令与分布

分布名称	函数命令	参数	密度函数表达式
贝塔分布 Beta	rbeta (n, shape1, shape2)	shape1 = a shape2 = b	$f(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $a>0,b>0,0\leqslant x\leqslant 1$
柯西分布 Cauchy	rcauchy (n, location, scale)	location = l scale = s	$f(x)=\frac{1}{\pi s(1+(\frac{x-l}{s})^2)}$
卡方分布 Chi - squared	rchisq (n, df, ncp)	df = n ncp = λ	$f(x,n)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{(\frac{n}{2}-1)}e^{-\frac{x}{2}}$ $g(x,n,\lambda)=e^{-\frac{\lambda}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda/2)^r}{r!}f(x,n+2r)$(非中心化)
指数分布 Exponential	rexp (n, rate)	rate = λ	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},x\geqslant 0$
F 分布 F	rf (n, df1, df2)	df1 = n_1 df2 = n_2	$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}(\frac{n_1}{n_2})^{n_1/2}x^{\frac{n_1}{2}-1}(1+\frac{n_1}{n_2}x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$ $x>0$
伽马分布 Gamma	rgamma (n, shape, rate, scale =1/rate)	shape = a rate = λ scale = $1/\lambda$	$f(x)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x},x\geqslant 0,a>0,\lambda>0$
对数正态分布 Lognormal	rlnorm (n, meanlog, sdlog)	meanlog = μ sdlog = σ	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x>0$
逻辑斯特分布 Logistic	rlogis (n, location, scale)	location = m scale = s	$f(x)=\frac{1}{s}e^{\frac{x-m}{s}}(1+e^{\frac{x-m}{s}})^{-2}$

（续上表）

分布名称	函数命令	参数	密度函数表达式
正态分布 Normal	rnorm (n, mean, sd)	mean $=\mu$ sd $=\sigma$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
t 分布 t	rt (n, df)	df $=n$	$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$
均匀分布 Uniform	runif (n, min, max)	min max	$f(x)=\frac{1}{\max-\min},\min\leqslant x\leqslant\max$
威尔科克森符号秩分布 Wilcoxon Signed Rank	rsignrank (nn, n)	n	随机数：来自一组数据经过绝对值排序取秩后，将所有数据值为正对应的秩求和结果。 n：随机数取值范围在0到$\frac{n(n+1)}{2}$
威布尔分布 Weibull	rweibull (n, shape, scale)	shape $=a$ scale $=b$	$f(x)=\frac{a}{b}(\frac{x}{b})^{a-1}e^{-(\frac{x}{b})^a},x>0$
威尔科克森秩和分布 Wilcoxon Rank Sum	rwilcox (nn, m, n)	m n	随机数：来自样本量分别为 m 和 n 的随机、独立数据 X 和 Y，计算所有满足 $X_i\geqslant Y_j$ 的个数结果。 随机数取值范围：0到 mn
多元正态分布 Multivariate Normal	mvrnorm (n, mu, Sigma)	mu $=\mu$ Sigma $=\Sigma$	$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left\|\sum\right\|^{\frac{1}{2}}}e^{\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\sum^{-1}(x-\mu)\right]}$

注：mvrnorm 函数需调用 MASS 包，函数命令中第一参数 n 或 nn 均表示随机数产生数量。

【例1.3】分别产生标准正态分布随机数100个，$df=2$，10，30的 t 分布随机数各100个。作出随机数直方图和密度函数曲线，进行比较。

```
options(digits=3)
x=rnorm(100)                    #产生100个mean=0,sd=1服从标准正态分布随机数
x                               #显示随机数
```

```
[1]  1.020  0.788  0.418  1.611 -0.828  0.351…
```

```
y1=rt(100,2)                    #产生100个df=2服从t分布随机数
y1                              #显示随机数
```

```
[1]  0.00847  0.46177  1.17985 -0.42883 -1.03086  4.13947…
```

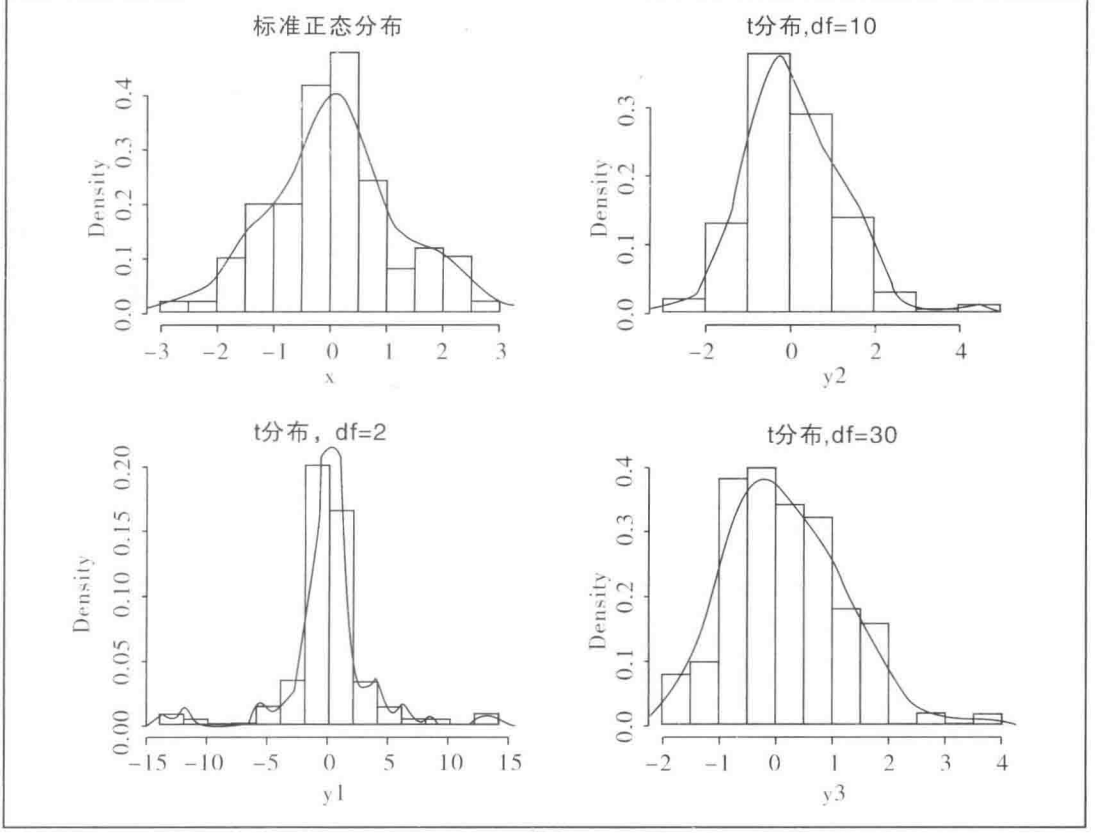
```
y2=rt(100,10)                   #产生100个df=10服从t分布随机数
y2                              #显示随机数
```

```
[1]  0.657  1.267  1.294  1.747 -1.333  1.015…
```

```
y3 = rt(100,30)                    #产生 100 个 df = 30 服从 t 分布随机数
y3                                 #显示随机数
```

```
[1] -0.2384 -0.5865 -1.5909  2.0114 -1.5195  0.0616…
```

```
par(mfcol = c(2,2))
hist(x, breaks = 10, prob = T, main = paste("标准正态分布"))
lines(density(x), col = "red", lwd = 2)
hist(y1, breaks = 10, prob = T, main = paste("t 分布, df = 2"))
lines(density(y1), col = "red", lwd = 2)
hist(y2, breaks = 10, prob = T, main = paste("t 分布, df = 10"))
lines(density(y2), col = "red", lwd = 2)
hist(y3, breaks = 10, prob = T, main = paste("t 分布, df = 30"))
lines(density(y3), col = "red", lwd = 2)
```



df = 2 时（左下图），呈现 *t* 分布典型的厚尾分布特征，随着 *df* 的增加，*df* = 10 时（右上图），横轴取值范围缩小到［－3，3］之间，稍有厚尾，*df* = 30 时（右下图），厚尾进一步减小，密度函数特征（实线）与标准正态分布（左上图）更为接近。

实际上，上述直方图和密度函数是基于随机数而产生的，图形结果都会有所差异。下面以各分布的理论密度作出密度函数曲线图进行比较。